Quadratische Räume mit zwei Unterräumen.

Comment. Math. Helvetici 53 (1978) 322–333 Birkhäuser Verlag, Basel

Quadratische Räume mit zwei Unterräumen

WERNER BÄNI

§1. Einleitung

1.1. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem Problem der Klassifikation von Paaren von Unterräumen quadratischer Räume. Wir betrachten also Quadrupel $\mathscr{E}=(E, \Phi, U, V)$, wo E ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem fest vorgegebenen Körper k der Charakteristik $\neq 2$ ist, versehen mit einer symmetrischen Bilinearform $\Phi: E\times E \to k$, und wo U, V Unterräume von E sind. Zwei solche "Räume" $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}'$ heissen isomorph, $\mathscr{E}\cong\mathscr{E}'$, wenn es eine Isometrie $T:(E, \Phi)\to(E', \Phi')$ der unterliegenden quadratischen Räume gibt mit $TU=U'$, $TV=V'$. Es ist klar, wie die direkte orthogonale Summe von zwei Räumen $\mathscr{E}_1$ und $\mathscr{E}_2$ definiert ist; wir bezeichen sie mit $\mathscr{E}_1\oplus^\perp\mathscr{E}_2$. Damit ist auch klar, was unter einer (direkten orthogonalen) Zerlegung eines Raumes bzw. unter einem unzerlegbaren Raum zu verstehen ist. Ist X ein Teilraum von E, so sei $rX=X\cap X^\perp$ und $dX=\dim_k X$. Statt $\mathscr{E}=(E, \Phi, U, V)$ schreiben wir meist nur (E, U, V); die Räume $\perp_1\mathscr{E}$, $\perp_2\mathscr{E}$ seien definiert durch $\perp_1\mathscr{E}=(E, U^\perp, V)$ und $\perp_2\mathscr{E}=(E, U, V^\perp)$.

1.2. Sei $\mathscr{E}=\oplus_i^\perp\mathscr{E}_i$ eine direkte orthogonale Zerlegung von $\mathscr{E}$ in unzerlegbare Summanden $\mathscr{E}_i$. Wir vergröbern die Zerlegung zu $\mathscr{E}=\mathscr{E}_D\oplus^\perp\mathscr{E}_S\oplus^\perp\mathscr{E}_T$ wie folgt: $\mathscr{E}_T$ bestehe aus denjenigen nichtentarteten Summanden $\mathscr{E}_i$, für welche gilt $E_i=U_i\oplus V_i=U_i^\perp\oplus V_i$, $rU_i=rV_i=0$; $\mathscr{E}_S$ bestehe aus denjenigen nichtentarteten Summanden $\mathscr{E}_i$, welche $E_i=U_i\oplus V_i=U_i^\perp\oplus V_i$, $rU_i+rV_i\neq 0$ erfüllen, und $\mathscr{E}_D$ bestehe aus allen übrigen Summanden. Es wird sich zeigen, dass die Summanden $\mathscr{E}_D$, $\mathscr{E}_S$, $\mathscr{E}_T$ durch diese Bedingungen bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt sind. In Abschnitt 2 bzw. 3 wird die Struktur der Summanden $\mathscr{E}_D$ bzw. $\mathscr{E}_S$ mittels geeigneter Funktoren D bzw. S untersucht. Eine Klassifikation dieser Räume ist möglich, sofern die quadratischen Formen über k klassifiziert werden können. Das Problem der Klassifikation der Räume $\mathscr{E}_T$ hingegen ist äquivalent zum Problem der Klassifikation von Paaren nichtentarteter quadratischer Formen auf einem Vektorraum U. Es ist bekannt (vgl. z. B. [2]), dass sich dieses Problem

---

Der Autor wurde während der Jahre 1976/77 teilweise vom Schweizerischen Nationalfonds unterstützt.

darauf reduzieren lässt, die quadratischen Formen über allen einfachen algebraischen Körpererweiterungen $k[\sigma]$ von k zu klassifizieren. Dies wird in Abschnitt 4 in einem begrifflichen Rahmen kurz skizziert ([2] arbeitet mit aufwendigen matrizentechnischen Methoden).

Der Autor dankt P. Gabriel für die Anregung zu dieser Arbeit.

§2. Reduktion auf den Fall $E = U \oplus V = U^{\perp} \oplus V$

2.1. Nebst den Räumen $\mathscr{E} = (E, U, V)$ betrachten wir auch Räume $\bar{\mathscr{E}} = (\bar{E}, \bar{U}, \bar{V}, \bar{W})$, wo $\bar{E}$ mit einer *nichtentarteten* Form $\bar{\Phi}$ versehen ist und $\bar{W} \subset \bar{U} \cap \bar{V}$. Man erhält einen Funktor

$$A : \mathscr{E} \mapsto A\mathscr{E} = \bar{\mathscr{E}} = (\bar{E}, \bar{U}, \bar{V}, \bar{W})$$

wenn man $\bar{E} = E/rE$ setzt und für $\bar{U}$, $\bar{V}$, $\bar{W}$ die Bilder von U, V, $U \cap V$ unter der kanonischen Projektion $E \to \bar{E}$ nimmt. Offensichtlich erhält A orthogonale Summen. Ein Raum $\mathscr{E}$ heisse A-sauber, wenn A keinen orthogonalen Summanden von $\mathscr{E}$ annulliert, d.h. wenn $\mathscr{E}$ keinen totalisotropen Summanden abspaltet. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$U \cap rE = 0 = V \cap rE, \quad rE \subset U + V. \tag{1}$$

LEMMA 1. *Der Funktor* A *induziert eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen von* A-*sauberen Räumen* $\mathscr{E}$ *und den Isomorphieklassen von Räumen* $\bar{\mathscr{E}}$.

Beweis. Zu jedem Raum $\bar{\mathscr{E}} = (\bar{E}, \bar{U}, \bar{V}, \bar{W})$ konstruieren wir $\bar{A}\bar{\mathscr{E}} = (E, U, V)$ wie folgt. Sei $R := \bar{U} \cap \bar{V}/\bar{W}$ und $E := \bar{E} \oplus^{\perp} R$, R totalisotrop, also $rE = R$. Wähle eine beliebige lineare Abbildung $f : \bar{V} \to R$, welche die kanonische Projektion $p : \bar{U} \cap \bar{V} \to R$ fortsetzt und definiere $U := \bar{U}$, $V := \Gamma(f) = \{x + f(x) \mid x \in \bar{V}\}$. Offenbar erfüllt $\bar{A}\bar{\mathscr{E}}$ die Bedingungen (1), ist also A-sauber, und es ist $A\bar{A}\bar{\mathscr{E}} = \bar{\mathscr{E}}$ Wir zeigen jetzt, dass der so konstruierte Raum $\bar{A}\bar{\mathscr{E}}$ bis auf Isomorphie unabhängig von der Wahl von f ist. Sei also f' eine weitere lineare Abbildung $\bar{V} \to R$, welche p fortsetzt, und $V' = \Gamma(f')$. Die Zuordnung $x + f(x) \mapsto x + f'(x)$ ist eine Isometrie $T_0 : V \to V'$, welche $V \cap U = V' \cap U = \bar{W}$ punktweise festlässt, mit $\Phi(z, T_0 y) = \Phi(z, y)$ für alle $z \in E$, $y \in V$. Man kann daher T_0 zunächst zu einer Isometrie $U + V \to U + V' = U + V$ erweitern, welche U punktweise festlässt, und schliesslich zu einer Isometrie $T : E \to E$ mit $TU = U$, $TV = V'$. Damit ist gezeigt, dass die Wahl von f keine Rolle spielt. Sei jetzt umgekehrt ein A-sauberer Raum $\mathscr{E}$ vorgelegt. Wir erhalten einen zu $A\mathscr{E}$ isomorphen Raum, indem wir E/rE mit einem Komplement $\bar{E}$ von rE in E identifizieren. Dabei sei $U \subset \bar{E}$, also $\bar{U} = U$, $\bar{V} = q(V)$, $\bar{W} = U \cap V$, wobei $q: E \to \bar{E}$ die Projektion längs rE ist. Wegen $V \cap rE = 0$ ist V von der Form $\Gamma(f)$, wo $f: \bar{V} \to rE$ eine lineare Abbildung mit $\ker(f) = U \cap V = \bar{W}$ ist. Wegen $rE \subset U + V$ ist $f(\bar{U} \cap \bar{V}) = rE$, so dass man also rE vermöge $f|\bar{U} \cap \bar{V}$ mit $R = \bar{U} \cap \bar{V}/\bar{W}$ identifizieren kann. Dies zeigt dass $\bar{A}A\mathscr{E} \cong \mathscr{E}$.

KOROLLAR. *In einer Zerlegung $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \oplus^{\perp} \mathscr{E}_1$ von $\mathscr{E}$ in einen totalisotropen Raum $\mathscr{E}_0$ und einen A-sauberen Raum $\mathscr{E}_1$ sind $\mathscr{E}_0$ und $\mathscr{E}_1$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.*

Es ist nämlich $\mathscr{E}_1 \cong \bar{A}A\mathscr{E}$, und $\mathscr{E}_0$ ist eindeutig bestimmt durch die Dimensionen von $U_0 \cap V_0$, U_0, V_0, E_0.

2.2. Man hat auch einen Funktor

$$B: \bar{\mathscr{E}} = (\bar{E}, \bar{U}, \bar{V}, \bar{W}) \mapsto B\bar{\mathscr{E}} = \mathscr{E} := (\bar{W}^{\perp}, \bar{V}^{\perp}, \bar{U}^{\perp}),$$

der ebenfalls mit orthogonalen Summen verträglich ist. Der Raum $\bar{\mathscr{E}}$ ist genau dann B-sauber, d.h. spaltet keinen Summanden ab, der von B annulliert wird, wenn $\bar{W}$ totalisotrop ist.

LEMMA 2. *Der Funktor B induziert eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen von B-sauberen Räumen $\bar{\mathscr{E}}$ und den Isomorphieklassen von Räumen $\mathscr{E}$.*

Beweis. Wir konstruieren wiederum zu jedem Raum $\mathscr{E}$ einen Raum $\bar{B}\mathscr{E}$: Sei $\mathscr{E} = (E, U, V)$ gegeben, $R := rE$. Wähle $\tilde{E} \subset E$ mit $E = \tilde{E} \oplus R$ und setze $\bar{E} := E \oplus R^* = \tilde{E} \oplus^{\perp} (R \oplus R^*)$. Dabei ist R^* der Dualraum von R, und die Form auf $R \oplus R^*$ die natürliche, d.h. R, R^* totalisotrop und $\bar{\Phi}(r, f) = f(r)$ für $r \in R$, $f \in R^*$. Schliesslich sei $\bar{U} := V^{\perp}$, $\bar{V} := U^{\perp}$, $\bar{W} := R$, wobei die Orthogonalräume in $\bar{E}$ gebildet werden. Offensichtlich ist $\bar{B}\mathscr{E} = (\bar{E}, \bar{U}, \bar{V}, \bar{W})$ ein B-sauberer Raum, mit $B\bar{B}\mathscr{E} = \mathscr{E}$. Wiederum hängt der Isomorphietyp von $\bar{B}\mathscr{E}$ nicht von der Wahl des Komplementes $\tilde{E}$ ab: Hat man noch ein weiteres Komplement $\tilde{E}'$, so sind zunächst die beiden Formen $\bar{\Phi}$ und $\bar{\Phi}'$ auf $\bar{E} = \tilde{E} \oplus R \oplus R^* = \tilde{E}' \oplus R \oplus R^*$ isometrisch, und wegen des Satzes von Witt kann man die Identität $\tilde{E} \oplus R \to \tilde{E}' \oplus R$ zu einer Isometrie $(\bar{E}, \bar{\Phi}) \to (\bar{E}, \bar{\Phi}')$ fortsetzen. Diese Isometrie lässt R fest und führt $V^{\perp}$ bzw. $U^{\perp}$ in $V^{\perp'}$ bzw. $U^{\perp'}$ über. Ist umgekehrt ein B-sauberer Raum $\bar{\mathscr{E}} = (\bar{E}, \bar{U}, \bar{V}, \bar{W})$ gegeben, also $\bar{W}$ totalisotrop, so ist $\bar{W} = r(\bar{W}^{\perp})$, und es gibt eine "Witt-Zerlegung" $\bar{E} = \tilde{E} \oplus^{\perp} Z$, wo $\bar{W}^{\perp} = \tilde{E} \oplus \bar{W}$ und $Z \cong \bar{W} \oplus \bar{W}^*$. Daher ist $\bar{B}B\bar{\mathscr{E}} \cong \bar{\mathscr{E}}$.

KOROLLAR. *In einer Zerlegung* $\bar{\mathscr{E}} = \bar{\mathscr{E}}_0 \oplus^\perp \bar{\mathscr{E}}_1$ *von* $\bar{\mathscr{E}}$ *in einen Raum* $\bar{\mathscr{E}}_0$ *vom Typ* $(\bar{E}_0, \bar{E}_0, \bar{E}_0, \bar{E}_0)$ *und einen B-sauberen Raum* $\bar{\mathscr{E}}_1$ *sind* $\bar{\mathscr{E}}_0$ *und* $\bar{\mathscr{E}}_1$ *bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.*

Denn es ist $\bar{\mathscr{E}}_1 = \bar{B}B\bar{\mathscr{E}}$, und $\bar{E}_0$ ist ein Komplement von $r\bar{W}$ in $\bar{W}$.

2.3. Wir betrachten jetzt den zusammengesetzten Funktor

$$D = BA : \mathscr{E} = (E, U, V) \mapsto D\mathscr{E} = (\overline{U \cap V^\perp}, \bar{V}^\perp, \bar{U}^\perp),$$

wobei die Orthogonalräume in $\bar{E} = E/rE$ zu bilden sind. Sei ferner $\bar{D} = \bar{A}\bar{B}$ (mit einem offensichtlichen Notationsmissbrauch). Für jedes $\lambda \in k$ definieren wir einen Raum $k(\lambda)$ durch

$$k(\lambda) = (k, 0, 0), \qquad \Phi_\lambda(1, 1) = \lambda.$$

Die von D annullierten unzerlegbaren Räume sind genau die Räume $k(0)$, $\perp_1 k(0)$, $\perp_2 k(0)$, $\perp_2 \perp_1 k(0)$ sowie $\perp_2 \perp_1 k(\lambda)$ für $\lambda \neq 0$. Jeder Raum $\mathscr{E}$ besitzt gemäss 2.1 und 2.2 eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Zerlegung

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}(1) \oplus^\perp \mathscr{E}' \tag{2}$$

in einen D-sauberen Raum $\mathscr{E}'$ $(\cong \bar{D}D\mathscr{E})$ und einen Raum $\mathscr{E}(1)$ mit $D\mathscr{E}(1) = 0$. Der Raum $\mathscr{E}(1)$ besitzt eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Zerlegung

$$\mathscr{E}(1) = k(0)^{n_1} \oplus^\perp (\perp_1 k(0))^{n_2} \oplus^\perp (\perp_2 k(0))^{n_3} \oplus^\perp (\perp_2 \perp_1 k(0))^{n_4} \oplus^\perp (E_0, E_0, E_0) \tag{3}$$

wobei E_0 nichtentartet ist. Für jedes $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, definieren wir

$$\mathscr{E}(p) := \bar{D}^{p-1}((D^{p-1}\mathscr{E})(1)),$$

was uns eine orthogonale Zerlegung

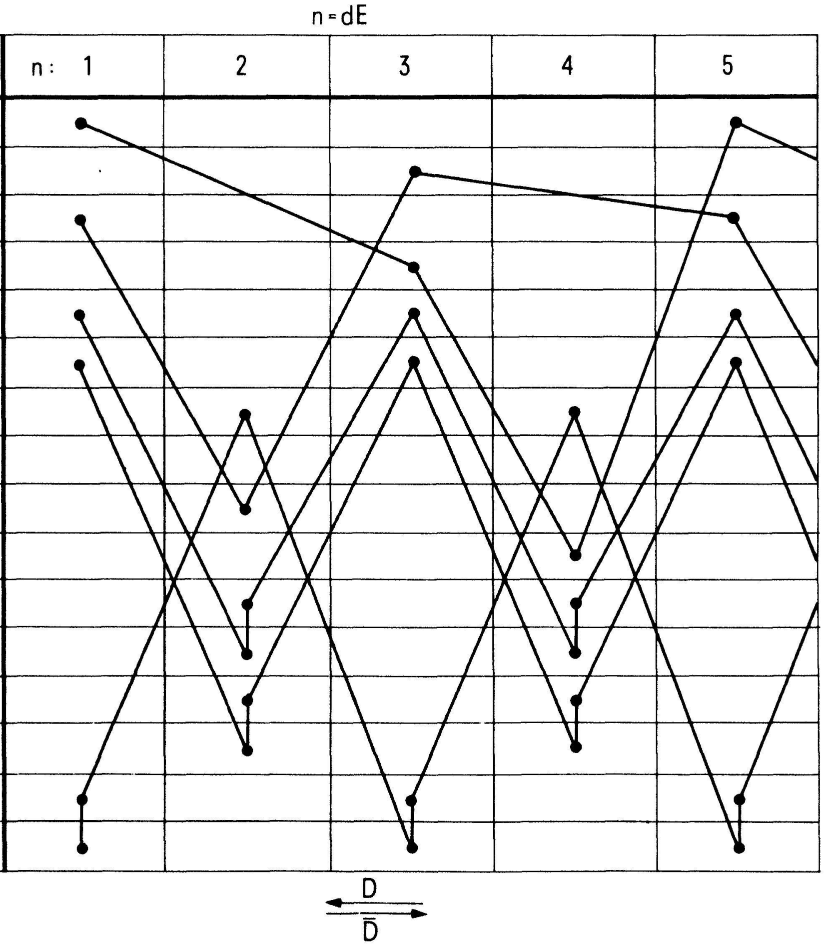
$$\mathscr{E} \cong \overset{\perp}{\bigoplus_{p \geq 1}} \mathscr{E}(p) \oplus^\perp \mathscr{E}(\infty) \tag{4}$$

liefert, in welcher $\mathscr{E}(p)$ ein D^{p-1}-sauberer Raum mit $D^p\mathscr{E}(p) = 0$ ist und $\mathscr{E}(\infty)$ für jedes p ein D^p-sauberer Raum. Die Räume $\mathscr{E}(p)$, $\mathscr{E}(\infty)$ sind durch diese Bedingungen bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. In einer orthogonalen Zerlegung $\mathscr{E} = \oplus_i^\perp \mathscr{E}_i$ von $\mathscr{E}$ in unzerlegbare Summanden $\mathscr{E}_i$ besteht $\mathscr{E}(p)$ genau aus denjenigen Summanden $\mathscr{E}_i$ mit $D^{p-1}\mathscr{E}_i \neq 0$ und $D^p\mathscr{E}_i = 0$.

Tabelle 1
Unzerlegbare $\mathscr{E}$ mit $D^p\mathscr{E}=0$

Dimension von

U	V	rE	U∩V	U^⊥∩V
$\frac{n-1}{2}$	$\frac{n-1}{2}$	1	0	0
$\frac{n-1}{2}$	$\frac{n-1}{2}$	1	0	1
$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n+1}{2}$	1	1	1
$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n+1}{2}$	1	1	0
$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n-1}{2}$	1	0	0
$\frac{n-1}{2}$	$\frac{n+1}{2}$	1	0	1
$\frac{n}{2}$	$\frac{n}{2}$	1	0	0
$\frac{n}{2}$	$\frac{n}{2}$	0	1	1
$\frac{n}{2}$	$\frac{n}{2}$	0	1	0
$\frac{n}{2}$	$\frac{n}{2}-1$	0	0	0
$\frac{n}{2}+1$	$\frac{n}{2}$	0	1	0
$\frac{n}{2}-1$	$\frac{n}{2}$	0	0	1
$\frac{n}{2}$	$\frac{n}{2}+1$	0	1	1
$\frac{n-1}{2}$	$\frac{n-1}{2}$	0	0	0
$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n+1}{2}$	0	1	0



2.4. Mit Hilfe von 2.1 und 2.2 lässt sich die Struktur der Räume $\mathscr{E}(p)$ in (4) bestimmen. Es genügt dabei, die "Bahnen" der in der Zerlegung (3) auftretenden unzerlegbaren Räume unter der Operation von $\bar{D}$ zu ermitteln. Das nachfolgende Lemma ergibt eine Uebersicht über die Dimensionen der auftretenden Räume, und die daraus abgeleitete Tabelle 1 versucht die Situation etwas zu veranschaulichen. Der *Defekt* $\partial\mathscr{E}$ eines Raumes $\mathscr{E}$ ist definiert durch

$$\partial\mathscr{E} := drE + d(U \cap V) + d(E/U+V)$$

LEMMA 3. *Sei $\mathscr{E}$ ein beliebiger Raum und $\bar{D}\mathscr{E}=(E', U', V')$.* Dann gilt

(a) $dE' = dE + drE + d(E/U+V)$, $dU' = dE + drE - dV$

(b) $drU' = drV$, $d(U'^{\perp} \cap V') = d(U^{\perp} \cap V)$

(c) $drE' = d(E/U+V)$, $d(U' \cap V') = drE$, $d(E'/U'+V') = d(U \cap V)$. *Insbesondere ist $\partial\bar{D}\mathscr{E} = \partial\mathscr{E}$. Weiter gilt für $\bar{D}^3\mathscr{E} = (E''', U''', V''')$*

(d) $dE''' = dE + 2\partial\mathscr{E}$, $dU''' = dU + \partial\mathscr{E}$.

Wir verzichten auf den einfachen Beweis dieser Formeln. Aus dem Lemma folgt sofort, dass der Raum $\mathscr{E}(\infty)=:(E_0, U_0, V_0)$ in (4) Defekt Null hat, d.h. also dass E_0 nichtentartet ist und $E_0=U_0\oplus V_0$.

2.5. Wir geben jetzt ohne Beweis die Gestalt der *nichtentarteten* Räume in den "$\bar{D}$-Bahnen" der Räume in (3). Die entarteten Räume lassen sich durch einfache Anwendung von D oder $\bar{D}$ aus diesen gewinnen, wie aus Tabelle 1 ersichtlich ist.

(a) Der Raum $\bar{D}^{3p-1}k(0)$ hat folgende Gestalt:
$E=k^{2p}\oplus^\perp k^{2p}=(ke_1\oplus\cdots\oplus ke_{2p})\oplus^\perp(k\bar{e}_1\oplus\cdots\oplus k\bar{e}_{2p})$ mit hyperbolischen Basen $e_1,\ldots,e_{2p}$ und $\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_{2p}$ von $k^{2p}\oplus^\perp 0$ und $0\oplus^\perp k^{2p}$, d.h. $\Phi(e_i, e_j)=\Phi(\bar{e}_i, \bar{e}_j)=\delta_{i+j,2p+1}$.

$$U=k^{2p}\oplus^\perp 0,\quad V=ke_1\oplus k(e_2+\bar{e}_1)\oplus k(e_3+\bar{e}_2)\oplus\cdots\oplus k(e_{2p}+\bar{e}_{2p-1}).$$

(b) Der Raum $\bar{D}^{3p+1}\perp_2\perp_1k(0)$ hat die Gestalt

$$E=k^2\oplus^\perp k^{2p}\oplus^\perp k^{2p}=(kx\oplus ky)\oplus^\perp(ke_1\oplus\cdots\oplus ke_{2p})\oplus^\perp(k\bar{e}_1\oplus\cdots\oplus k\bar{e}_{2p}),$$

wobei wieder die angegebenen Basen der drei orthogonalen Summanden hyperbolisch sein sollen.
$U=ke_1\oplus\cdots\oplus ke_p\oplus ka\oplus k\bar{e}_{p+1}\oplus k(e_{p+1}+\bar{e}_{p+2})\oplus\cdots\oplus k(e_{2p-1}+\bar{e}_{2p})$,
$V=k\bar{e}_1\oplus\cdots\oplus k\bar{e}_p\oplus ka\oplus ke_{p+1}\oplus k(\bar{e}_{p+1}+e_{p+2})\oplus\cdots\oplus k(\bar{e}_{2p-1}+e_{2p})$,
wobei $a=x+(e_p+\bar{e}_p)-(e_{p-1}+\bar{e}_{p-1})+(e_{p-2}+\bar{e}_{p-2})-\cdots\pm(e_1+\bar{e}_1)$.

(c) Der Raum $\bar{D}^{6p+1}\perp_1k(0)$ hat folgende Gestalt:
$E=k^{2(p+1)}\oplus^\perp k^{2p}=(ke_1\oplus\cdots\oplus ke_{2p+2})\oplus^\perp(k\bar{e}_1\oplus\cdots\oplus k\bar{e}_{2p})$ mit hyperbolischen Basen der beiden Summanden, $U=k^{2(p+1)}\oplus^\perp 0$, $V=k(\bar{e}_1+e_1)\oplus\cdots\oplus k(\bar{e}_{2p}+e_{2p})\oplus ke_{2p+1}$.
Es gilt $\bar{D}^{6p+2}\perp_1k(0)=(E, V, U^\perp)$.

(d) Der Raum $\bar{D}^{6p-2}\perp_1k(0)$ sieht so aus:
$E=k^{2p}\oplus^\perp k^{2p}=(ke_1\oplus\cdots\oplus ke_{2p})\oplus^\perp(k\bar{e}_1\oplus\cdots\oplus k\bar{e}_{2p})$ wie in a), $U=ke_1\oplus k(e_2+\bar{e}_1)\oplus k(e_3+\bar{e}_2)\oplus\cdots\oplus k(e_{2p}+\bar{e}_{2p-1})\oplus k\bar{e}_{2p}$, $V=0\oplus^\perp k^{2p}$.

Der Raum $\bar{D}^{6p-1}\perp_1k(0)$ ist: E wie oben, $U=k^{2p}\oplus^\perp 0$, $V=k(e_1+\bar{e}_2)\oplus\cdots\oplus k(e_{2p-1}+\bar{e}_{2p})$.

(e) Die entsprechenden Räume für $\perp_2k(0)$ erhält man aus c) und d) durch Vertauschen von U and V.

(*f*) Sei $\mathscr{E}=\perp_2\perp_1k(\lambda)$ mit $\lambda\neq 0$. Für $\bar{D}^{6p+1}\mathscr{E}$ erhält man:
$E=(k^p\oplus k\oplus k^p)\oplus^\perp k^{2p}=(ke_1\oplus\cdots\oplus ke_{2p+1})\oplus^\perp(k\bar{e}_1\oplus\cdots\oplus k\bar{e}_{2p})$,
$U=k(e_1+\bar{e}_1)\oplus\cdots\oplus k(e_{2p}+\bar{e}_{2p})$, $V=0\oplus^\perp k^{2p}$.
Dabei sind $(e_1,\ldots,e_p, e_{p+2},\ldots,e_{2p+1})$ und $(\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_{2p})$ hyperbolische Basen, ferner $\Phi(e_i, e_{p+1})=\lambda\delta_{i,p+1}$.

Der Raum $\bar{D}^{6p+4}\mathscr{E}$ hat die Gestalt
$E=(k^p\oplus k\oplus k^p)\oplus^\perp k^{2(p+1)}=(ke_1\oplus\cdots\oplus ke_{2p+1})\oplus^\perp(k\bar{e}_1\oplus\cdots\oplus k\bar{e}_{2p+2})$,
$U=k^p\oplus k\oplus k^p\oplus^\perp 0$, $V=k(e_1+\bar{e}_1)\oplus\cdots\oplus k(e_{2p+1}+\bar{e}_{2p+1})$,
$(e_1,\ldots,e_{2p+1})$ wie oben und $(\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_{2p+2})$ hyperbolisch.

2.6. Der Raum $\mathscr{E}(\infty)$ in (4) ist nichtentartet und erfüllt $D^2\mathscr{E}(\infty)=\mathscr{E}(\infty)$. Wir definieren

$$\mathscr{E}((p))=(\perp_1\mathscr{E}(\infty))(p) \quad \text{für} \quad p=1,2,\ldots,\infty \quad \text{und}$$
$$\mathscr{E}[p]=\perp_1\mathscr{E}((p)),$$

sodass also (wie in (4))

$$\mathscr{E}(\infty)=\overset{\perp}{\bigoplus_{p\geq 1}}\mathscr{E}[p]\overset{\perp}{\oplus}\mathscr{E}[\infty]. \tag{5}$$

Dabei ist jetzt $\mathscr{E}[\infty]$ ein nichtentarteter Raum $\mathscr{E}_0$ mit $E_0=U_0\oplus V_0=U_0^\perp\oplus V_0$. Aus 2.4 Tabelle 1 ist ersichtlich, dass die einzigen nichtentarteten unzerlegbaren Räume $\mathscr{E}$ mit $\partial\mathscr{E}\neq 0$ aber $\partial\perp_1\mathscr{E}=0$ in den $\bar{D}$-Bahnen von $k(0)$ und $\perp_2\perp_1 k(\lambda)$ für $\lambda\neq 0$ auftreten, sodass also gilt: Für $p\equiv 0 \mod 3$ hat $\mathscr{E}[p]$ die Form $\perp_1(\bar{D}^{p-1}k(0))^N$ mit $N\in\mathbb{N}$. Für $p\not\equiv 0 \mod 3$ ist $\mathscr{E}[p]$ orthogonale Summe von Räumen der Form $\perp_1\bar{D}^{p-1}(\perp_2\perp_1 k(\lambda))$ mit $\lambda\neq 0$ (siehe 2.5a) und f)).

2.7. Wir fassen unsere Resultate zusammen im

SATZ 1. *Der Raum $\mathscr{E}$ besitzt eine orthogonale Zerlegung*

$$\mathscr{E}=\mathscr{E}[\infty]\oplus^\perp\overset{\perp}{\bigoplus_{p\geq 1}}\mathscr{E}(p)\oplus^\perp\overset{\perp}{\bigoplus_{p\geq 1}}\mathscr{E}[p],$$

in welcher die Summanden $\mathscr{E}[\infty]$, $\mathscr{E}(p)$, $\mathscr{E}[p]$ durch die folgenden Bedingungen bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt sind:

(a) $\partial\mathscr{E}[\infty]=\partial\perp_1\mathscr{E}[\infty]=0$,
(b) $\mathscr{E}(p)\cong\bar{D}^{p-1}D^{p-1}\mathscr{E}(p)$, $D^p\mathscr{E}(p)=0$,
(c) $\mathscr{E}[p]\cong\perp_1\bar{D}^{p-1}D^{p-1}\perp_1\mathscr{E}[p]$, $D^p\perp_1\mathscr{E}[p]=0$, $\partial\mathscr{E}[p]=0$.

Die Struktur der Räume $\mathscr{E}(p)$ wird in 2.5, die der Räume $\mathscr{E}[p]$ in 2.6 beschrieben.

§3. Reduktion auf den Fall $drU = 0 = drV$

3.1. In diesem Abschnitt betrachten wir nur Räume $\mathscr{E}$ mit $\mathscr{E} = \mathscr{E}[\infty]$, also nichtentartete Räume $\mathscr{E}$ mit

$$E = U \oplus V = U^{\perp} \oplus V, \quad \text{also auch} \quad E = U \oplus V^{\perp} = U^{\perp} \oplus V^{\perp}. \tag{6}$$

Die Einschränkung von Φ auf $U \times V \subset E \times E$ induziert eine lineare Abbildung $\gamma: U \to V^*$, welche wegen (6) ein Isomorphismus ist. Ferner definiert Φ lineare Abbildungen $\alpha: U \to U^*$, $\tilde{\beta}: V \to V^*$. Wir setzen $\beta := \gamma^{-1}\tilde{\beta}\gamma^{*-1}: U^* \to U$ (wobei V^{**} mit V identifiziert wurde) und erhalten so ein Quadrupel $\mathscr{K}(\mathscr{E}) = (U, U^*, \alpha, \beta)$ mit $\alpha = \alpha^*$, $\beta = \beta^*$. Umgekehrt definiert ein solches Quadrupel $\mathscr{K} = (U, U^*, \alpha, \beta)$ einen Raum $\mathscr{E}(\mathscr{K})$ vermöge

$$\begin{aligned} &\mathscr{E}(\mathscr{K}) = (U \oplus U^*, U, U^*) \quad \text{mit der Form:} \\ &\Phi(u, u') = \langle \alpha u, u' \rangle \qquad (u, u' \in U) \\ &\Phi(f, f') = \langle f, \beta f' \rangle \qquad (f, f' \in U^*) \\ &\Phi(f, u) = \Phi(u, f) = \langle f, u \rangle \qquad (f \in U^*, u \in U), \end{aligned} \tag{7}$$

wobei $\langle , \rangle: U^* \times U \to k$ die kanonische Bilinearform ist. Offenbar erhält man eine Isomorphie $\mathscr{E} \cong \mathscr{E}(\mathscr{K}(\mathscr{E}))$, indem man V vermöge γ^* mit U^* indentifiziert. Ausserdem ist $\mathscr{K} = \mathscr{K}(\mathscr{E}(\mathscr{K}))$. Die Bedingung, dass $\mathscr{E}$ nichtentartet ist, lautet jetzt: $\beta\alpha - \mathbb{1}$ ist invertierbar.

3.2. Unter einer Vektorraumkrone, kurz Krone, verstehen wir ein Quadrupel $\mathscr{K} = (U, V, \xi, \eta)$, wo U, V (endlichdimensionale) k-Vektorräume und $\xi: U \to V$, $\eta: V \to U$ lineare Abbildungen sind. Es ist klar, wie Morphismen zwischen Kronen, direkte Summen von Kronen und Unterkronen von Kronen definiert sind. Die Krone $\mathscr{K}$ heisst selbstdual, wenn sie isomorph zu ihrer dualen Krone $\mathscr{K}^* = (V^*, U^*, \xi^*, \eta^*)$ ist. Die in 3.1 eingeführten Kronen $\mathscr{K} = \mathscr{K}(\mathscr{E})$ erfüllen sogar $\mathscr{K} = \mathscr{K}^*$ (nach der Identifikation $U^{**} = U$). Wir nennen solche Kronen *reflexiv*. Ein Isomorphismus $\mu: \mathscr{K} \to \mathscr{K}'$ zwischen reflexiven Kronen $\mathscr{K}, \mathscr{K}'$ induziert genau dann einen Isomorphismus $\mathscr{E}(\mathscr{K}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}(\mathscr{K}')$, wenn $\mu^*\mu = \mathbb{1}$. Ist $\mathscr{K}_1 = (U_1, V_1, \alpha, \beta)$ eine Unterkrone der reflexiven Krone $\mathscr{K}$, dann ist auch $\mathscr{K}_1^0 = (V_1^0, U_1^0, \alpha, \beta)$ eine Unterkrone von $\mathscr{K}$, wobei z.B. $U_1^0 = \{f \in U^* \mid f(U_1) = 0\}$. Falls $\mathscr{K} = \mathscr{K}_1 \oplus \mathscr{K}_1^0$, dann hat man eine orthogonale Zerlegung $\mathscr{E}(\mathscr{K}) = \mathscr{E}(\mathscr{K}_1) \oplus^{\perp} \mathscr{E}(\mathscr{K}_1^0)$. Man beachte, dass dabei $\mathscr{K}_1$ vermöge des kanonischen Isomorphismus $V_1 = (V_1^0)^0 \xrightarrow{\sim} U_1^*$ als reflexive Krone aufgefasst wird.

3.3. Die Nützlichkeit dieser Interpretation besteht in einer Anwendung des Austauschsatzes von Krull-Schmidt, ähnlich wie in [1]. Sei nämlich Σ eine selbstduale Menge von unzerlegbaren Kronen, d.h. Σ enthält mit jeder Krone auch ihre duale. Sei $\mathcal{K}$ eine reflexive Krone und $\mathcal{K} = \mathcal{K}_\Sigma \oplus \mathcal{K}_{\Sigma'}$ eine Zerlegung in Unterkronen, wo jeder unzerlegbare Summand von $\mathcal{K}_\Sigma$ isomorph ist zu einer Krone aus Σ, und wo $\mathcal{K}_{\Sigma'}$ keinen zu einer Krone aus Σ isomorphen Summanden abspaltet. Dann hat man wegen des Austauschsatzes auch eine Zerlegung $\mathcal{K} = \mathcal{K}_\Sigma \oplus \mathcal{K}_\Sigma^0$ (denn $\mathcal{K}_\Sigma^0 \cong \mathcal{K}_{\Sigma'}^* \cong \mathcal{K}_{\Sigma'}$), also nach 3.2 eine orthogonale Zerlegung

$$\mathscr{E}(\mathcal{K}) = \mathscr{E}(\mathcal{K}_\Sigma) \oplus^\perp \mathscr{E}(\mathcal{K}_\Sigma^0).$$

LEMMA 4. *Die Summanden $\mathscr{E}(\mathcal{K}_\Sigma)$, $\mathscr{E}(\mathcal{K}_\Sigma^0)$ sind durch Σ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.*

Beweis. Wir betrachten zwei Zerlegungen $\mathcal{K} = \mathcal{K}_\Sigma \oplus \mathcal{K}_\Sigma^0 = \mathcal{L}_\Sigma \oplus \mathcal{L}_\Sigma^0$ der obigen Art. Damit der Isomorphismus $\mu : \mathcal{K}_\Sigma \hookrightarrow \mathcal{K} \twoheadrightarrow \mathcal{L}_\Sigma$ einen Isomorphismus $\mathscr{E}(\mathcal{K}_\Sigma) \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}(\mathcal{L}_\Sigma)$ induzieren würde, müsste $\mu^*\mu = \mathbb{1}$ gelten (3.2). Nun ist aber μ^* der Morphismus $\mathcal{L}_\Sigma \hookrightarrow \mathcal{K} \twoheadrightarrow \mathcal{K}_\Sigma$, so dass also $\mu^*\mu = \mathbb{1} - \sigma$, wo $\sigma : \mathcal{K}_\Sigma \hookrightarrow \mathcal{K} \twoheadrightarrow \mathcal{L}_\Sigma^0 \hookrightarrow \mathcal{K} \twoheadrightarrow \mathcal{K}_\Sigma$ im Radikal des Endomorphismenringes von $\mathcal{K}_\Sigma$ liegt und somit nilpotent ist. Wir ersetzen μ durch $\mu_1 = \mu(\mathbb{1} + \alpha_1\sigma + \alpha_2\sigma^2 + \cdots)$ mit $\alpha_i \in k$ und erhalten $\mu_1^*\mu_1 = (\mathbb{1} - \sigma)(\mathbb{1} + \alpha_1\sigma + \cdots)^2$, so dass also die Gleichung $(\mathbb{1} + \alpha_1\sigma + \cdots)^2 = \mathbb{1} + \sigma + \sigma^2 + \cdots$ zu lösen ist. Das geht sicher, da ja char $k \neq 2$ ist.

3.4. Wir rufen jetzt die Klassifikation der unzerlegbaren Vektorraumkronen in Erinnerung. Jede solche ist isomorph zu einer der folgenden Kronen:

(I) $\mathcal{K}(\sigma) = (V, V, \mathbb{1}, \sigma)$, wo $\sigma : V \to V$ ein Automorphismus von V ist, bezüglich welchem V unzerlegbar ist.

(II) $\hat{\mathcal{K}}_p = (k^p, k^p, \mathbb{1}, \tau)$, wo τ durch die Jordanmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdot & & & \cdot & 0 \\ 1 & 0 & & & & \cdot \\ 0 & 1 & \cdot & & & \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & & \\ \cdot & & & 1 & 0 & \cdot \\ 0 & & & \cdot\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

definiert ist, $p \geq 1$.

(III) $\check{\mathcal{K}}_p = (k^p, k^p, \tau, \mathbb{1})$, τ wie in (II), $p \geq 1$.

(IV) $\mathcal{K}_p = (k^{p-1}, k^p, \xi, \eta)$, $p \geq 1$, $\xi(x_1, \ldots, x_{p-1}) = (0, x_1, \ldots, x_{p-1})$, $\eta(y_1, \ldots, y_p) = (y_1, \ldots, y_{p-1})$.

(IV)* $\mathcal{K}_p = (k^p, k^{p-1}, \eta, \xi)$, $p \geq 1$, ξ und η wie in (IV).

Die Kronen vom Typ (I), (II), (III) sind alle selbstdual, während $\overset{<}{\mathcal{K}}{}_p^* \cong \overset{>}{\mathcal{K}}_p$. Gemäss 3.3 hat man also eine orthogonale Zerlegung

$$\mathscr{E} = \mathop{\overset{\perp}{\bigoplus}}_{\sigma} \mathscr{E}(\sigma) \oplus^{\perp} \mathop{\overset{\perp}{\bigoplus}}_{p \geqslant 1} \mathscr{E}(\mathrm{II}_p) \oplus^{\perp} \mathop{\overset{\perp}{\bigoplus}}_{p \geqslant 1} \mathscr{E}(\mathrm{III}_p) \oplus^{\perp} \mathop{\overset{\perp}{\bigoplus}}_{p \geqslant 1} \mathscr{E}(\mathrm{IV}_p, \mathrm{IV}_p^*) \tag{8}$$

wobei die dem Summanden $\mathscr{E}(\mathrm{II}_p)$ bzw. $\mathscr{E}(\mathrm{III}_p)$ bzw. $\mathscr{E}(\mathrm{IV}_p, \mathrm{IV}_p^*)$ zugeordnete reflexive Krone isomorph ist zu $(\hat{\mathcal{K}}_p)^N$ bzw. $(\check{\mathcal{K}}_p)^N$ bzw. $(\overset{<}{\mathcal{K}}_p \oplus \overset{>}{\mathcal{K}}_p)^N$ für ein $N \in \mathbb{N}$. Die Räume vom Typ $\mathscr{E}(\sigma)$ werden im nächsten Abschnitt untersucht.

3.5. Sei von jetzt an $\mathcal{K} = (U, U^*, \alpha, \beta)$ eine reflexive Krone, isomorph zu $\hat{\mathcal{K}}_p^N$ bzw. $\check{\mathcal{K}}_p^N$ bzw. $(\overset{<}{\mathcal{K}}_p \oplus \overset{>}{\mathcal{K}}_p)^N$. Wir definieren

$$\begin{aligned} S\mathcal{K} &:= (\mathrm{im}\, \beta/\ker \alpha \cap \mathrm{im}\, \beta, \mathrm{im}\, \alpha/\ker \beta \cap \mathrm{im}\, \alpha, \alpha, \beta) \\ &= \mathrm{rad}\, \mathcal{K}/\mathrm{soc}\, \mathcal{K} \cap \mathrm{rad}\, \mathcal{K} \\ &(= \mathrm{rad}\, \mathcal{K}/\mathrm{soc}\, \mathcal{K} \text{ in den Fällen, wo } p \geqslant 2). \end{aligned} \tag{9}$$

Für $p = 1$ ist $S\mathcal{K} = 0$; in diesem Fall ist also $\mathcal{K}$ von der Form $(U, U^*, \alpha, 0)$ bzw. $(U, U^*, 0, \beta)$ bzw. $(U, U^*, 0, 0)$, wobei α, β invertierbar sind. Damit ist $\mathscr{E}(\mathcal{K})$ charakterisiert durch die α (bzw. β) entsprechende symmetrische nichtentartete Bilinearform auf U (bzw. U^*) bzw. die Dimension von U. Es ist klar, dass in diesen Fällen auch orthogonale Zerlegungen in zweidimensionale Räume existieren, d.h. Räume von der Form

(a) $E = ku \oplus kv$, $\Phi(u, u) = \lambda \neq 0$, $\Phi(u, v) = 1$, $\Phi(v, v) = 0$

(b) $E = ku \oplus kv$, $\Phi(u, u) = 0$, $\Phi(u, v) = 1$, $\Phi(v, v) = \lambda \neq 0$

(c) $E = ku \oplus kv$, $\Phi(u, u) = 0 = \Phi(v, v)$, $\Phi(u, v) = 1$.

3.6. Wir führen jetzt den Fall $p > 1$ auf den Fall $p = 1$ zurück. Sei also $p \geqslant 2$, $S\mathcal{K} = (\mathrm{im}\, \beta/\ker \alpha, \mathrm{im}\, \alpha/\ker \beta, \alpha, \beta)$. Wegen $\ker \beta = (\mathrm{im}\, \beta)^0$ und $\mathrm{im}\, \alpha = (\ker \alpha)^0$ hat man eine kanonische Isomorphie $\mathrm{im}\, \alpha/\ker \beta = (\ker \alpha)^0/(\mathrm{im}\, \beta)^o \to (\mathrm{im}\, \beta/\ker \alpha)^*$, sodass man also $S\mathcal{K}$ wieder als reflexive Krone auffassen kann. Ist $\mathcal{K}$ vom Typ $\hat{\mathcal{K}}_p$, dann $S\mathcal{K}$ vom Typ $\check{\mathcal{K}}_{p-1}$, und analog für die anderen Fälle.

SATZ 2. (i) *Sei* $\mathscr{E} \cong \mathscr{E}(\mathcal{K})$, *wobei* $\mathcal{K}$ *von einem der drei Typen* $\hat{\mathcal{K}}_p$, $\check{\mathcal{K}}_p$, $\overset{<}{\mathcal{K}}_p \oplus \overset{>}{\mathcal{K}}_p$ *ist* (d.h. $\mathcal{K} \cong \mathscr{L}^N$, *wo* $\mathscr{L}$ *eine dieser Kronen ist*). *Dann ist* $\mathscr{E}$ *eindeutig bestimmt durch* $\mathscr{E}(S^{p-1}\mathcal{K})$, *und* $\mathscr{E}(S^{p-1}\mathcal{K})$ *kann "beliebig"* (*wie in* 3.5) *vorgeschrieben werden.*

(ii) *Die unzerlegbaren Räume haben die folgende Gestalt:*

(a) *Typ* $\hat{\mathcal{K}}_p$: $E = U \oplus V = (ke_1 \oplus \cdots \oplus ke_p) \oplus (k\bar{e}_1 \oplus \cdots \oplus k\bar{e}_p)$. *Falls p gerade:* $\Phi(e_i, e_j) = \delta_{i+j,p+1}$, $\Phi(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \lambda\delta_{i+j,p}$, $\Phi(e_i, \bar{e}_j) = \delta_{ij}$.

Falls p ungerade: $\Phi(e_i, e_j) = \lambda\delta_{i+j,p+1}$, $\Phi(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \delta_{i+j,p}$, $\Phi(e_i, \bar{e}_j) = \delta_{ij}$.
In beiden Fällen $\lambda \neq 0$, *fest.*

(b) *Typ* $\check{\mathscr{H}}_p$: *analog.*

(c) *Typ* $\overset{\scriptscriptstyle <}{\mathscr{H}}_p \oplus \overset{\scriptscriptstyle >}{\mathscr{H}}_p$: $E = U \oplus V = (ke_1 \oplus \cdots \oplus ke_{2p-1}) \oplus (k\bar{e}_1 \oplus \cdots \oplus k\bar{e}_{2p-1})$,
$\Phi(e_i, e_j) = \delta_{i+j,2p+1}$, $\Phi(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \delta_{i+j,2p-1}$, $\Phi(e_i, \bar{e}_j) = \delta_{ij}$.

Beweis. (i) Für die Eindeutigkeit genügt es zu zeigen: Sind $\mathscr{H}, \mathscr{H}'$ von einem dieser Typen ($p \geqslant 2$), und ist $\mathscr{E}(S\mathscr{H}) \cong \mathscr{E}(S\mathscr{H}')$, dann ist auch $\mathscr{E}(\mathscr{H}) \cong \mathscr{E}(\mathscr{H}')$. Die Voraussetzung $\mathscr{E}(S\mathscr{H}) \cong \mathscr{E}(S\mathscr{H}')$ bedeutet, dass es einen Isomorphismus $\mu_0 : S\mathscr{H} \to S\mathscr{H}'$ gibt mit $\mu_0{}^*\mu_0 = \mathbb{1}$. Nun lässt sich aber $\mu_0 : \operatorname{rad} \mathscr{H}/\operatorname{soc} \mathscr{H} \to \operatorname{rad} \mathscr{H}'/\operatorname{soc} \mathscr{H}'$ zu einem Isomorphismus $\mu : \mathscr{H} \to \mathscr{H}'$ hochheben, und $\mu^*\mu - \mathbb{1} =: \sigma$ liegt im Radikal von $\operatorname{End}(\mathscr{H})$. Jetzt folgt die Behauptung wie in 3.3. Die Existenz von $\mathscr{H}$ zu vorgegebenem $\mathscr{E}(S^{p-1}\mathscr{H})$ folgt aus (ii) und 3.5. Der Beweis von (ii) ergibt sich durch Induktion, indem man S anwendet und die Eindeutigkeitsaussage in (i) benutzt.

KOROLLAR. *Ist* $\mathscr{E} = \mathscr{E}(\mathscr{H})$ *unzerlegbar, dann ist* $\mathscr{H}$ *isomorph zu einem* $\hat{\mathscr{H}}_p$, $\check{\mathscr{H}}_p$ *oder* $\overset{\scriptscriptstyle <}{\mathscr{H}}_p \oplus \overset{\scriptscriptstyle >}{\mathscr{H}}_p$.

§4. Paare quadratischer Formen

4.1. Nach Abspalten der in 3.5 und 3.6 beschriebenen Summanden haben wir es mit einem Raum $\mathscr{E} = \mathscr{E}(\mathscr{H})$ zu tun, wo α, β beide invertierbar sind. Ersetzen wir β durch β^{-1}, so erhalten wir das klassische Problem der Klassifizierung von Paaren nichtentarteter quadratischer Formen auf einem Vektorraum U. Da dieses Problem in der Literatur "gelöst" ist (vgl. z.B. [2]), begnügen wir uns damit, die Resultate zu skizzieren. Dabei betrachten wir statt β^{-1} den Automorphismus $\sigma := \beta\alpha$ von U und statt $\alpha : U \to U^*$ die entsprechende Form $\Phi : U \times U \to k$, d.h. wir betrachten Tripel (U, Φ, σ), wo Φ eine nichtentartete symmetrische Bilinearform auf U ist und σ ein bezüglich Φ selbstadjungierter Automorphismus von U.

4.2. Gemäss 3.4 (8) dürfen wir annehmen, dass (U, σ) als Modul über dem Polynomring $k[T]$ von der Form $U = (k[T]/(q^n))^N$ ist, wo q^n das Minimalpolynom von σ ist und q irreduzibel. Man kann dann auf $U/qU =: \bar{U}$ eine nichtentartete Form $\bar{\Phi}$ definieren durch $\bar{\Phi}(\bar{x}, \bar{y}) = \Phi(q^{n-1}x, y)$ (wo $U \to \bar{U}$, $x \mapsto \bar{x}$ die kanonische Projektion ist). Aehnlich wie in 3.6 zeigt man, dass der Isomorphietyp von (U, Φ, σ) bereits eindeutig festgelegt ist durch den Isomorphietyp von $(\bar{U}, \bar{\Phi}, \bar{\sigma})$. Dies führt uns zurück auf den Fall $n = 1$, wo wir also U als Vektorraum über dem Körper $K := k[\sigma] = k[T]/(q)$ auffassen können. Man wähle dann eine beliebige nichtverschwindende k-Linearform $f:K \to k$ und erhält eine Bijektion $\tilde{\Phi} \mapsto \Phi = f \circ \tilde{\Phi}$ von der Menge der symmetrischen K-bilinearen Formen $\tilde{\Phi}: U \times U \to K$ auf die Menge der symmetrischen k-bilinearen Formen $\Phi: U \times U \to k$, für welche σ selbstadjungiert ist. Die Isomorphieklasse von (U, Φ, σ) hängt nur ab von der Isometrieklasse von $(U, \tilde{\Phi})$. Damit ist unser Problem reduziert auf die Klassifikation der quadratischen Formen über allen einfachen algebraischen Körpererweiterungen $k[\sigma]$ von k.

LITERATUR

[1] P. GABRIEL, Degenerate bilinear forms, J. Algebra. 31 (1974), 67–72.

[2] J. WILLIAMSON, The equivalence of non-singular pencils of hermitean matrices in an arbitrary field, Amer. J. math. 57 (1935), 475–490.

Mathematisches Institut der Universität Zürich

Eingegangen den 3. August 1977