Sur les groupes fondamentaux des H-espaces.

Autor(en): **Borel, Francois**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **53 (1978)**

PDF erstellt am: **15.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-40755

Comment. Math. Helvetici **53** (1978) 73–91 Birkhäuser Verlag, Basel

Sur les groupes fondamentaux des *H*-espaces

FRANÇOIS BOREL

1. Introduction

Dans ce travail, nous désignerons par H-espace un espace de Hopf X ayant le type d'homotopie d'un complexe cellulaire fini. Grâce au théorème de Hopf (1941), nous savons que l'algèbre de cohomologie rationnelle $H^*(X, \mathbf{Q})$ est une algèbre extérieure $\Lambda(x_1, \ldots, x_r)$ à r générateurs de degrés respectifs $2n_1-1, \ldots, 2n_r-1$. Nous dirons alors, en accord avec la terminologie connue, que X est un H-espace de *rang* r, de *type* $(2n_1-1, \ldots, 2n_r-1)$, et de *semi-type* $(n_1, \ldots, n_r)$. Nous noterons d la *dimension* $(2n_1-1)+\cdots+(2n_r-1)$ de X.

La cohomologie rationnelle d'un H-espace ne fixe pas son type d'homotopie. Elle ne change par exemple pas si l'on passe à un revêtement fini. Cependant, en 1970, Curjel et Douglas ont démontré qu'il n'existe qu'un nombre fini de types d'homotopie de H-espaces ayant même cohomologie rationnelle [7]. Il en résulte en particulier qu'un H-espace ne possède qu'un nombre fini de revêtements compacts (au type d'homotopie près). Le but de ce travail est de contrôler explicitement cette situation, en décrivant les limitations imposées à la structure de $\pi_1(X)$ par celle de $H^*(X, \mathbf{Q})$. Une formulation équivalente du théorème de Curjel-Douglas est qu'il n'existe qu'un nombre fini de H-espaces de dimension donnée. C'est pourquoi nous énoncerons nos résultats, dans la mesure du possible, en donnant simultanément les limitations fournies par le type, le rang et la dimension de X.

Le groupe fondamental d'un H-espace est abélien de génération finie. De plus, si dans le type de X figure exactement k fois l'entier 1, on voit facilement (cf [8, th. 2.1]) que X a le type d'homotopie de $Y \times (S^1)^k$, avec Y un H-espace de rang $r-k$ et de groupe fondamental $\pi_1(Y)$ = sous-groupe de torsion de $\pi_1(X)$. La partie libre de $\pi_1(X)$ est donc contrôlée par le type de X de façon précise, et nous n'envisagerons par la suite que des H-espaces à groupe fondamental fini.

Un premier renseignement sur la structure de $\pi_1(X)$ est alors fourni par l'étude des suites spectrales de Bockstein de X. En effet, le nombre de facteurs cycliques p-primaires de $\pi_1(X)$ ne peut excéder le rang de X. Ce résultat, implicite dans les travaux de Browder [6], peut s'énoncer de façon plus précise:

THEOREME 1. *Soit p premier. Le nombre de facteurs cycliques p-primaires de $\pi_1(X)$ est inférieur ou égal au nombre de puissances de p figurant dans le semi-type de X.*

La situation dans le cas des groupes de Lie compacts a été étudiée par Borel [1], qui compare les cohomologies modulo p d'un groupe de Lie G et de son revêtement universel. Il démontre que l'effet du groupe fondamental consiste à modifier le degré de certains générateurs des algèbres de Hopf correspondantes. On en extrait une relation entre la décomposition p-primaire de $\pi_1(G)$ et le type de G. Une démarche semblable, faisant appel aux travaux de Browder [4, 5, 6] et de Lin [9], permet d'obtenir des résultats analogues dans le cas des H-espaces. Notons g_p l'ordre du sous-groupe de p-torsion de $\pi_1(X)$. Si p est impair, on a le

THEOREME 2. (*a*) *g_p est un diviseur de $n_{q_1}n_{q_2}\cdots n_{q_s}$ où les n_{q_i} sont les puissances de p figurant dans le semi-type $(n_1,\ldots,n_r)$*

(*b*) *$\log g_p \leq d\cdot(\log p)/(2p-1)$*

(*c*) *$\log g_p \leq 2r\cdot\log p$.*

Les résultats de Lin n'ont pas d'analogue pour $p=2$, où la situation est, comme toujours, plus délicate. On peut cependant démontrer:

THEOREME 3. *Le thérorème 2 est valable pour $p=2$ sous l'une des deux hypothèses suivantes:*

(*a*) *le revêtement universel n'a pas de 2-torsion*

(*b*) *la cohomologie modulo 2 du revêtement universel est une algèbre de Hopf co-associative*

3(b) découle d'un résultat annoncé par Harper et Lin dans [10].

THEOREME 4. *Si la 2-torsion de $\pi_1(X)$ est cyclique d'ordre 2^m, le semi-type de X contient 2^f, avec $f\geq m$.*

Le résultat concernant g_2 valable de manière générale est le suivant:

THEOREME 5. (a) *g_2 est un diviseur de la plus grande puissance entière de 2 inférieure au nombre $(2n_{q_1}n_{q_2}\cdots n_{q_s})^{(\log g_2)^{1/2}(4\log 2)^{-1/2}}$ où les n_{q_i} sont les puissances de 2 figurant dans le semi-type $(n_1,\ldots,n_r)$*

(b) *$\log g_2 \leq ((d+3)/6)^2 \log 2$.*

Les démonstrations des théorèmes 1 à 5 sont groupées dans les paragraphes 5 et 6. Auparavant, les paragraphes 2 et 3 rassemblent les données techniques nécessaires sur les algèbres de Hopf et la suite de Bockstein d'un H-espace. Le paragraphe 4 fait alors intervenir de façon plus précise la topologie algébrique des H-espaces, et analyse en détail les interactions entre le groupe fondamental et le semi-type. En conclusion (paragraphe 7), nous illustrons les théorèmes principaux par quelques échantillons explicites.

Cette thèse a été réalisées sous la direction du professeur François Sigrist. Je tiens à lui exprimer ici ma reconnaissance pour les encouragements qu'il m'a prodigués et pour l'aide précieuse et constante qu'il m'a apportée. Mes remerciements s'adressent également aux professeurs Ulrich Suter et Claude Weber, membres du jury.

2. Suite spectrale de Browder et forme biprimitive

La cohomologie d'un H-espace à coefficients dans un corps est une algèbre de Hopf. Pour les notations et définitions, nous renvoyons le lecteur à Borel [3] et Milnor-Moore [11]. Nous utiliserons de façon essentielle des résultats de Browder [6], que nous énoncerons sous une forme appropriée à notre travail.

Soit A une algèbre de Hopf différentielle sur $\mathbf{Z}/p$. Nous la supposerons associative, commutative et de dimension finie. Nous noterons m sa multiplication et m' sa comultiplication. Soit $\bar{A}$ l'idéal des éléments de degré strictement positif. En définissant:

$$F^0A = A \qquad F^{n+1}A = m(\bar{A} \otimes F^nA)$$

on obtient une filtration décroissante de A, stable pour la différentielle d. Notons (E_rA, d_r) la suite spectrale bigraduée associée et rappelons que

$$E_0^{p,q}A = F^qA^{p+q}/F^{q+1}A^{p+q}.$$

Nous utiliserons les mêmes symboles m et m' pour les multiplications et comultiplications induites par m et m' sur E_rA. Nous avons:

LEMME. *(E_r, d_r) est une suite spectrale d'algèbres de Hopf associatives, commutatives et primitivement engendrées (i.e. ayant un ensemble de générateurs x, dits primitifs, tels que $m'x = 1 \otimes x + x \otimes 1$).*

Soient maintenant $B = E_rA$, p_0 la projection naturelle de B sur $\bar{B}$ et p_n le morphisme $\{(p_0 \otimes p_0)m') \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1\}p_{n-1}$. En définissant $G^nB = \ker p_n$, on obtient une filtration croissante de B, stable pour la différentielle d_r. Nous noterons

$({}_sEB, {}_sd_r)$ la suite spectrale associée. Pour les multiplications et comultiplications induites, nous avons:

LEMME. $({}_sEB, {}_sd_r)$ *est une suite spectrale d'algèbres de Hopf associatives, commutatives et biprimitives (i.e. primitivement engendrées et sans éléments primitifs décomposables).*

THEOREME. *Les algèbres de Hopf* ${}_\infty EE_rA$ *et* ${}_0EE_{r+1}A$ *sont isomorphes. On peut donc enchaîner les suites spectrales d'algèbres de Hopf biprimitives:* ${}_0EE_0A$, ${}_1EE_0A, \ldots, {}_\infty EE_0A \simeq {}_0EE_1A$, ${}_1EE_1A, \ldots, {}_\infty EE_rA \simeq {}_0EE_{r+1}A$, ${}_1EE_{r+1}A, \ldots$ *La suite spectrale ainsi obtenue est stationnaire et* ${}_\infty EE_\infty A \simeq {}_0EE_0H(A)$.

${}_0EE_0A$, appellée forme biprimitive de A, est l'unique algèbre de Hopf biprimitive isomorphe à A comme espace vectoriel gradué. On démontre facilement que cette construction est fonctorielle. Pour indiquer comment la structure d'algèbre de la forme biprimitive de A se déduit de celle de A, nous rappelerons tout d'abord le théorème de structure de Borel qui s'énonce:

THEOREME. *Une algèbre de Hopf associative et commutative de dimension finie sur* $\mathbf{Z}/p$ *est le produit tensoriel d'algèbres extérieures* $\Lambda(x)$ *avec* x *de degré impair, et d'algèbres polynomiales de la forme* $\mathbf{Z}/p[y]/(y^{p^f})$ *(*y *de degré pair si* $p \neq 2$*).*

La forme biprimitive d'une telle algèbre est alors décrite par la

PROPOSITION 2.1. *La forme biprimitive d'une algèbre de Hopf* A *est l'algèbre obtenue à partir de* A *en remplaçant les facteurs* $\mathbf{Z}/p[y]/(y^{p^f})$ *par des facteurs* $\mathbf{Z}/p[y_0]/(y_0^p) \otimes \cdots \otimes \mathbf{Z}/p[y_{f-1}]/(y_{f-1}^p)$, *les* y_i *correspondant aux* y^{p^i} *via l'isomorphisme d'espace vectoriel entre* ${}_0EE_0A$ *et* A.

COROLLAIRE 2.2. *Si* A *est une algèbre extérieure, les algèbres* A *et* ${}_0EE_0A$ *sont isomorphes.*

3. Suites de Bockstein et algèbres de type $(n, 2q)$

Pour mettre en évidence les relations entre le groupe fondamental d'un H-espace X et son semi-type, nous étudierons les suites spectrales de Bockstein de X, d'une part avec les méthodes exposées au paragraphe précédent, d'autre part à l'aide des algèbres test $A(n, 2q)$ définies par Browder. Nous utiliserons plusieurs résultats de ce dernier. Pour leurs démonstrations, nous renvoyons le lecteur à [4, 5, 6].

La suite de Bockstein modulo p est la suite spectrale associée au couple exact:

$$\begin{tikzcd}
H^*(X,\mathbf{Z}) \arrow[rr, "i^*"] & & H^*(X,\mathbf{Z}) \arrow[dl, "j^*"] \\
& H^*(X,\mathbf{Z}/p) \arrow[ul, "d"] &
\end{tikzcd}$$

induit par la suite exacte des coefficients $\mathbf{Z} \xrightarrow{i} \mathbf{Z} \xrightarrow{j} \mathbf{Z}/p$. Nous la noterons $\{B_k(X,\mathbf{Z}/p), b_k\}$ en rappelant que $B_1 = H^*(X,\mathbf{Z}/p)$ et que, si l'on note j_k^* le morphisme naturel de $H^*(X,\mathbf{Z})$ dans $B_k^*(X,\mathbf{Z}/p)$, on a (avec les abus de notation standards):

$$b_k z = j_k^* p^{-k+1}\, dz.$$

C'est une suite spectrale convergente d'algèbres de Hopf associatives et commutatives. Sa limite B_∞ décrit le semi-type $(n_1, \ldots, n_r)$ de X de la manière suivante:

$B_\infty^*(X,\mathbf{Z}/p)$ est isomorphe à $(H^*(X,\mathbf{Z})/\text{torsion}) \otimes \mathbf{Z}/p$. Or ce dernier terme est, d'après Borel [2], l'algèbre extérieure $\Lambda(x_1, \ldots, x_r)$ sur des générateurs x_i de degré $2n_i - 1$.

On déduit de la définition de la suite spectrale de Bockstein le lemme et le corollaire suivants:

LEMME 3.1. (a) *étant donnés un entier k, et $y \in B_k(X,\mathbf{Z}/p)$, $b_m y = 0$ pour tout $m \geq k$ si et seulement si y est dans l'image de j_k^**

(b) *$\ker j_k^* = pH^*(X,\mathbf{Z}) + T^{k-1}$ où T^{k-1} est l'ensemble des $u \in H^*(X,\mathbf{Z})$ tels que $p^{k-1}u = 0$.*

COROLLAIRE 3.2. *Soit $v \in H^*(X,\mathbf{Z})$ d'ordre additif p^m avec $j^*v \neq 0$. Alors j^*v est un cycle permanent pour les b_k et un bord pour b_m.*

Chacune des algèbres B_k satisfait aux hypothèses du paragraphe précédent. La suite spectrale biprimitive associée a les propriétés suivantes:

PROPOSITION 3.3. *Supposons que ${}_sEE_rB_k$ soit produit tensoriel d'une algèbre extérieure $\Lambda(z_1, \ldots, z_m)$ et d'algèbres polynomiales $\mathbf{Z}/p[y_i]/(y_i^p)$ $1 \leq i \leq n$, avec y_i de degré pair et z_j de degré impair. Avec une numérotation des générateurs* *convenable, et en notant $d = {}_s(b_k)_r$, l'algèbre différentielle ${}_sEE_rB_k$ peut s'écrire sous forme de produit tensoriel des algèbres différentielles suivantes:*

(1) $\Lambda(z_i)\otimes \mathbf{Z}/p[y_i]/(y_i^p)$, $1\le i\le t$ avec $t\le n, m$ $dz_i = y_i$ et $dy_i = 0$, dont l'homologie est $\Lambda(x_i)$ avec $x_i = z_i y_i^{p-1}$

(2) l'algèbre engendrée par $z_{t+1},\ldots, z_m, y_{t+1},\ldots, y_n$ avec $d=0$, isomorphe à son homologie.

(comme l'anneau des coefficients est un corps, l'homologie d'un produit tensoriel est le produit tensoriel des homologies)

On appelle algèbre de type $(n, 2q)$ l'algèbre sur $\mathbf{Z}/p$

$$\mathbf{Z}/p[a_0]/(a_0^p)\otimes\cdots\otimes\mathbf{Z}/p[a_{n-1}]/(a_{n-1}^p)\otimes\mathbf{Z}/p[a_n]$$

(où les a_i sont de degré $2qp^i$), sur laquelle on a défini par récurrence la comultiplication suivante:

$$m'a_i = 1\otimes a_i + a_i\otimes 1 + G_i \qquad G_0 = 0$$

$$G_{i+1} = \frac{1}{p}\ ((1\otimes a_i + a_i\otimes 1)^p - (1\otimes a_i^p + a_i^p\otimes 1)) + (1\otimes a_i + a_i\otimes 1)^{p-1}G_i$$

Nous utiliserons dans nos démonstrations le résultat suivant:

LEMME 3.4. *Soit $w\in p$-torsion de $H^{2q}(X, \mathbf{Z})$ satisfaisant*

(1) $z = j^*w\neq 0$ est primitif et d'ordre multiplicatif p

(2) $w^p = p^k w'$ avec $k\ge 1$ et $z' = j^*w'\neq 0$. On a:

(a) Si w est d'ordre additif p^r, $r\ge 2$, alors $k=1$ et l'application $f(a_0) = z$, $f(a_1) = z'$ définit un morphisme d'algèbres de Hopf $f: A(1, 2q)\to B_2(X, \mathbf{Z}/p)$

(b) Si w est d'ordre additif p, z' est primitif dans $B_{k+1}(X, \mathbf{Z}/p)$.

(a) est un cas particulier de [5, Th 3.7]. Une idée similaire permet de démontrer (b): Comme z est primitif,

$$m^*w = 1\otimes w + w\otimes 1 + pA$$

avec $p^2A = 0$ puisque $pw = 0$. Dès lors

$$\begin{aligned}p^k m^*w' = m^*w^p &= (1\otimes w + w\otimes 1 + pA)^p\\ &= (1\otimes w + w\otimes 1)^p + \sum_1^{p-1}\binom{p}{i}(1\otimes w + w\otimes 1)^i(pA)^{p-i} + (pA)^p\\ &= 1\otimes w^p + w^p\otimes 1 = p^k(1\otimes w' + w'\otimes 1)\end{aligned}$$

puisque $pw = 0$ et $p^2A = 0$. Donc

$$m^*w' = 1 \otimes w' + w' \otimes 1 + u \quad \text{avec} \quad u \in T^k$$

On en déduit par 3.1 que

$$m^*z' = 1 \otimes z' + z' \otimes 1 \quad \text{dans} \quad B_{k+1}.$$

3.4(a) est un cas particulier de la construction de ce que Browder appelle une suite d'implication. Nous n'utiliserons qu'une seule propriété d'une telle suite, que nous énoncerons sous forme de remarque, laissant au lecteur le soin de vérifier qu'elle correspond bien à la construction faite sous [5, Th 3.11].

REMARQUE 3.5. *Soit* $w \in H^{2q}(X, \mathbf{Z})$ *d'ordre additif* p^m *tel que* $z = j^*w \neq 0$ *soit primitif. Alors* z *possède une suite d'implication* $z^0 = z, \ldots, z^{m-1}$ *de longueur* $m-1$, *ce qui signifie en particulier qu'il existe des entiers* $n, r, s \geq 0$ *et* $k \geq 1$, *et un morphisme* $f : A(n, 2qp^r) \to B_k(X, \mathbf{Z}/p)$ *tel que* $f(a_n^{p^s}) = z^{m-1} \in B_k^{2qp^{m-1}}(X, \mathbf{Z}/p)$.

4. Relations entre le groupe fondamental et le semi-type de X

Comme nous l'avons annoncé dans l'introduction, nous supposerons que $\pi_1(X)$ est un groupe fini. Considérons un revêtement $g : \bar{X} \to X$ de fibre G et notons K l'espace d'Eilenberg-MacLane $K(G, 1)$. Nous rappelerons le résultat suivant:

Quitte à remplacer X et $\bar{X}$ par des H-espaces ayant même type d'homotopie, il existe une fibration $f : X \to K$(dite application classifiante) de fibre $\bar{X}$. Les applications f et g sont compatibles avec les multiplications des H-espaces $\bar{X}$, X et K. G agit trivialement sur $H^*(\bar{X}, \mathbf{Z})$.

La situation s'applique en particulier au revêtement universel $\tilde{X}$ de X. Alors l'étude des termes de bas degré total de la suite spectrale (cohomologique) de Leray-Serre associée à la fibration $f : X \to K = K(\pi_1(X), 1)$ permet de montrer que f^* induit les isomorphismes suivants:

$$H^1(X, \mathbf{Z}) \simeq H^1(K, \mathbf{Z}) = 0 \qquad H^1(X, \mathbf{Z}/p) \simeq H^1(K, \mathbf{Z}/p)$$

$$H^2(X, \mathbf{Z}) \simeq H^2(K, \mathbf{Z}) \simeq \pi_1(X) \qquad H^2(X, \mathbf{Z}/p) \simeq H^2(K, \mathbf{Z}/p).$$

La décomposition des revêtements, et l'application itérée du lemme 4.1 ci-dessous (cas particulier de [6, Th 5.8]) permettent de décrire les relations existant entre les algèbres de cohomologie modulo p de $\tilde{X}$ et X. Etant donné un revêtement $\bar{X}$ de X de fibre $\mathbf{Z}/p^m$, la cohomologie modulo p de X est la limite de la suite spectrale $\{E_r, d_r\}$ de Leray-Serre, de terme

$$E_2^{*,*} = H^*(K, \mathbf{Z}/p) \otimes H^*(\bar{X}, \mathbf{Z}/p)$$

Rappelons que $H^*(K, \mathbf{Z}/p) \simeq \Lambda(x) \otimes \mathbf{Z}/p[y]$ (deg $x = 1$, deg $y = 2$), sauf si $p = 2$ et $m = 1$, où $H^*(K, \mathbf{Z}/2) \simeq \mathbf{Z}/2[x]$ (deg $x = 1$). On a:

LEMME 4.1. *L'unique différentielle non triviale de $\{E_r, d_r\}$ est une différentielle $d = d_{2p^s}$ $(s \geq 0)$ décrite par:*
$du = y^{p^s} \in E_{2p^s}^{*,0} \simeq H^*(K, \mathbf{Z}/p)$ où u est un générateur (de degré $2p^s - 1$) de $E_{2p^s}^{0,*} \simeq H^*(\bar{X}, \mathbf{Z}/p)$. (Convention si $p = 2$ et $m = 1$: nous noterons $x^2 = y$).

Nous pouvons maintenant démontrer la

PROPOSITION 4.2. *Soit v un générateur de $\pi_1(X) = H^2(X, \mathbf{Z})$ supposé cyclique d'ordre p^m, p premier impair. v et y sa réduction modulo p ont même ordre multiplicatif p^β.*

Un récent résultat de Lin [9] nous sera essentiel. Il s'énonce:

Dans la cohomologie modulo p (impair) d'un H-espace 1-connexe, les générateurs polynomiaux se trouvent en des degrés de la forme $2(1 + p + \cdots + p^t)$, $(t \geq 1)$ ou $2(1 + p + \cdots + p^{k-1} + p^{k+1} + \cdots + p^t)$, $(k \geq 1)$.

Nous utiliserons ce résultat pour montrer que si l'application classifiant le revêtement universel est $f: X \to K = K(\pi_1, 1)$ et si u est un élément primitif de degré $2p^\beta$ de ${}_0EE_0H^*(X, \mathbf{Z}/p)$, alors $u \in \operatorname{Im} f^*$. Nous observerons tout d'abord que le terme $E_\infty^{*,*}$ de la suite de Leray-Serre du revêtement universel et $H^*(X, \mathbf{Z}/p)$ étant isomorphes comme espaces vectoriels gradués, ils ont même forme biprimitive. Par 4.1, on peut choisir pour $E_\infty^{*,*}$ un système de générateurs $\{z_i\}$ ayant la propriété suivante:

–soit z_i est image d'un générateur de $H^*(K, \mathbf{Z}/p)$

–soit z_i a pour image un générateur de $H^*(\tilde{X}, \mathbf{Z}/p)$.

Soit dès lors u un élément primitif (et donc indécomposable) de degré $2p^\beta$ de ${}_0EE_0E_\infty^{*,*}$. u est combinaison linéaire de générateurs de cette algèbre, donc d'après 2.1 combinaison linéaire de puissances p-ièmes de générateurs z_i de $E_\infty^{*,*}$. Etant donné que d'après Lin il n'y a pas de générateurs de degré $2p^k$ dans $H^*(\tilde{X}, \mathbf{Z}/p)$, les seuls z_i pouvant entrer en considération appartiennent à l'image de f^*, et donc $u \in \operatorname{Im} f^*$.

Considérons maintenant $y = j^*v$, qui par Borel est d'ordre multiplicatif une puissance p^β de p. Soit $w = v^{p^{\beta-1}}$ et supposons par l'absurde que $w^p = p^k w' \neq$

$0(k \geq 1, z' = j^*w' \neq 0)$. Puisque $H^1(X, \mathbf{Z}) = 0$, on a: $m^*v = 1 \otimes v + v \otimes 1$. Dès lors $z = j^*w$ est primitif et nous sommes dans les hypothèses de 3.4 (avec $q = p^{\beta-1}$).

Si w est d'ordre additif p^2 au moins, nous savons que z et z' sont images par un morphisme de $A(1, 2q)$ dans $B_2(X, \mathbf{Z}/p)$ de a_0 respectivement a_1. En passant aux formes biprimitives, on en déduit que z' est primitif dans ${}_0EE_0B_2$. Il est donc la classe d'un élément primitif u de ${}_0EE_0B_1$. Comme u est de degré $2p^\beta$, il est d'après ci-dessus dans l'image de f^*. Mais cette image étant nulle en ce degré ($y^{p^\beta} = 0!$), on en déduit que $u = 0$ donc $z' = 0$, ce qui est absurde.

Si w est d'ordre p, le même raisonnement s'applique en considérant la sous-algèbre de B_{k+1} engendrée par l'élément primitif z'.

L'examen attentif de la démonstration de 4.2 permet de compléter ce résultat par:

PROPOSITION 4.3. *Supposons $\pi_1(X)$ d'exposant p premier impair. Soient $v \in \pi_1(X) = H^2(X, \mathbf{Z})$ et y sa réduction modulo p. Alors v et y ont même ordre multiplicatif p^β.*

En effet on montre de la même manière que si $w^p = p^k w'$, alors $z' = j^*w'$ est dans l'image de f^*. Cela permet de conclure par l'absurde puisque w' est d'ordre additif au moins p^2 et que $pH^*(K, \mathbf{Z}) = 0$.

Nous énoncerons une généralisation facile de 4.2:

REMARQUE 4.4. *Soit $\pi_1(X) = \mathbf{Z}/p^{m_1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}/p^{m_s}$. Soient $v_1, \ldots, v_s$ les générateurs des facteurs cycliques, $y_1, \ldots, y_s$ leur réduction modulo p d'ordres multiplicatifs respectifs $p^{\beta_1}, \ldots, p^{\beta_s}$. Pour tout i tel que $\beta_i = \sup\{\beta_j\}$, v_i a l'ordre multiplicatif p^{β_i}.*

REMARQUE 4.5. *Si $H^*(\tilde{X}, \mathbf{Z}/2)$ n'a pas de générateurs polynomiaux en les degrés de la forme $2^k (k \geq 1)$, alors 4.2, 4.3 & 4.4 sont valables pour $p = 2$.*

C'est en particulier le cas lorsque le revêtement universel n'a pas de 2-torsion, ou encore lorsque l'algèbre de Hopf $H^*(X, \mathbf{Z}/2)$ est coassociative, comme l'ont annoncé Harper & Lin dans [10].

Dans le cas où le groupe fondamental est un p-groupe quelconque, la situation est un peu plus complexe:

PROPOSITION 4.6. *Soient $\pi_1(X)$ comme sous 4.4, v un générateur d'un facteur cyclique et $y = j^*v$ d'ordre multiplicatif p^β. Si v et y n'ont pas même ordre multiplicatif, alors $w = v^{p^{\beta-1}}$ est d'ordre additif p.*

Soit $f: X \to K = K(\pi_1, 1)$ classifiant le revêtement universel. Si $w^p = p^k w' \neq 0$, $z' = j^* w'$ est comme sous 4.2 dans l'image de $f^*: B_2(K, \mathbf{Z}/p) \to B_2(X, \mathbf{Z}/p)$. Comme $H^*(K, \mathbf{Z}/p)$ est primitivement engendrée, z' est donc primitif.

Pour démontrer que w est d'ordre additif p, il nous suffit donc de montrer que si w est d'ordre additif p^2 au moins, alors z' n'est pas primitif dans B_2. Nous savons par 3.4 que si cet ordre est au moins p^2, il existe un morphisme $g: A(1, 2q) \to B_2$ tel que $g(a_0) = z = j^* w$ et $g(a_1) = z'$. Comme

$$m'(a_1) = 1 \otimes a_1 + a_1 \otimes 1 + \frac{1}{p}((1 \otimes a_0 + a_0 \otimes 1)^p - (1 \otimes a_0^p + a_0^p \otimes 1))$$

$$m^*(z') = 1 \otimes z' + z' \otimes 1 + \frac{1}{p}((1 \otimes z + z \otimes 1)^p - (1 \otimes z^p + z^p \otimes 1))$$

dans B_2 et z' n'est donc pas primitif.

Nous observerons qu'en vertu de 4.4, ce phénomène ne peut se produire si y est d'ordre multiplicatif maximal parmi les générateurs de degré 2 de $H^*(X, \mathbf{Z}/p)$.

PROPOSITION 4.7. (*a*) *Soit v comme sous* 4.2. *Les puissances successives de v satisfont à la propriété suivante: Il existe une suite d'entiers* $0 = f_0 < f_1 < \cdots < f_m = \beta < f_{m+1}$ *tels que v^n soit d'ordre additif p^{m-i}, pour tout n avec $p^{f_i} \leq n < p^{f_{i+1}}$.*

(*b*) *Soit v générateur d'un facteur cyclique d'ordre p^m de $\pi_1(X)$. Le résultat ci-dessus est valable pour tout $i \leq m-1$.*

Les puissances v^n de v ont évidemment pour ordre additif une puissance de p. Notons $n = p^\alpha q$ avec $(p, q) = 1$. Il nous suffit, pour montrer (*a*), de montrer que si v^{n-1} est d'ordre additif p^k, alors v^n est:

d'ordre additif p^k si $q \neq 1$

d'ordre additif p^k ou p^{k-1} si $q = 1$.

On a:

$$m^* v^n = \sum_i \binom{n}{i} v^i \otimes v^{n-i}.$$

Si $q \neq 1$, la binomiale $\binom{n}{p^\alpha}$ n'est pas divisible par p. Puisque v^{n-1} est d'ordre additif p^k et n'est pas divisible par p d'après 4.2, on a:

$$p^{k-1}\binom{n}{p^\alpha}v^{p^\alpha}\otimes v^{n-p^\alpha}\neq 0 \text{ et donc}$$

$$\begin{aligned} m^*(p^{k-1}v^n) &= p^{k-1}m^*v^n \\ &= p^{k-1}\binom{n}{p^\alpha}v^{p^\alpha}\otimes v^{n-p^\alpha} + \text{termes de bidegrés différents} \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Il en découle que $p^{k-1}v^n\neq 0$, ce que nous voulions démontrer.

Si $q=1$, la binomiale $\binom{n}{p^{\alpha-1}}$ n'est pas divisible par p^2, nous pouvons donc démontrer de la même manière que $p^{k-2}v^n\neq 0$.

La partie (b) se démontre de la même manière à l'aide des résultats plus faibles de 4.6.

PROPOSITION 4.8. (*a*) *Si $\pi_1(X)$ a un facteur cyclique d'ordre p^m, alors dans le semi-type de X figure la suite de nombres suivante: $p^{f_1},\ldots,p^{f_m}$ avec $0<f_1<\cdots<f_m$.*

(*b*) *Soit $\pi_1(X)=\mathbf{Z}/p^{m_1}\oplus\cdots\oplus\mathbf{Z}/p^{m_s}$. Les m_i-1 premiers nombres fournis par chaque facteur cyclique en application de (a) forment des sous-ensembles disjoints du semi-type de X.*

Nous démontrerons ce résultat en détectant des générateurs de l'algèbre extérieure $B_\infty(X,\mathbf{Z}/p)$. Comme nous l'avons vu au paragraphe 3, les degrés de ces générateurs déterminent le type de X.

(a) On déduit de la formule $b_kz=j_k^*p^{-k+1}\,dz$ que si $dx_i=0$ alors $b_kx_i=0$ pour tout k. On en déduit également que si on a $b_kz=j_k^*v$, $v\in H^*(X,\mathbf{Z})$, alors $(p^{-k+1}\,dz-v)\in\ker j_k^*$ et donc d'après 3.1:

$$dz=p^{k-1}v+p^kv' \qquad v'\in H^*(X,\mathbf{Z}).$$

Considérons un revêtement de X, de groupe fondamental $\mathbf{Z}/p^m$. Soient v et $\{f_i\}$ comme sous 4.7, et notons

$$v_i=v^{p^{f_i-1}}.$$

v_i étant d'ordre additif p^{m-i+1} et j^*v_i étant non nul, il existe d'après 3.2 un élément z_i tel que $b_{m-i+1}z_i=j^*v_i$. Comme on l'a vu ci-dessus, cela signifie que

$$dz_i=p^{m-i}v_i+p^{m-i+1}v_i'.$$

Mais d est un morphisme de $H^*(X, \mathbf{Z})$-modules, donc

$$\begin{aligned} d(z_i j^* v_i^{p-1}) &= (dz_i)(v_i^{p-1}) \\ &= p^{m-i} v_i^p + (p^{m-i+1} v_i^{p-1}) v_i' = 0. \end{aligned}$$

Pour $x_i = z_i j^* v_i^{p-1}$ (de degré $(2p^{f_i}-1)+2(p-1)p^{f_i-1} = 2p^{f_i}-1$) nous avons $dx_i = 0$. C'est donc un cycle permanent de la suite de Bockstein. Il reste à voir que c'est un générateur de B_∞, ou ce qui revient au même (cf 2.2), un générateur de ${}_0EE_0B_\infty$. Pour ce faire, nous étudierons la longue suite spectrale d'algèbres biprimitives de premier terme ${}_0EE_0B_1$ et de dernier terme ${}_0EE_0B_\infty$ (cf paragraphe 2).

$y_i = j^* v_i$ est puissance p-ième d'un générateur de B_1, il est donc par 2.1 un générateur de ${}_0EE_0B_1$, et par 3.3 reste un générateur dans la suite spectrale jusqu'au moment où il devient un bord. Comme $b_{m-i+1} z_i = y_i$, 3.3 nous permet d'affirmer qu'il existe s et r tels que z_i soit générateur de ${}_sEE_rB_{m-i+1}$ et que ${}_s(b_{m-i+1})_r z_i = y_i$.

Nous savons qu'alors

$$x_i = z_i y_i^{p-1} \quad \text{est un générateur de} \quad {}_{s+1}EE_rB_{m-i+1}$$

Comme on l'a vu, x_i est un cycle permanent de la suite spectrale $\{B_k\}$, donc également pour tout k de la suite $\{{}_sEE_rB_k\}$. Dès lors x_i est un générateur, tout d'abord de ${}_0EE_0B_{m-i+2}$, isomorphe à ${}_\infty EE_\infty B_{m-i+1}$, mais aussi de ${}_0EE_0B_k$ pour tout $k \geq m-i+2$, donc de ${}_0EE_0B_\infty$, ce que nous voulions démontrer.

Le même raisonnement, appliqué à un générateur de chacun des facteurs cycliques de $\pi_1(X)$, permet de démontrer (b). Etant donné un facteur $\mathbf{Z}/p^m$, on obtient une famille $x_1, \ldots, x_m$. Cependant la partie (b) de 4.7, plus faible que la partie (a), ne permet pas d'affirmer que $b_k x_m = 0$ pour tout k. C'est pourquoi nous ne pouvons démontrer l'existence que de $m-1$ générateurs de B_∞.

Par 3.3, chacun des x_i correspondant à l'un ou l'autre des facteurs cycliques figure dans un facteur différent du produit tensoriel qu'est B_∞. Ces x_i forment donc un sous-ensemble non-redondant de générateurs, ce qui justifie l'affirmation selon laquelle les sous-ensembles du semi-type correspondants à des facteurs cycliques différents sont disjoints.

5. Démonstration des théorèmes 1 à 3

Dans ce paragraphe, nous supposerons que $\pi_1(X)$ est un p-groupe, ce qui revient à étudier non pas X, mais le revêtement de X (de même type!) ayant pour groupe fondamental la p-torsion de $\pi_1(X)$. Le théorème 1 est une conséquence directe de 3.3:

THEOREME 1. *Soit p premier. Le nombre de facteurs cycliques p-primaires de* $\pi_1(X)$ *est inférieur ou égal au nombre de puissances de p figurant dans le semi-type de X.*

Si $H^2(X, \mathbf{Z}) \simeq \pi_1(X)$ est le groupe $\mathbf{Z}/p^{m_1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}/p^{m_s}$, si nous notons $v_1, \ldots, v_s$ les générateurs des facteurs cycliques, et $y_1, \ldots, y_s$ leurs réductions modulo p, nous avons une famille $z_1, \ldots, z_s$ de générateurs de degré 1 de $H^*(X, \mathbf{Z}/p)$ tels que pour $1 \leq i \leq s$, $b_{m_i} z_i = y_i$. Par 3.3, nous en déduisons que chacun des z_i implique l'existence d'un générateur de B_∞, multiple de z_i de degré $2p^{k_i} - 1 (k_i \geq 1)$. Chaque facteur cyclique $\mathbf{Z}/p^{m_i}$ implique donc l'existence d'une puissance de p dans le semi-type de X.

Si $\pi_1(X) = \mathbf{Z}/p^{m_1} \oplus \mathbf{Z}/p^{m_2} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}/p^{m_s}$, considérons le revêtement $\bar{X}$ de X de groupe fondamental $\mathbf{Z}/p \oplus \mathbf{Z}/p^{m_2} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}/p^{m_s}$, et de fibre $\mathbf{Z}/p^{m_1 - 1}$. Comme $H^*(X, \mathbf{Z}/p)$ et $H^*(\bar{X}, \mathbf{Z}/p)$ ont même nombre de générateurs de degré 1, nous en déduisons par 4.1 que la seule différentielle non triviale de la suite de Leray-Serre est d_2, et que donc $H^*(X, \mathbf{Z}/p)$ et $H^*(\bar{X}, \mathbf{Z}/p)$ sont isomorphes. En appliquant ce raisonnement à chaque $\mathbf{Z}/p^{m_i}$, on obtient la

REMARQUE 5.1. *Soit* $\bar{X}$ *le revêtement de X ayant pour groupe fondamental le sous-groupe d'exposant p maximal de* $\pi_1(X)$. *Alors* $H^*(X, \mathbf{Z}/p) \simeq H^*(\bar{X}, \mathbf{Z}/p)$ (*isomorphisme d'algèbre si* $p \neq 2$, *d'espace vectoriel seulement sinon*).

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 2 en rappelant que nous notons g_p l'ordre de la p-composante de $\pi_1(X)$, pour p premier impair.

THEOREME 2. (a) g_p *est un diviseur de* $n_{q_1} n_{q_2} \cdots n_{q_s}$ *où les* n_{q_i} *sont les puissances de p figurant dans le semi-type* $(n_1, \ldots, n_r)$

(b) $\log g_p \leq d \cdot (\log p)/(2p-1)$

(c) $\log g_p \leq 2s \cdot \log p \leq 2r \cdot \log p$

Démontrons tout d'abord comment (b) découle de (a):

Si g_p divise $n_{q_1} \cdots n_{q_s}$, alors $\log g_p \leq \log n_{q_1} + \cdots + \log n_{q_s}$. Comme

$$\frac{\log k}{2k-1} \leq \frac{\log p}{2p-1} \quad \text{pour tout } k \geq p$$

on en déduit:

$$\log g_p \leq \frac{\log p}{2p-1}\{(2n_{q_1}-1)+\cdots+(2n_{q_s}-1)\} \leq \frac{\log p}{2p-1}\cdot d.$$

Supposons maintenant $H^2(X,\mathbf{Z}) \simeq \pi_1(X) = \mathbf{Z}/p^{m_1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}/p^{m_\nu}$. Notons $v_1,\ldots,v_\nu$ les générateurs des facteurs cycliques, et $y_1,\ldots,y_\nu$ leur réduction modulo p. Notons $\bar{v}_i$ et $\bar{y}_i$ les générateurs correspondants dans les cohomologies des revêtements intermédiaires $\bar{X}_i$ de groupe fondamental $\mathbf{Z}/p^{m_i}$. Par 4.1, y_i et $\bar{y}_i$ ont même ordre, par 4.2 $\bar{y}_i$ et $\bar{v}_i$ ont même ordre et par 4.7(a) celui-ci est p^{β_i} $(\beta_i \geq m_i)$.

Considérons maintenant le revêtement $\bar{X}$ ayant pour groupe fondamental le sous-groupe d'exposant p maximal de $\pi_1(X)$, qui a une cohomologie modulo p isomorphe à celle de X (cf 5.1). Notons également v_i et y_i les générateurs de degré 2 correspondants. Par 4.3 y_i et v_i ont même ordre multiplicatif p^{β_i}. Il existe une famille $z_1,\ldots,z_\nu$ de générateurs de degré 1 telle que $b_1 z_i = y_i$ pour tout i, $1 \leq i \leq \nu$. Par une démonstration analogue à celle de 4.8, et en utilisant 4.3, on démontre que

$$x_1 = z_1 y^{p^{\beta_1}-1},\ldots, x_\nu = z_\nu y_\nu^{p^{\beta_\nu}-1} \quad \text{(de degrés } 2p^{\beta_i}-1)$$

sont des générateurs de $B_\infty(X,\mathbf{Z}/p)$. Dans le semi-type figurent donc les nombres $p^{\beta_1},\ldots,p^{\beta_\nu}$. Il en découle que $g_p = p^{m_1+\cdots+m_\nu}$ est un diviseur de $n_{q_1}\cdots n_{q_s}$ où les n_{qj} sont les puissances de p figurant dans le semi-type, ce qui démontre (a).

Pour montrer (c), nous observerons que

$$\begin{aligned}\log g_p &\leq (m_1+\cdots+m_\nu)\log p\\ &\leq \nu \log p + \left\{\sum (m_i-1)\right\}\log p.\end{aligned}$$

Chacun des deux termes ci-dessus est inférieur à $s\cdot\log p$. Le premier par le théorème 1($\nu \leq s$), le deuxième par 4.8(b) qui garantit la présence dans le semi-type, pour chaque facteur $\mathbf{Z}/p^{m_i}$, de (m_i-1) puissances de p.

THEOREME 3. *Tous les résultats démontrés pour p impair aux paragraphes* 4 *et* 5, *en particulier le théorème* 2, *sont valables pour* $p=2$ *sous l'une des deux hypothèses suivantes:*

(a) *le revêtement universel n'a pas de 2-torsion*

(b) *la cohomologie modulo 2 du revêtement universel est une algèbre de Hopf coassociative.*

Pour s'en convaincre on se rapportera à la remarque 4.5, aux commentaires qui la suivent et au fait que les démonstrations des propositions 4.6 à 4.8 et du théorème 2 reposent sur les propositions 4.2 à 4.4.

6. Démonstration des théorèmes 4 et 5

THEOREME 4. *Si la 2-torsion de $\pi_1(X)$ est cyclique d'ordre 2^m, le semi-type de X contient 2^f, avec $f \geq m$.*

Ce théorème découle directement de 3.5 appliqué à un générateur w de $H^2(X, \mathbf{Z})$, d'ordre 2^m. En passant aux formes biprimitives on observe que l'élément z^{m-1}, de degré 2^{m+1}, est indécomposable dans la forme biprimitive d'un terme de la suite de Bockstein de X. Il existe donc par 3.3 un générateur de $B_\infty(X, \mathbf{Z}/2)$, multiple de z^{m-1}, de degré $2^{f+1}-1$ avec $f \geq m$.

THEOREME 5. (a) *g_2 est un diviseur de la plus grande puissance entière de 2 inférieure au nombre $(2n_{q_1}n_{q_2}\cdots n_{q_s})^{(\log g_2)^{1/2}(4\log 2)^{-1/2}}$ où les n_{q_i} sont les puissances de 2 figurant dans le semi-type $(n_1, \ldots, n_r)$*

(b) *$\log g_2 \leq ((d+3)/6)^2 \log 2$.*

Démontrons tout d'abord comment (b) découle de (a): Nous avons

$$\log g_2 \leq (\log g_2)^{1/2}(4\log 2)^{-1/2}(\log 2 + \log n_{q_1} + \cdots + \log n_{q_s}).$$

Puisque, comme nous l'avons déjà dit (cf dém. th. 2),

$$\frac{\log k}{2k-1} \leq \frac{\log 2}{3} \quad \text{pour tout} \quad k \geq 2,$$

nous en déduisons que

$$(\log g_2)^{1/2} \leq (4\log 2)^{-1/2}\left(\log 2 + \frac{\log 2}{3}\{(2n_{q_1}-1) + \cdots + (2n_{q_s}-1)\}\right)$$

$$\leq (4\log 2)^{-1/2}(\log 2(1+\tfrac{1}{3}d))$$

d'où

$$\log g_2 \leq \left(\frac{d+3}{6}\right)^2 \log 2.$$

Supposons $\pi_1(X)=\mathbf{Z}/2^m \oplus \mathbf{Z}/2^{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}/2^{n_s}$ avec $m \geq n_i$ pour tout i. Le théorème 4 (appliqué au revêtement de groupe fondamental $\mathbf{Z}/2^m$) nous garantit l'existence d'un générateur x de B_∞ de degré $2^{k+1}-1$ avec $k \geq m$. Le théorème 1 nous garantit l'existence de s générateurs de B_∞, distincts de x, de degrés $2^{h+1}-1$ avec $h \geq 1$. On en déduit que 2^{m+s} est un diviseur de $n_{q_1} \cdots n_{q_i}$ où les n_{q_j} sont les puissances de 2 figurant dans le semi-type.

Notons $\alpha = \log g_2(\log 2)^{-1} = m + n_1 + \cdots + n_s$. Comme $n_i \leq m$, on a $s \geq (\alpha/m) - 1$. Le calcul différentiel élémentaire nous dit que pour α donné, $(m+s) \geq 2\alpha^{1/2} - 1$. Dès lors $\alpha \leq (\alpha/4)^{1/2}(m+s+1)$. Comme 2^{m+s} est un diviseur de $n_{q_1} \cdots n_{q_t}$, on en déduit que $g_2 = 2^\alpha$ est un diviseur de la plus grande puissance entière de 2 inférieure à $(2n_{q_1} \cdots n_{q_s})^a$ avec $a = (\alpha/4)^{1/2} = (\log g_2)^{1/2}(4 \log 2)^{-1/2}$.

7. Applications

Pour obtenir dans ce travail les bornes pour $\pi_1(X)$, nous n'utilisons essentiellement que la classification cohomologique des H-espaces. Celle-ci, confrontée à la provision de H-espaces actuellement à disposition, ne peut guère prétendre à un contrôle serré. Il est donc relativement difficile d'exhiber des H-espaces réalisant en toute généralité les estimations obtenues ici. La situation est meilleure si l'on se contente de traiter les composantes p-primaires séparément. Comme presque tous les résultats ont le comportement attendu vis-à-vis des produits de H-espaces, on peut considérer les exemples qui suivent comme convenablement génériques.

EXEMPLE 1. $X = PSU(p)$, p premier. Le semi-type est $(2, 3, \ldots, p)$, le groupe fondamental $\mathbf{Z}/p$. X illustre, pour p, le théorème $1(\pi_1(X)$ est cyclique) et le thérorème 2 (l'ordre de $\pi_1(X)$ divise p). Pour $p = 2$, $PSU(2) = SO(3)$, et un calcul facile montre qu'on réalise les limites du théorème 5.

EXEMPLE 2. $X = PE_6$, groupe de Lie exceptionnel. Le semi-type est $(2, 5, 6, 8, 9, 12)$, le groupe fondamental $\mathbf{Z}/3$. X illustre, pour $p = 3$, le théorème 1 et en partie le théorème 2 (l'ordre de $\pi_1(X)$ divise 9). C'est en retournant à la démonstration du théorème 2 (proposition 4.8) que l'on force $\pi_1(X)$ à être cyclique d'ordre 3. Cet exemple illustre le fait que dans le cas où des hypothèses plus fortes sont à disposition (comme ici: une seule puissance de 3 dans le semi-type), les propositions du paragraphe 4 peuvent fournir des résultats plus précis que le théorème 2 lui-même (nous y avons d'ailleurs recouru dans les exemples D et E ci-dessous). C'est pour éviter une formulation extrêmement encombrante de ce dernier que nous avons renoncé à formuler de manière exhaustive les résultats obtenus au paragraphe 4.

Les applications qui suivent sont de caractère plus global, et donnent, à partir du semi-type, le contrôle fourni par les résultats de ce travail. A quelques exceptions évidentes près, la borne obtenue n'est pas optimale, et ne peut être améliorée que grâce à la connaisance explicite des espaces considérés. Un exemple est fourni dans [12], où les auteurs partent des résultats ci-dessous pour obtenir le contrôle exact du groupe fondamental pour tous les H-espaces de rang 2. Nous appellerons $\pi(X)$ le groupe abélien fini obtenu à l'aide des théorèmes 1 à 5, et qui contient donc un sous-groupe isomorphe à $\pi_1(X)$. Nous grouperons les illustrations en un tableau suivi des commentaires appropriés:

	Hypothèse sur X	Conclusion pour $\pi(X)$
(A)	X est un groupe de Lie de semi-type $(n_1, \ldots, n_r)$	$\lvert\pi(X)\rvert$ divise $n_1 \cdots n_r$
(B)	X est un groupe de Lie de dimension d	$\lvert\pi(X)\rvert \leq 2^{(d/3)}$
(B′)	$X = (SO(3))^s$	$\pi(X) = (\mathbf{Z}/2)^s$
(C)	X est un H-espace de semi-type $(2m_1, 2m_2, \ldots, 2m_r)$	$\pi(X)$ est un 2-groupe
(D)	X a le type d'un groupe de Lie exceptionnel:	
	$G_2: (3, 11)$	$\pi(X) = \mathbf{Z}/2$
	$F_4: (3, 11, 15, 23)$	$\pi(X) = \mathbf{Z}/8 \oplus \mathbf{Z}/8$
	$E_6: (3, 9, 11, 15, 17, 23)$	$\pi(X) = \mathbf{Z}/8 \oplus \mathbf{Z}/8 \oplus \mathbf{Z}/3 \oplus \mathbf{Z}/5$
	$E_7: (3, 11, 15, 19, 23, 27, 35)$	$\pi(X) = \mathbf{Z}/8 \oplus \mathbf{Z}/8$
	$E_8: (3, 11, 23, 27, 35, 39, 47, 59)$	$\pi(X) = \mathbf{Z}/8 \oplus \mathbf{Z}/8$
(E)	X est un H-espace de rang 2, de type:	
	$(3, 3)$	$\pi(X) = \mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/2$
	$(3, 5)$	$\pi(X) = \mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/3$
	$(3, 7)$	$\pi(X) = \mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/4$
	$(3, 11)$	$\pi(X) = \mathbf{Z}/2$
	$(7, 7)$	$\pi(X) = \mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/2$

Pour (A) et (B) on peut affaiblir l'hypothèse sur X en supposant que X est un H-espace homotopiquement associatif. Cette condition est suffisante pour appliquer le théorème 3 qui, joint au théorème 2, donne le résultat. (C) fait uniquement appel au théorème 1. Pour (D) il est nécessaire de combiner les résultats des théorèmes 1 et 4 et la proposition 4.8. La classification des H-espaces 1-connexes de rang 2 est connue: à l'exception du type (3, 11), ceux-ci sont sans torsion, ce qui permet d'obtenir (E) à l'aide des théorèmes 3 et 4 et de la proposition 4.8.

Finalement il peut être utile de comparer les estimations en fonction de la dimension. On démontre de façon élémentaire à l'aide des théorèmes 3, 4 et 5 les deux inégalités suivantes:

Si X est homotopiquement associatif, ou de revêtement universel sans torsion, alors

$$|\pi(X)| \leq 2^{d/3}$$

sinon

$$|\pi(X)| \leq 2^{((d+3)/6)^2}.$$

L'hypothèse d'associativité homotopique est suffisante si l'on fait appel, comme dans la remarque 4.5 et le théorème 3(b), au résultat annoncé par Harper et Lin [10], mais dont nous ne connaissons pas la démonstration. Mentionnons cependant qu'en renforçant l'hypothèse et en supposant que X est un groupe de Lie, le résultat en question se déduit d'un théorème classique de Bott:

Pour G un groupe de Lie 1-connexe, ΩG est sans torsion. (*An application of the Morse theory to the topology of Lie groups*, Bull. soc. math. de France 84(1956)251–282.)

Il en découle, comme corollaire d'un théorème de Browder [5,6.2] que $H^*(G, \mathbf{Z}/2)$ n'a pas de générateurs en des degrés de la forme 2^k, ce qui nous permet d'appliquer 4.5.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Borel, *Sur l'homologie et la cohomologie des groupes de Lie compacts connexes*, Amer. J. Math. *76* (1954) 273–342.
[2] ——, *Commutative subgroups and torsion in compact Lie groups*, Bull. Amer. Math. Soc. *66* (1960) 285–288.
[3] ——, *Topics in the homology theory of fibre bundles*, Lect. Notes in Math. *36* (1967).
[4] W. Browder, *Torsion in H-spaces*, Ann. Math. *74* (1961) 24–51.
[5] ——, *Higher torsion in H-spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. *108* (1963). 353–375.
[6] ——, *On differential Hopf algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. *107* (1963) 153–176.
[7] C. R. Curjel & R. R. Douglas, *On H-spaces of finite dimension*, Topology *10* (1971) 385–389.
[8] P. J. Hilton & J. Roitberg, *On the classification problem for H-spaces of rank two*, Comment. Math. Helvetici *45* (1970) 506–515.
[9] J. P. Lin, *Torsion in H-spaces II*, à paraître.

[10] —— & J. R. HARPER, *Two torsion in H-spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. *82* (1976) 612.
[11] J. W. MILNOR & J. C. MOORE, *On the structure of Hopf algebras*, Ann. Math. *81* (1965) 211–264.
[12] F. SIGRIST & U. SUTER, *Sur les H-espaces de rang 2*, C. R. Acad. Sci. Série A *285* (1976) 887–889.

Institut de Mathematiques
Chantemerle 20
2000 *Neuchâtel*

Reçu le 22 avril 1977.