Le genre d'un groupe nilpotent avec opérateurs.

Comment. Math. Helvetici **53** (1978) 364–384 Birkhäuser Verlag, Basel

Le genre d'un groupe nilpotent avec opérateurs

CHARLES CASSIDY*

Au cours des dernières années, Pickel [13] et Mislin [12] ont introduit une notion de "genre" pour un groupe nilpotent de type fini N. De façon précise, le genre de N selon Pickel (que nous noterons ici $G_P(N)$) désigne l'ensemble des classes d'isomorphisme de groupes M tels que les quotients finis de M et N coïncident et tels que les rationalisations M_0 et N_0 de M et N respectivement soient isomorphes. Pickel démontre que cet ensemble est toujours fini. Par ailleurs, Mislin appelle le genre d'un tel groupe (désigné ici par $G_M(N)$) l'ensemble des classes d'isomorphisme de groupes M tels que $M_p \simeq N_p$ pour tout premier p (si G est un groupe nilpotent, on désigne par G_p la localisation de G en p, voir par exemple [2], [15] et [17]). Ces deux notions de genre quoique très voisines ne coïncident pas; Warfield [16] indique que si $M \in G_M(N)$ alors $M \in G_P(N)$; par ailleurs, Belfi et Wilkerson [1] ont montré que la réciproque n'est pas vraie en général; cependant, dans la catégorie $\mathcal{N}_0$ des groupes nilpotents de type fini dont le sous-groupe des commutateurs est fini, les deux notions de genre coïncident ([9], [16]).

Le travail de Mislin [12] a été essentiellement consacré à l'étude du genre dans la catégorie $\mathcal{N}_0$. Mislin y démontre que quoique $G_M(N)$ est toujours fini ($N \in \mathcal{N}_0$), il peut être arbitrairement grand; ses exemples sont remarquables. Il démontre aussi que le genre est étroitement relié à des phénomènes de non-simplification qui apparaissent autant en théorie des groupes qu'en topologie où le genre fut également introduit pour les H-espaces ([6], [7], [10], [11], [18]).

Le concept de genre est cependant intéressant en lui-même. En effet, l'idée de localiser un groupe (ou un espace topologique) en chaque premier p permet de remplacer ce groupe (ou cet espace) par plusieurs autres qui sont plus simples en un certain sens; il est alors parfois possible de résoudre un problème pour chacum de ces nouveaux objets et avec un peu de chance de remonter à l'objet de départ. Cependant la connaissance de tous les localisés d'un groupe N (ou d'un espace X)

*Ce travail fut partiellement réalisé alors que l'auteur était en congé de l'Université Laval et se trouvait à l'ETH de Zürich. L'auteur tient à remercier les professeurs P. J. Hilton et G. Mislin pour les nombreux conseils et les suggestions lors de la préparation de ce travail.

en chaque premier p n'entraîne pas en général la connaissance de N (ou de X) comme le montrent les exemples de Milnor (voir [14]) ou de Mislin [12]. Le genre au sens de Mislin est précisément une mesure de l'obstruction à une telle connaissance.

Un problème qui vient immédiatement à l'esprit est celui de la recherche d'invariants pour le genre; en topologie, par exemple, on peut voir que tous les groupes d'homologie et de cohomologie ainsi que les groupes d'homotopie de dimension au moins égale à 2 sont des invariants du genre alors que le groupe fondamental ainsi que l'anneau de cohomologie n'en sont pas; pour les groupes nilpotents, l'appartenance à la catégorie $\mathcal{N}_0$ est un invariant du genre; il en est de même du centre, du sous-groupe des commutateurs et de la classe de nilpotence pour les groupes dans la catégorie $\mathcal{N}_0$ (1a classe de nilpotence est même un invariant du genre dans la catégorie $\mathcal{N}$ de tous les groupes nilpotents). C'est notamment en découvrant les bons invariants du genre que Mislin est parvenu à obtenir tous ses résultats.

Il nous a semblé naturel d'introduire ici une définition du genre dans le cas d'un groupe nilpotent N sur lequel opère un groupe Q (nous dirons alors que N est un Q-groupe nilpotent); notre definition est une généralisation de celle de Mislin. On sait que si Q opère sur N, alors Q opère aussi sur tous les localisés N_p; l'action de Q sur N_p n'est que la localisation de l'action de Q sur N (propriété universelle de la localisation, voir [2]). Le problème général est le suivant: que pouvons-nous dire de N comme Q-groupe si nous connaissons tous ses localisés N_p comme Q-groupes? Il n'est pas difficile de voir qu'un Q-isomorphisme $\phi: N \to \bar{N}$ est complètement déterminé par tous ses localisés $\phi_p: N_p \to \bar{N}_p$; la situation est cependant complètement différente en ce qui concerne les objets eux-mêmes: un Q-isomorphisme $\phi: N \to \bar{N}$ détermine des Q-isomorphismes $\phi_p: N_p \to \bar{N}_p$ mais même s'il existe des Q-isomorphismes $\psi_p: N_p \to \bar{N}_p$ pour chaque premier p, on ne peut pas conclure en général qu'il existe un Q-isomorphisme $\psi: N \to \bar{N}$ induisant en même temps tous les ψ_p. Nous introduisons également par la suite une définition du genre pour les Q-groupes qui généralise la définition de Pickel. Dans les deux situations, notre étude se limite au cas où le Q-groupe N est nilpotent de type fini; il faudra d'ailleurs souvent imposer la même condition au groupe Q.

Dans la première partie, nous définissons le "Q-genre" (Mislin) de N que nous notons $QG_M(N)$. Ensuite, nous décrivons une famille de Q-groupes abéliens $\{N(p, m)\}$, où p est un premier impair fixe mais arbitraire et $m = 1, \ldots, (p-1)/2$, qui fournissent des exemples de non-trivialité de QG_M même si G_M est trivial pour les groupes sous-jacents; pour chaque premier p, les groupes $N(p, m)$ sont deux-à-deux isomorphes comme groupes mais non-isomorphes comme Q-groupes. Puis, en prenant les produits croisés $N(p, m) \rtimes Q$, nous obtenons des groupes nilpotents mais non-abéliens qui sont précisément les exemples de Mislin mais exprimés sous une forme beaucoup plus simple et explicite. Nous identifions ensuite certains invariants du Q-genre qui nous permettent d' obtenir par la suite pour le Q-genre tous les résultats obtenus dans [5] et [12] pour le genre de Mislin; là où Hilton et Mislin devaient supposer que le sous-groupe des commutateurs était fini, il faudra supposer dans notre situation qu'un certain sous-groupe noté $\Gamma_Q^2 N$ est fini. Toutefois, à l'aide des méthodes de [5] et [12], c'est seulement dans le cas où N est abélien que nous réussissons à munir le Q-genre d'une structure de groupe et à obtenir une borne supérieure pour le nombre de ses éléments.

Dans la deuxième partie, nous définissons le Q-genre (Pickel) de N que nous notons $QG_P(N)$ et nous indiquons que les résultats obtenus par Warfield en [16] restent valides avec essentiellement les mêmes démonstrations dans le cas du Q-genre. De plus, en étudiant attentivement l'une des démonstrations de Warfield, nous parvenons à déterminer une borne supérieure pour le nombre d'éléments dans le Q-genre des Q-groupes nilpotents (mais pas nécessairement abéliens) de type fini avec $\Gamma_Q^2 N$ fini; il ne nous a pas semblé possible par contre de munir d'une façon naturelle le Q-genre de tels Q-groupes d'une structure de groupe à l'aide des méthodes de Warfield.

1. Définition du Q-genre (Mislin) et quelques propriétés fondamentales

Etant donné un groupe Q, nous entendons par Q-groupe tout groupe N sur lequel Q opère, c'est-à-dire la donnée d'un groupe N et d'un homomorphisme $\omega : Q \to \operatorname{Aut} N$. Un Q-homomorphisme d'un Q-groupe M dans un Q-groupe N est un homomorphisme de groupes de M dans N qui commute avec les actions de Q sur M et N respectivement. Si nous disons qu'un Q groupe N est de type fini (resp. nilpotent), il faudra toujours comprendre que N est de type fini (resp. nilpotent) en tant que groupe.

Le genre de Mislin est un cas particulier de notre première définition; si l'action de Q sur N est triviale, c'est-à-dire si $\omega(Q) = \text{Identité}$, le Q-genre de N sera précisément le genre de Mislin.

DÉFINITION 1.1. Si N est un Q-groupe nilpotent de type fini, le *Q-genre de N* (Mislin) noté $QG_M(N)$ est la famille des classes d'isomorphisme de Q-groupes nilpotents de type fini M tels que M_p soit Q-isomorphe à N_p pour tour premier p.

Si un groupe Q opère sur un groupe N, on définit [8] la Q-suite centrale descendante de N comme suit:

$$\Gamma_Q^1 N = N, \qquad \Gamma_Q^{i+1} N = \operatorname{gr}\{uv^x u^{-1} v^{-1} \mid u \in N, v \in \Gamma_Q^i N, x \in Q\}, \qquad i \geq 1.$$

Si $\Gamma_Q^{c+1}N=\{1\}$ pour un certain $c\in\mathbf{N}$, on dit que l'action de Q sur N est nilpotente ou que Q opère sur N de façon nilpotente et on écrit $\mathrm{nil}_Q N\leq c$; dans ce cas, le groupe N est nécessairement nilpotent; si de plus, Q est nilpotent, on définit pour chaque p une action de Q_p sur N_p de la façon suivante: on considère l'extension scindée de Q par N qui est alors nilpotente puis, en localisant cette extension, on obtient une extension scindée de Q_p par N_p, ce qui nous permet de définir l'action de Q_p sur N_p. Il est facile de voir que si Q opère sur N de façon nilpotente et si $M\in QG_M(N)$, alors l'action de Q sur M est également nilpotente; cela est dû au fait que $\mathrm{nil}_Q N=\max_p \mathrm{nil}_Q N_p$ (voir [8]); de fait, en utilisant la convention $\mathrm{nil}_Q N=\infty$ si $\Gamma_Q^i N\neq\{1\}$ pour tout $i\in\mathbf{N}$, on voit que $\mathrm{nil}_Q N$ est un invariant du Q-genre. Tout cela suggère une autre définition du Q-genre pour de tels Q-groupes; on dit que $M\in QG'_M(N)$ si et seulement si $M_p\overset{Q_p}{\cong}N_p$ pour tout premier p; il découle immédiatement de [3] ((3.9) et théorème 3) ainsi que de ce qui précède que cette définition est équivalente à la définition 1.1 pour les Q-groupes sur lesquels l'action est nilpotente.

Nous décrivons maintenant pour chaque premier impair p fixe mais arbitraire une famille de Q-groupes qui montre que $QG_M(N)$ peut être non-trivial même si $G_M(N)$ est trivial. Tous les groupes considérés sont abéliens de type fini et on sait que le genre de Mislin est trivial pour de tels groupes ([4], proposition 3.3); les Q-groupes que nous décrivons sont deux-à-deux isomorphes comme groupes mais non Q-isomorphes; par contre, tous les localisés seront Q-isomorphes pour chaque premier. Puisque N est un Q-module, nous noterons l'opération dans N additivement mais même si Q est abélien, l'opération dans Q sera notée multiplicativement.

THÉORÈME 1.1 *Soit p un premier impair fixe mais arbitraire et soit $q=(p-1)/2$. Posons $N=\mathbf{Z}/p\oplus q\mathbf{Z}$; désignons par a un générateur de $\mathbf{Z}/p$ et par b_i un générateur de la i^{eme} composante de $q\mathbf{Z}$. Posons $Q=\mathbf{Z}^q$, le produit direct de q copies de $\mathbf{Z}$ et désignons par x_i un générateur de la i^{eme} composante de $\mathbf{Z}^q$. Pour chaque $m=1,\ldots,q$ nous définissons une action de Q sur N de la façon suivante*:

$$x_i a = a \qquad i=1,\ldots,q$$

$$x_i b_j = b_j \qquad i\neq j$$

$$x_i b_i = a+b_i \qquad i=l,\ldots,q-l$$

$$x_q b_q = ma+b_q.$$

Nous désignons par $N(p,m)$ le Q-groupe ainsi obtenu. Pour un p donné et pour m et n différents et tels que $1\leq m,\ n\leq q$, les Q-groupes $N(p,m)$ et $N(p,n)$ ne sont pas Q-isomorphes mais leurs localisés le sont en chaque premier.

Preuve. Démontrer que $N(p, m)$ et $N(p, n)$ ont les mêmes localisés en tant que Q-groupes pour chaque premier ne présente aucune difficulté. Nous nous bornerons donc à montrer que les groupes isomorphes $N(p, m)$ et $N(p, n)$ ne peuvent pas être Q-isomorphes pour $m \neq n$. Supposons qu'il existe un Q-isomorphisme $\alpha : N(p, m) \to N(p, n)$. Alors nécessairement $\alpha(a) = la$, où $1 \leq l \leq p-1$; par ailleurs, $\alpha(b_i) = \lambda_i a + \sum_{j=1}^{q} \mu_{ij} b_j$, où $\mu_{ij} \in \mathbf{Z}$. Puisque nous voulons que α soit un Q-isomorphisme, il faut que chacune des relations $\alpha(x_i b_j) = x_i \,.\, \alpha(b_j)$ soit satisfaite pour $i, j = 1, \ldots, q$. Un calcul explicite nous montre que cela entraîne que

$$\begin{aligned} &\mu_{ij} \equiv 0 (\operatorname{mod} p) && \text{pour } i \neq j \\ &\mu_{ii} \equiv l (\operatorname{mod} p) && \text{pour } i = 1, 2, \ldots, q-1 \\ &\mu_{qq} \equiv \frac{lm}{n} (\operatorname{mod} p) && \end{aligned}$$

Le déterminant de la matrice (μ_{ij}) est donc $l^q m/n \ (\operatorname{mod} p)$. Or l'application induite par α sur le quotient $q\mathbf{Z}$ devant être un automorphisme de ce groupe, il faut que le déterminant de (μ_{ij}) soit égal à ± 1. Cependant, m et n sont différents et tous deux compris entre 1 et q; le quotient m/n est donc différent de ± 1 $(\operatorname{mod} p)$ alors que $l^q = l^{(p-1)/2}$ est égal à ± 1 $(\operatorname{mod} p)$ d'après le théorème de Fermat. Le déterminant $l^q m/n$ ne peut donc pas être égal à ± 1 $(\operatorname{mod} p)$ et α ne peut pas être un Q-isomorphisme.

Un des aspects intéressants de nos exemples est qu'il est possible de récupérer de façon explicite les exemples de Mislin en prenant les produits croisés $M(p, m) = N(p, m) \rtimes Q$ pour les différentes valeurs de m. Rappelons que pour chaque premier p fixe mais arbitraire, Mislin définit un groupe $N(p)$ de la façon suivante: si $\{x_i, y_i \mid 1 \leq i \leq (p-1)/2\} \subset H^1(\mathbf{Z}^{p-1}; \mathbf{Z}/p)$ désigne la réduction mod p *d'une base de* $H^1(\mathbf{Z}^{p-1}; \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}^{p-1}$, alors $N(p)$ est défini par l'extension

$$E(p) : \mathbf{Z}/p \rightarrowtail N(p) \twoheadrightarrow \mathbf{Z}^{p-1}$$

où $[E(p)] = \sum x_i y_i \in H^2(\mathbf{Z}^{p-1}; \mathbf{Z}/p)$. Il démontre alors que $|G_M(N(p))| = (p-1)/2 = q$ et qu'un ensemble de représentants pour les éléments de $G_M(N(p))$ est donné par la famille $\{F_m(p)\}$ définie par

$$E_m(p) : \mathbf{Z}/p \rightarrowtail F_m(p) \twoheadrightarrow \mathbf{Z}^{p-1}$$

où $[E_m(p)]^q = m[E(p)]^q$, $m = 1, \ldots, q$; remarquons qu'ici $m[E(p)]^q \in H^{p-1}(\mathbf{Z}^{p-1}; \mathbf{Z}/p) = \mathbf{Z}/p$ où $\mathbf{Z}/p$ est engendré par $[E(p)]^q$.

THÉORÈME 1.2. *Soit p un premier impair fixe mais arbitraire. La famille des* *groupes* $\{M(p, m)\}$, $m = 1, \ldots, q$, *fournit des exemples de non-trivialité du genre de Mislin. Plus précisément, on peut choisir dans les exemples de Mislin* $N(p) = M(p, 1)$ *et* $F_m(p) = M(p, m)$ (*voir* [12], *théorème* 3).

Preuve. Notons d'abord que si Q opère de façon nilpotente sur les groupes nilpotents M et N, alors $M_r \overset{Q}{\simeq} N_r$ pour tout premier r entraîne $(M \rtimes Q)_r \simeq (N \rtimes Q)_r$ pour tout r. En effet, on a clairement $M_r \rtimes Q \simeq N_r \rtimes Q$ pour tout r et puisque l'action est nilpotente $M_r \rtimes Q_r \simeq N_r \rtimes Q_r$ pour tout r (voir [3]); par ailleurs, on sait que $M_r \rtimes Q_r \simeq (M \rtimes Q)_r$ et il s'ensuit que $(M \rtimes Q)_r \simeq (N \rtimes Q)_r$ pour tout r.

D'autre part, il est clair que chaque groupe $M(p, m)$ est une extension centrale $\mathbf{Z}/p \xrightarrow{i} M(p, m) \xrightarrow{\pi} (p-1)\mathbf{Z}$. Soit s une section de π définie par

$$s\left(\sum_{i=1}^{q} \lambda_i b_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j x_j\right) = \left(\sum_{i=1}^{q} \lambda_i b_i, \prod_{j=1}^{q} x_j^{\mu_j}\right);$$

un 2-cocycle représentant cette extension est obtenu en considérant l'ensemble de facteurs $f(X, Y) = s(x + Y)s(X)^{-1}s(Y)^{-1}$.
Explicitement,

$$\begin{aligned}
f&\left(\sum_{i=1}^{q} \lambda_i b_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j x_j, \sum_{i=1}^{q} \lambda_i' b_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j' x_j\right)\\
&= \left(\sum_{i=1}^{q} (\lambda_i + \lambda_i') b_i, \prod_{j=1}^{q} x_j^{(\mu_j + \mu_j')}\right)\left(\sum_{i=1}^{q} \lambda_i b_i, \prod_{j=1}^{q} x_j^{\mu_j}\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{q} \lambda_i' b_i, \prod_{j=1}^{q} x_j^{\mu_j'}\right)^{-1}\\
&= \left(\sum_{i=1}^{q} (\lambda_i + \lambda_i') b_i, \prod_{j=1}^{q} x_j^{(\mu_j + \mu_j')}\right)\left(\sum_{k=1}^{q-1} \mu_k \lambda_k a + m\mu_q \lambda_q a - \sum_{i=1}^{q} \lambda_i b_i, \prod_{j=1}^{q} x_j^{-\mu_j}\right)\\
&\quad \times \left(\sum_{k=1}^{q-1} \mu_k' \lambda_k' a + m\mu_q' \lambda_q' a - \sum_{i=1}^{q} \lambda_i' b_i, \prod_{j=1}^{q} x_j^{-\mu_j'}\right)\\
&= \left(\sum_{i=1}^{q} (\lambda_i + \lambda_i') b_i, \sum_{j=1}^{q} (\mu_j + \mu_j') x_j\right)\\
&\quad \times \left(\sum_{k=1}^{q-1} (\mu_k \lambda_k + \mu_k' \lambda_k' + \mu_k \lambda_k') a + m(\mu_q \lambda_q + \mu_q' \lambda_q + \mu_q \lambda_q') a\right.\\
&\quad \left. - \sum_{i=1}^{q} (\lambda_i + \lambda_i') b_i, \prod_{j=1}^{q} x_j^{-(\mu_j + \mu_j')}\right)\\
&= \left(-\sum_{k=1}^{q-1} \mu_k' \lambda_k a - m\mu_q' \lambda_q a, 1\right)
\end{aligned}$$

le tout se faisant mod p dans $\mathbf{Z}/p$. Ces calculs montrent qu'à un signe près le groupe $M(p, 1)$ est le terme central de l'extension $E(p)$ de Mislin ([12], théorème 3).

Pour montrer que la famille $\{M(p, m)\}$ nous donne précisément les exemples de Mislin, il suffit (voir [12], page 116) de montrer que $[M(p, m)]^q = m[M(p, 1)]^q$ où $[M(p, m)]^q$ représente le "cup-produit" $[M(p, m)] \cup \cdots \cup [M(p, m)]$ pris q fois de $[M(p, m)] \in H^2(\mathbf{Z}^{p-1}; \mathbf{Z}/p)$ par lui-même. D'après les calculs précédents et les propriétés du "cup-produit", on voit tout de suite qu'un 2-cocycle représentant à la fois $[M(p, m)]^q$ et $m[M(p, 1)]^q$ est donné par

$$f(X, Y, \ldots, X, Y) = m(\mu_1'\lambda_1\mu_2'\lambda_2 \ldots \mu_q'\lambda_q)a$$

d'où le théorème.

Si Q opère sur N, nous avons indiqué précédemment que la Q-suite centrale descendante de N est définie par:

$$\Gamma_Q^1 N = N, \qquad \Gamma_Q^{i+1} N = \mathrm{gr}\,\{uv^x u^{-1} v^{-1} \mid u \in N, v \in \Gamma_Q^i N, \quad x \in Q\}, \qquad i \geq 1.$$

De même, on définit la Q-suite centrale ascendante (voir [8]) par:

$$\nu_Q^0 N = \{1\}, \qquad \nu_Q^1 N = \{u \in Z(N) \mid u^x = u, \text{ pour tout } x \in Q\},$$
$$\nu_Q^{i+1} N / \nu_Q^i N = \nu_Q^1 (N/\nu_Q^i N), \qquad i \geq 1.$$

Si Q opère trivialement sur N, on retrouve les suites centrales habituelles. Nous disons que l'action de Q sur N est nilpotente si $\Gamma_Q^{c+1} N = \{1\}$ pour un certain $c \in \mathbf{N}$ ou de façon équivalente si $\nu_Q^c N = N$; cette équivalence se démontre au moyen de l'inclusion $\Gamma_Q^i N \leq \nu_Q^{c+1-i} N$ pour $i = 1, \ldots, c$ que l'on peut obtenir par induction sur i.

DÉFINITION 1.2. La catégorie des Q-groupes pour lesquels $\Gamma_Q^2 N$ est fini, avec N et Q nilpotents de type fini, est désignée ici par $\mathcal{Q}_0$.

DÉFINITION 1.3. Nous désignons par $\mathcal{M}_0$ la sous-catégorie de $\mathcal{Q}_0$ formée des Q-groupes pour lesquels $\Gamma_Q^2 N$ est fini, N abélien de type fini et Q nilpotent de type fini.

Remarquons que les exemples $N(p, m)$ décrits plus haut appartiennent à la catégorie $\mathcal{M}_0$; de plus, dans ce cas, Q opère sur $N(p, m)$ de façon nilpotente.

LEMME 1.1. *Pour $N \in \mathcal{Q}_0$, le quotient $N/\nu_Q^1 N$ est un Q-groupe fini et le nombre de Hirsch $h(N)$ de N (où N est considéré comme groupe) est donné par*

$$h(N) = \text{rang } \nu_Q^1 N = \dim_{\mathbb{Q}} N_0$$

Preuve. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \nu_Q^1 N & \rightarrowtail & N & \twoheadrightarrow & N/\nu_Q^1 N \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ (\nu_Q^1 N)_0 & \rightarrowtail & N_0 & \twoheadrightarrow & (N/\nu_Q^1 N)_0 \end{array}$$

où les lignes sont exactes. D'après [8], théorème 3.5, $(\nu_Q^1 N)_0 = \nu_Q^1(N_0)$ puisque N et Q sont de type fini. Par aileurs, N_0 est abélien et Q opère trivialement sur N_0 puisque $\Gamma_Q^2 N$ est fini et donc contenu dans ker $(N \to N_0)$; on a donc $\nu_Q^1(N_0) = N_0$, d'où $(\nu_Q^1 N)_0 = N_0$, puis $(N/\nu_Q^1 N)_0 = \{1\}$. On en déduit que $N/\nu_Q^1 N$ est fini et la conclusion s'ensuit.

LEMME 1.2. *Soient $N \in \mathcal{Q}_0$, $M \in QG_M(N)$. Alors $\Gamma_Q^2 M \simeq \Gamma_Q^2 N$.*

Preuve. On sait ([8], corollaire 3.3) que pour tout Q-groupe nilpotent N, l'application canonique $\Gamma_Q^2 N \to \Gamma_Q^2(N_p)$ p-localise. On a donc $\Gamma_Q^2(N_p) \overset{Q}{\cong} (\Gamma_Q^2 N)_p$ mais puisque $\Gamma_Q^2 N$ est fini, $\Gamma_Q^2 N \overset{Q}{\cong} \prod_p (\Gamma_Q^2 N)_p$, l'action respectant les composantes. Si $M \in QG_M(N)$, alors $\Gamma_Q^2(M_p) \overset{Q}{\cong} \Gamma_Q^2(N_p)$; en particulier $\Gamma_Q^2 M$ est fini et $\Gamma_Q^2 M \overset{Q}{\cong} \prod_p \Gamma_Q^2(M_p) \overset{Q}{\cong} \prod_p \Gamma_Q^2(N_p) \overset{Q}{\cong} \Gamma_Q^2 N$.

DEFINITION 1.4. Soit N un Q-groupe nilpotent avec $T(\nu_Q^1 N)$ d'exposant fini (pour tout groupe nilpotent G, $T(G)$ désignera le sous-groupe de torsion de G). Nous posons:

$$F\nu_Q^1 N = \{x \in \nu_Q^1 N \mid \exists y \in \nu_Q^1 N \quad \text{avec} \quad y^k = x, k = \exp T(\nu_Q^1 N)\}.$$

Remarque. $F\nu_Q^1 N$ est abélien sans torsion et muni d'une Q-action triviale; si $N \in \mathcal{Q}_0$, $F\nu_Q^1 N$ est abélien libre de rang $h(N)$ d'après le lemme 1.1; si N et Q sont de type fini, on voit que l'application canonique $N \to N_p$ envoie $F\nu_Q^1 N$ dans $F\nu_Q^1(N_p)$; $(F\nu_Q^1 N)_p$ peut donc être identifié à un sous-groupe de $F\nu_Q^1(N_p)$.

LEMME 1.3. *Si N et Q sont de type fini, N nilpotent, alors l'application* *canonique* $(F\nu_Q^1N)_p \to F\nu_Q^1(N_p)$ *est un isomorphisme* (*remarquons que tous les groupes sont clairement des* Q*-groupes sur lesquels l'action est triviale*).

Preuve. On remarque d'abord que si

$$X=\{x\in \nu_Q^1(N_p)\mid \exists y\in \nu_Q^1(N_p) \quad \text{avec} \quad y^k=x,\, k=\exp T(\nu_Q^1N)\}$$

alors il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} T(\nu_Q^1N) \arrow[r, tail] \arrow[d, "\alpha"] & \nu_Q^1N \arrow[r, two heads, "k"] \arrow[d, "\beta"] & F\nu_Q^1N \arrow[d, "\gamma"] \\ T(\nu_Q^1(N_p)) \arrow[r, tail] & \nu_Q^1(N_p) \arrow[r, two heads, "k"] & X \end{tikzcd}$$

où les lignes sont exactes. Puisque N et Q sont de type fini, α et β p-localisent [8] et alors γ p-localise [2]. On a clairement $X=F\nu_Q^1(N_p)$ puisque, $T(\nu_Q^1N)$ étant fini, $\exp T(\nu_Q^1(N_p))$ est précisément la p-composante de $\exp T(\nu_Q^1N)$ et que $\nu_Q^1(N_p)$ est p-local.

DEFINTION 1.5. Pour $N\in\mathcal{Q}_0$, nous posons $S(N)=N/F\nu_Q^1N$ muni de sa structure évidente de Q-groupe.

LEMME 1.4. *Soient* $N\in\mathcal{Q}_0, M\in QG_M(N)$. *Alors* $F\nu_Q^1M\simeq F\nu_Q^1N$ *et* $S(M)\overset{Q}{\cong} S(N)$.

Il suffit de reprendre mutatis mutandis la preuve du lemme 4 de [12] en vérifiant bien que tous les homomorphismes sont des Q-homomorphismes.

Soit maintenant $N\in\mathcal{M}_0$. Si $M\in QG_M(N)$, nous savons ([4], proposition 3.3) que M est abélien comme groupe et les résultats précédents montrent que M se laisse représenter comme extension de modules sur l'anneau de groupe $\mathbf{Z}(Q)$; à M correspond une extension $E:\mathbf{Z}^h \rightarrowtail M \twoheadrightarrow S$ où $f(\mathbf{Z}^h)=F\nu_Q^1M$, $h=h(N)=h(M)$ et $S\overset{Q}{\cong} S(N)\overset{Q}{\cong} S(M)$. On sait que ces extensions sont classifiées par le groupe $\mathrm{Ext}_Q^1(S;\mathbf{Z}^h)$; cependant, la classe de Q-isomorphisme de M ne détermine pas uniquement un élément de $\mathrm{Ext}_Q^1(S;\mathbf{Z}^h)$ mais seulement une classe double dans $\mathrm{Aut}_Q\mathbf{Z}^h\backslash\mathrm{Ext}_Q^1(S;\mathbf{Z}^h)/\mathrm{Aut}_QS$, l'ensemble des classes d'équivalence dans $\mathrm{Ext}_Q^1(S;\mathrm{Z}^h)$ produites en considérant l'action à gauche de $\mathrm{Aut}_Q\mathbf{Z}^h$ et l'action à droite de Aut_QS sur le groupe $Ext_Q^1(S;\mathbf{Z}^h)$. En effet, Si les modules M et M' sont isomorphes et représentés par des extensions $\mathbf{Z}^h \overset{f}{\rightarrowtail} M \twoheadrightarrow S$ et $\mathrm{Z}^h \overset{g}{\rightarrowtail} M' \twoheadrightarrow S$ telles que $f(\mathrm{Z}^h)=F\nu_Q^1M$ et $g(\mathbf{Z}^h)=F\nu_Q^1M'$ alors clairement ces deux extensions appartiennent à la même classe double. Réciproquement, si une extension $\mathbf{Z}^h \overset{k}{\rightarrowtail} L \twoheadrightarrow S$ appartient à la même classe double que $\mathbf{Z}^h \overset{f}{\rightarrowtail} M \twoheadrightarrow S$, il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{Z}^h & \overset{f}{\rightarrowtail} & M & \twoheadrightarrow & S \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{Z}^h & \overset{k}{\rightarrowtail} & L & \twoheadrightarrow & S \end{array}$$

d'où $M \overset{Q}{\cong} L$ et $k(\mathbf{Z}^h) = F\nu_Q^1 L$. On peut donc conclure comme dans [12] qu'il existe une bijection entre $QG_M(N)$ et un sous-ensemble de l'ensemble des classes doubles de $\mathrm{Ext}_Q^1(S; \mathbf{Z}^h)$ pour $N \in \mathcal{M}_0$. Puisque S est fini, que $\mathbf{Z}^h$ est de présentation finie et que $\mathrm{Ext}_Q^1(—, —)$ est additif, on peut affirmer que si l'on pose $t = \exp S$ alors t est aussi un exposant de $\mathrm{Ext}_Q^1(S; \mathbf{Z}^h)$. Nous verrons plus loin comment t est relié à N dans le cas où Q opère sur N de façon nilpotente. Désignons par T l'ensemble des premiers p tels que p divise t; puisque $\mathrm{Ext}_Q^1(S; \mathbf{Z}^h)$ ne contient que des éléments de torsion dont l'ordre a tous ses facteurs premiers dans T, $\mathrm{Ext}_Q^1(S; \mathbf{Z}^h) \simeq \mathrm{Ext}_Q^1(S; \mathbf{Z}^h)^T$ (la localisation de $\mathrm{Ext}_Q^1(S; \mathbf{Z}^h)$ par rapport à l'ensemble des premiers T, voir [2]); puisque Q est nilpotent de type fini, le lemme suivant nous montre que $\mathrm{Ext}_Q^1(\mathrm{S}; \mathbf{Z}^h) \simeq \mathrm{Ext}_Q^1(S; \mathbf{Z}_\mathrm{T}^\mathrm{h})$.

LEMME 1.5. *Soient A et B des Q-modules où A est de type fini et soit Q un groupe nilpotent de type fini. Alors si T est un ensemble de premiers,*

$$\mathrm{Ext}_Q^i(A, B)_T = \mathrm{Ext}_Q^i(A, B_T), \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

et en particulier $\mathrm{Hom}_Q(A, B)_T = \mathrm{Hom}_Q(A, B_T)$.

Preuve. Pour tout groupe Q-libre de type fini F, on a $\mathrm{Hom}_Q(F, B)_T = \mathrm{Hom}_Q(F, B_T)$ prusque $\mathrm{Hom}_Q(F, C) = \bigoplus_{\text{finie}} C$ (il y a autant de copies de C que le nombre d'éléments dans une Q-base de F).

Considérons maintenant une résolution Q-libre

$$\cdots \to F_{i+l} \to F_i \to F_{i-l} \to \cdots \to F_0 \twoheadrightarrow A$$

où les F_i peuvent être choisis de type fini puisque si Q est nilpotent de type fini, alors $\mathbf{Z}(Q)$ est noethérien. On a la suite

$$\cdots \leftarrow \mathrm{Hom}_Q(F_{i+l}, B) \leftarrow \mathrm{Hom}_Q(F_i, B) \leftarrow \mathrm{Hom}_Q(F_{i-1}, B) \leftarrow \cdots$$

et en localisant en T,

$$\cdots \leftarrow \mathrm{Hom}_Q(F_{i+1}, B)_T \leftarrow \mathrm{Hom}_Q(F_i, B)_T \leftarrow \mathrm{Hom}_Q(F_{i-1}, B)_T \leftarrow \cdots$$

Le résultat découle de l'égalité $\mathrm{Hom}_Q(F, B)_T = \mathrm{Hom}_Q(F, B_T)$ et du fait que la localisation est exacte.

Posons maintenant $\tilde{S} = \mathrm{Aut}_Q S$, $G = GL(h, \mathbf{Z}) = \mathrm{Aut}_Q \mathbf{Z}^h$ et $G(T) = GL(h, \mathbf{Z}_T)$; puisque $\mathrm{Ext}^1_Q(S; \mathbf{Z}^h) \simeq \mathrm{Ext}^1_Q(S; \mathbf{Z}^h_T)$, il s'ensuit que ce groupe est muni d'une action à gauche de $G(T)$ en plus de l'action à gauche de G et de l'action à droite de $\tilde{S}$. L'injection $GL(h, \mathbf{Z}) \to GL(h, \mathbf{Z}_T)$ induit une surjection

$$\begin{aligned} \sigma : G\backslash \mathrm{Ext}^1_Q(S; \mathbf{Z}^h)/\tilde{S} &\twoheadrightarrow G(T)\backslash \mathrm{Ext}^1_Q(S; \mathbf{Z}^h)/\tilde{S} \\ : G[E]\tilde{S} &\mapsto G(T)[E]\tilde{S}. \end{aligned}$$

THÉORÉME 1.3. *Soit* $N \in \mathcal{M}_0$ *et soit* $E : \mathbf{Z}^h \rightarrowtail N \twoheadrightarrow S$ *une extension de Q-groupes où* $f(\mathbf{Z}^h) = F\nu^1_Q N$ *et* $S \overset{Q}{\cong} S(N)$. *Alors il existe une bijection naturelle*

$$\theta : \sigma^{-1}(G(T)[E]\tilde{S}) \to QG_M(N).$$

Preuve. Il n'y a plus maintenant qu'à reprendre la preuve du théorème 4 de [12] en remplaçant $H^2(Q; \mathbf{Z}^h)$ par $\mathrm{Ext}^1_Q(S; \mathbf{Z}^h)$; toutes les remarques que nous avons faites à propos de $\mathrm{Ext}^1_Q(S; \mathbf{Z}^h)$ permettent de le faire.

Remarque. On peut déduire (comme dans [12]) de la preuve du théorème précédent que pour $N \in \mathcal{M}_0$, il existe une surjection de coker $(GL(h, \mathbf{Z}) \to GL(h, \mathbf{Z}/t)) \simeq (\mathbf{Z}/t)^*/\{\pm 1\}$ sur $QG_M(N)$ que nous noterons

$$\delta(N) : (\mathbf{Z}/t)^*/\{\pm 1\} \to QG_M(N).$$

COROLLAIRE 1.1. *Si* $N \in \mathcal{M}_0$ *et si* $t = \exp S(N)$, *alors* $|QG_M(N)| \leq \phi(t)/2$ *où* ϕ *est fonction d'Euler.*

Les exemples décrits dans le théorème 1.1 montrent que cette borne peut être atteinte; en effet, on a alors $|QG_M(N(p, m))| = (p-1)/2$.

Nous donnerons dans la deuxième partie une borne pour $|QG_M(N)|$ dans le cas où $N \in \mathcal{Q}_0$ mais auparavant nous allons indiquer quelques résultats qui nous permettront de munir $QG_M(N)$ d'une structure de groupe si $N \in \mathcal{M}_0$ et si Q opère sur N de façon nilpotente.

LEMME 1.6. *Supposons que* $N \in \mathcal{M}_0$, $t = \exp S(N)$ *et* Q *opère sur* N *de façon nilpotente. Alors* p *divise* t *si et seulement si* N *a de la* p*-torsion.*

La preuve est comme celle du lemme 1.1 de [5]; il faut cependant utiliser le résultat suivant:

LEMME 1.7. *Si* A *est abélien et si* Q *opère sur* A *de façon nilpotente, alors* A *a de la* p*-torsion entraîne que* A^Q *en a aussi* (*ici* $A^Q = \{a \in A \mid xa = a$, *pour tout* $x \in Q\}$),

Preuve. Remarquons que si A est abélien, la Q-suite centrale ascendante est tout simplement:

$$\nu_Q^0 A = \{0\}, \qquad \nu_Q^1 A = A^Q, \qquad \nu_Q^{i+1} A / \nu_Q^i A = (A/\nu_Q^1 A)^Q, \qquad i \geq 1.$$

Supposons que A a de la p-torsion mais que $\nu_Q^1 A = A^Q$ n'en a pas; désignons par j le plus petit entier naturel i tel que $\nu_Q^i A$ a de la p-torsion; par hypothèse, on a au moins $j \geq 2$. Il existe donc un élément de p-torsion $a_0 \in \nu_Q^j A$ et comme $a_0 \notin A^Q$, il existe $x \in Q$ tel que $xa_0 - a_0 \neq 0$. Puisque $a \in \nu_Q^j A \mapsto (xa - a) \in \nu_Q^{j-1} A$ est un homomorphisme, $xa_0 - a_0$ est de p-torsion, ce qui est une contradiction.

Dans le cas où Q opère sur N de façon nilpotente, on voit que T défini plus haut est précisément l'ensemble des premiers p tels que N (et non seulement $S(N)$) a de la p-torsion. Cette remarque permet de démontrer le lemme suivant (voir [5], lemme 1.2):

LEMME 1.8. *Soit* $N \in \mathcal{M}_0$ *avec* Q *opérant sur* N *de façon nilpotente. Soit* $f: N \to M$ *un* Q*-homomorphisme qui est aussi une* T*-équivalence* (*voir dans* [2] *la notion de* T*-isomorphisme*). *Alors,*

i) $f(F\nu_Q^1 N) \subset F\nu_Q^1 N$ *et* dét f (*le déterminant de* $f|_{F\nu_Q^1 N}$) *qui est défini à un signe près est relativement premier à* T.

ii) f *est une injection et* $f(N)$ *est un* Q*-sous-groupe de* M.

Ce résultat permet de définir les applications suivantes:

DÉFINITION 1.6. Soit T-Equ(N) l'ensemble des Q-homomorphismes $\phi: M \to L$ qui sont des T-équivalences, où $M, L \in QG_M(N)$, $N \in \mathcal{M}_0$, Q opère sur N de façon nilpotente. On définit

$\alpha: T\text{-Equ}(N) \to (\mathbf{Z}/t)^*/\{\pm 1\}$

par

$$\phi \mapsto \text{classe résiduelle mod } t \text{ de } |\text{dét } \phi|.$$

De plus, si T-Aut N est l'ensemble des Q-endomorphismes de N qui sont des T-équivalences, on obtient par restriction une application

$$\theta : T\text{-Aut}(N) \to (\mathbf{Z}/t)^*/\{\pm 1\}.$$

Il est immédiat que α (donc θ) est multiplicative et en particulier im θ est un sous-groupe de $(\mathbf{Z}/t)^*/\{\pm 1\}$.

En revenant à la surjection $\delta(N) : (\mathbf{Z}/t)^*/\{\pm 1\} \twoheadrightarrow QG_M(N)$, nous voyons que si $\bar{a} \in (\mathbf{Z}/t)^*/\{\pm 1\}$ et si $a \in \mathbf{Z}$ est un représentant de $\bar{a}$, nous pouvons décrire $\delta(N)$ explicitement comme suit: dire que $\delta(N)\bar{a} = M$, c'est dire qu'il existe un diagramme commutatif dans la catégorie des Q-modules avec les lignes exactes

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Z}^h \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "A"] & N \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\phi"] & S(N) \arrow[d, "B", "\simeq"'] \\ \mathbf{Z}^h \arrow[r, tail, "g"] & M \arrow[r, two heads] & S(M) \end{tikzcd} \tag{1}$$

avec $|\text{dét } A| = a$, $B : S(N) \xrightarrow{Q} S(M)$, $f(\mathbf{Z}^h) = Fv_Q^1 N$, $g(\mathbf{Z}^h) = Fv_Q^1 M$. Puisque a est premier à T, A est une T-équivalence donc ϕ aussi. On remarque que réciproquement si un diagramme tel que (1) existe avec B un Q-isomorphisme, $f(\mathbf{Z}^h) = Fv_Q^1 N$ et ϕ une T-équivalence, alors $M \in QG_M(N)$, $g(\mathbf{Z}^h) = Fv_Q^1 M$ et $\delta(N)\ \bar{a} = M$.

On peut alors démontrer ([5], théorème 1.4):

THÉORÈME 1.4. *La suite T-Aut $(N) \xrightarrow{\theta} (Z/t)^*/\{\pm 1\} \xrightarrow{(N)} QG_M(N)$ est exacte en ce sens que $\delta(N)x = \delta(N)y$ si et seulement si $x = y\theta(\phi)$ pour un certain $\phi \in T$-Aut (N).*

Ce résultat permet d'introduire une structure de groupe abélien sur $QG_M(N)$, $N \in \mathcal{M}_0$, Q opérant sur N de façon nilpotente.

DÉFINITION 1.7. Soit $N \in \mathcal{M}_0$ où Q opère sur N de façon nilpotente. Le groupe abélien $QG_M(N)$ est l'ensemble $QG_M(N)$ muni de la seule structure de groupe telle que $\delta(N) = (\mathbf{Z}/t)^*/\{\pm 1\} \twoheadrightarrow QG_M(N)$ soit un homomorphisme.

C'est un groupe abélien dont l'élément neutre est N. On montre facilement que $QG_M(N(p, m))$ est le groupe cyclique d'orde $(p-1)/2$. Une analyse plus fine de la structure de groupe sur $QG_M(N)$ permet d'obtenir le résultat suivant:

THÉORÈME 1.5. *Supposons $N \in \mathcal{M}_0$, $M \in QG_M(N)$. Q opère sur N de façon nilpotente, alors $QG_M(N) \simeq QG_M(M)$ comme groupes abéliens.*

Esquisse de la preuve. Si X, Y, $M \in QG_M(N)$, on dit qu'une paire d'homomorphismes $\phi : X \to M$, $\psi : Y \to M$ est *exhaustive* si ϕ ou ψ est une T-équivalence et si pour chaque premier p, ϕ ou ψ est une p-équivalence. On montre que de telles paires existent toujours à l'intérieur d'un même Q-genre et que l'égalité $X+Y=Z+M$ dans $QG_M(N)$ est équivalente à l'existence d'un carré bicartésien avec (ϕ, ψ) exhaustive

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "\phi"] \\ Y \arrow[r, "\psi"] & M \end{tikzcd}$$

dans la catégorie des Q-modules où Q opère de façon nilpotente; on peut même montrer qu'en prenant le "pull-back" de ϕ et ψ, le carré ainsi obtenu est de fait bicartésien. Les détails de la preuve se déduisent aisément de [5]. On vérifie alors tout de suite que l'application $\tau : QG_M(M) \to QG_M(N)$ définie par $\tau(X) = X\text{-}M$ est un homomorphisme, donc un isomorphisme puisque τ est clairement bijective.

Tous les autres résultats de [12] se laissent démontrer facilement si on remplace $\mathcal{N}_0$ par $\mathcal{Q}_0$; cependant, lorsque Mislin utilise le groupe $H^2(Q; \mathbf{Z}^h)$, il faut nous restreindre à la catégorie $\mathcal{M}_0$ et utiliser $\mathrm{Ext}^1_Q\ (S; \mathbf{Z}^h)$; dans la deuxième partie, nous verrons que plusieurs de ces résultats se démontrent sans utiliser le groupe $\mathrm{Ext}^1_Q(S; \mathbf{Z}^h)$ et seront valides dans $\mathcal{Q}_0$ et non seulement dans $\mathcal{M}_0$. Nous nous bornerons donc à démontrer le théorème suivant dans $\mathcal{M}_0$ pour lequel nous n'avons pas exactement l'équivalent dans $\mathcal{Q}_0$ grâce aux méthodes de la deuxième partie. Nous donnerons les détails de la démonstration puisque nous n'utilisons évidemment pas le théorème de Künneth comme le fait Mislin.

THÉORÈME 1.6. *Soit $N \in \mathcal{M}_0$ avec Q opérant sur N de façon nilpotente. Soit $\{M_i\}$ $i=1, \ldots, k$ une famille de Q-groupes appartenant à $QG_M(N)$. Supposons que pour chaque $i=1, \ldots, k$, $\delta(N)\bar{a}_i = M_i$. Alors $\delta(\bigoplus_{i=1}^k N_i)\ (\prod_{i=1}^k \ddot{a}_i) = \bigoplus_{i=1}^k M_i$ (chaque N_i étant une copie de N). En particulier, le diagramme suivant est* *commutatif:*

$$\begin{array}{ccc}
(\mathbf{Z}/t)^*/\{\pm 1\} & \xrightarrow{\delta(N)} & QG_M(N) \\
\Big\downarrow {\scriptstyle (\text{élévation à la puissance } k)} & & \Big\downarrow {\scriptstyle \left(L \mapsto \bigoplus_{i=1}^{k} L_i\right)} \\
(\mathbf{Z}/t)^*/\{\pm 1\} & \xrightarrow{\delta \bigoplus_{i=1}^{k} N_i} & QG_M\left(\bigoplus_{i=1}^{k} N_i\right)
\end{array}$$

où chaque L_i est une copie de L.

Preuve. Notons d'abord que l'énoncé a un sens parce que si $t = \exp S(N)$ alors $t = \exp S(\bigoplus_{i=1}^{k} N_i)$ également. Rappelons ensuite que $\delta(N)$ est défini comme suit: si $\bar{a}_i \in (Z/t)^*\{\pm 1\}$ est représenté par $a_i \in Z$, dire que $\delta(N)\bar{a}_i = M_i$, c'est dire qu'il existe un diagramme commutatif dans la catégorie des Q-modules avec les lignes exactes

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{Z}^h & \overset{f}{\rightarrowtail} & N & \twoheadrightarrow & S(N) \\
\Big\downarrow {\scriptstyle A_i} & & \Big\downarrow {\scriptstyle \phi_i} & & {\scriptstyle \underset{=}{Q}}\Big\downarrow {\scriptstyle B_i} \\
\mathbf{Z}^h & \overset{g_i}{\rightarrowtail} & M_i & \twoheadrightarrow & S(M_i)
\end{array} \tag{2}$$

où $|\det A_i| = |a_i|$, B_i: $S(N) \overset{Q}{\underset{=}{\rightarrow}} S(M_i)$, $f(\mathbf{Z}^h) = Fv_Q^1 N$, $g_i(\mathbf{Z}^h) = Fv_Q^1 M_i$ et ϕ_i une T-équivalence. On a alors clairement un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{Z}^{hk} & \overset{f'}{\rightarrowtail} & \bigoplus_{i=1}^{k} N_i & \twoheadrightarrow & S\left(\bigoplus_{i=1}^{k} N_i\right) \\
\Big\downarrow {\scriptstyle A'} & & \Big\downarrow {\scriptstyle \phi_i} & & {\scriptstyle \underset{=}{Q}}\Big\downarrow {\scriptstyle B'} \\
\mathbf{Z}^{hk} & \overset{g'}{\rightarrowtail} & \bigoplus_{i=1}^{k} M_i & \twoheadrightarrow & S\left(\bigoplus_{i=1}^{k} M_i\right)
\end{array} \tag{3}$$

où chaque flèche de (3) est la somme directe des flèches correspondantes dans (2) pour $i = 1, \ldots, k$. Puisque $B' : S(\bigoplus_{i=1}^{k} N_i) \xrightarrow{Q} S(\bigoplus_{i=1}^{k} M_i)$, $f'(\mathbf{Z}^{hk}) = Fv_Q^1(\bigoplus_{i=1}^{k} N_i)$ et ϕ' est une T-équivalence, il découle des remarques précédant le théorème 1.4 que

$$\delta\left(\bigoplus_{i=1}^{k} N_i\right)(|\,\text{dét}\, A'\,|\,(\text{mod}\, t)) = \bigoplus_{i=1}^{k} M_i.$$

La conclusion s'ensuit puisque $|\text{dét}\, A'|(\text{mod}\, t) = \prod_{i=1}^{k} \bar{a}_i$.

Nous en déduisons enfin l'analogue de [12], théorème 6, sous la forme suivante:

THÉORÈME 1.7. *Soit* $N \in \mathcal{M}_0$ *avec* Q *opérant sur* N *de façon nilpotente et soient* $\{M_i\}$, $\{M_i'\}$ $(i=1,\ldots,k)$ *deux familles de* Q*-groupes appartenant à* $QG_M(N)$. *Soient* $\bar{a}_i$ *et* $\bar{a}_i'$ *tels que* $\delta(N)\bar{a}_i = M_i$ *et* $\delta(N)\bar{a}_i' = M_i'$. *Alors si* $\prod_{i=1}^k \bar{a}_i = \prod_{i=1}^k \bar{a}_i$, $\bigoplus_{i=1}^k M_i \overset{Q}{\simeq} \bigoplus_{i=1}^k M_1'$. *En particulier, si* $t = \exp S(N)$, *alors*

$$\bigoplus_{\phi(t)/2} M \overset{Q}{\simeq} \bigoplus_{\phi(t)/2} N \quad \textit{pour tout} \quad M \in QG_M(N).$$

Preuve

$$\bigoplus_{i=1}^k M_i = \delta(\bigoplus_k N)\left(\prod_{i=1}^k \bar{a}_i\right) = \delta(\bigoplus_k N)\left(\prod_{i=1}^k \bar{a}_i'\right) = \bigoplus_{i=1}^k M_i'$$

d'après le théorème 1.6.

Remarque. En prenant $M_i = N(p, m_i)$ et $M_i' = N(p, m_i')$, on a $\bigoplus_{i=1}^k M_i \overset{Q}{\simeq} \bigoplus_{i=1}^k M_i'$ si $\prod_{i=1}^k m_i = \pm\prod_{i=1}^k m_i' \pmod p$. Par exemple, $N(13,3) \oplus N(13,4) \overset{Q}{\simeq} N(13,2) \oplus N(13,6)$ et $N(7,2) \oplus N(7,3) \overset{Q}{\simeq} N(7,1) \oplus N(7,1)$.

2. Définition du Q-genre (Pickel), comparison avec le Q-genre (Mislin), non-simplification dans les Q-groupes

DÉFINITION 2.1. Pour tout Q-groupe G, nous désignons par $QF(G)$ l'ensemble des classes de Q-isomorphisme des quotients finis de G par ses Q-sous-groupes normaux.

Nous désignons par $G^{(n)}$ le Q-sous-groupe normal de G engendré par les $n^{\text{ièmes}}$ puissances d'éléments de G. Le produit cartésien de n copies de G muni de l'action habituelle est noté G^n (Rappelons qu'habituellement G^n désigne plutôt ce que nous avons désigné ici par $G^{(n)}$). Nous posons $\hat{G} = \varprojlim G/G^{(n)}$; c'est un Q-groupe qui coincide avec le complété profini si G est nilpotent de type fini; il suffit en effet de remarquer que si G est nilpotent de type fini, alors $G/G^{(n)}$ est fini pour tout $n \in \mathbf{N}$.

THÉORÈME 2.1. *Soient* G *et* H *des* Q*-groupes tels que pour tout* $n \in \mathbf{N}$, $G/G^{(n)}$ *et* $H/H^{(n)}$ *soient finis. Supposons de plus que l'une des trois conditions* *suivantes est satisfaite:*

i) $QF(G) = QF(H)$

ii) $G^n \overset{Q}{\cong} H^n$ *pour un certain* $n \in \mathbf{N}$

iii) *il existe un* Q*-groupe* L *tel que* $L/L^{(n)}$ *soit fini pour tout* $n \in \mathbf{N}$ *et tel que* $G \times L \overset{Q}{\cong} H \times L$.

Alors $\hat{G} \overset{Q}{\cong} \hat{H}$.

Preuve. On n'a qu'à reprendre la preuve de Warfield ([44], lemme 1 et théorème 1) en constatant que les homomorphismes sont des Q-homomorphismes et en utilisant le théorème de Krull-Schmidt pour les groupes à opérateurs.

Remarque. Etant donné une extension $T \overset{i}{\rightarrowtail} N \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} F$ de Q-groupes et une section s de π, on peut déterminer les applications suivantes (qui en général ne sont pas des homomorphismes):

a) $\alpha : F \to \operatorname{Aut} T$ définie par $\alpha(a) = (b \mapsto s(a)^{-1} b s(a))$

b) $f : F \times F \to T$ définie par $f(a, b) = \overline{s(ab)}s(a)^{-1}s(b)^{-1}$

c) $\lambda : F \times Q \to T$ définie par $\lambda(a, x) = \overline{x \cdot s(a)}s(a)^{-1}$

Ces applications caractérisent l'extension N en ce sens qu'il est possible de reconstruire N connaissant α, f et λ.

LEMME 2.1. *Soit* $N \in \mathcal{Q}_0$. *Nous pouvons considérer* N *comme une extension* $T \overset{i}{\rightarrowtail} N \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} F$ *où* T *est fini et* F *abélien libre de rang fini sur lequel* Q *opère trivialement. De plus, il existe un* Q*-sous-groupe* D *et* N *tel que* i) $D \subset \nu_Q^1 N$, ii) D *est abélien libre de même rang que* F, iii) *l'homomorphisme* $\pi : N \to F$ *restreint à* D *est un* Q*-isomorphisme de* D *sur* $F^{(k)}$ *pour un certain* $k \in \mathbf{N}$ *et en particulier il existe un* Q*-homomorphisme* $\mu : F^{(k)} \to N$ *tel que* $\mu(F^{(k)}) = D$ *et* $\pi\mu = \mathrm{Id}_{F^{(k)}}$.

Enfin, il existe une section σ *de* π *telle que les applications* α, f *et* λ *définies par rapport à cette section ne dépendent que de la classe modulo* $F^{(k)}$ *dans* F *et non du représentant; de façon précise, si* $a, b \in F$, $m, n \in F^{(k)}$, $x \in Q$, *alors* $\alpha(am) = \alpha(a)$, $f(am, bn) = f(a, b)$ *et* $\lambda(am, x) = \lambda(a, x)$. *On peut donc regarder* α, f *et* λ *comme définies sur* $F/F^{(k)}$, $F/F^{(k)} \times F/F^{(k)}$ *et* $F/F^{(k)} \times Q$ *respectivement.*

Preuve. La démonstration de ce résultat demande au plus quelques précisions. On prend pour T le Q-sous-groupe formé des éléments de torsion de N. Puisque $\Gamma_Q^2 N$ est fini donc contenu dans $T(N)$, $F = N/T$ possède les propriétés voulues. Si on pose $D = F\nu_Q^1 N$, on a rang D = rang F d'après le lemme 1.1 et la remarque suivant la définition 1.4; il est clair que D satisfait i), ii) et iii) où $k = \exp T(\nu_Q^1 N)$.

Enfin, posons $\sigma=\mu$ sur $F^{(k)}$ et définissons σ arbitrairement sur un ensemble U de représentants des éléments de $F/F^{(k)}$ dans F. Ensuite, σ peut être prolongée à F par $\sigma(um)=\sigma(u)\sigma(m)$ pour $u\in U$ et $m\in F^{(k)}$. Il est facile de voir que α, f et λ définies par rapport à σ ont les propriétés voulues. On a par exemple $\lambda(um,x)=\lambda(u,x)$; en effet, $\lambda(um,x)=\overline{x\cdot\sigma(um)\sigma(um)^{-1}}=\overline{x\cdot\sigma(u)}\;\overline{x\cdot\sigma(m)}\;\sigma(m)^{-1}\sigma(u)^{-1}=\overline{x\cdot\sigma(u)}\sigma(u)^{-1}$ (puisque $\sigma(m)\in D$, alors $\overline{x\cdot\sigma(m)}=\sigma(m)$).

DÉFINITION 2.2. Donnons-nous deux extensions (4) $T\rightarrowtail N\twoheadrightarrow F$ et (5) $T'\rightarrowtail N'\twoheadrightarrow F'$ avec $N, N'\in\mathcal{Q}_0$, $T\overset{Q}{\simeq}T'$, $F\simeq F'$ comme dans le lemme précédent. On sait qu'il existe $k\in\mathbf{N}$ tel que la Q-structure de N' peut être définie par des applications $\alpha':F'/(F')^{(k)}\to\operatorname{Aut}T'$, $f':F'/(F')^{(k)}\times F'/(F')^{(k)}\to T'$ et $\lambda':F'/(F')^{(k)}\times Q\to T'$. On dit qu'on isomorphisme $\xi:F/F^{(k)}\to F'(F')^{(k)}$ *induit une équivalence faible* entre les extensions (4) et (5) si on peut choisir α, f et λ tels que $\alpha(a)=\alpha'(\xi(a))$, $f(a,b)=f'(\xi(a),\xi(b))$ et $\lambda(a,x)=\lambda'(\xi(a),x)$ pour tout $a,b\in F/F^{(k)}$, $x\in Q$.

Remarque. Dans ces conditions les Q-groupes N et N' ne sont pas nécessairement Q-isomorphes puisque ξ n'est pas nécessairement induit par un isomorphisme de F sur F'; cependant si ξ est induit par un isomorphisme de F sur F', alors N et N' sont Q-isomorphes. Si $g:F\to F'$ est un isomorphisme et $\bar g:F/F^{(k)}\to F'/(F')^{(k)}$ l'isomorphisme induit, alors $\bar g^{-1}\xi:F/F^{(k)}\to F/F^{(k)}$ est un automorphisme avec dét $(\bar g^{-1}\xi)\in(\mathbf{Z}/k)^*$ et il est bien connu que ξ est induit par un isomorphisme de F sur F' si et seulement si dét $(\bar g^{-1}\xi)=\pm1$; on voit tout de suite que si $h:F\to F'$ est un autre isomorphisme, alors dét $(\bar g^{-1}\xi)=\pm$dét $(\bar h^{-1}\xi)$. A tout isomorphisme $\xi:F/F^{(k)}\to F'/(F')^{(k)}$ qui induit une équivalence faible entre (4) et (5), on peut donc associer un élément bien déterminé de $(\mathbf{Z}/k)^*/\{\pm1\}$ défini par $d(\xi)=\overline{\text{dét}\,(\bar g^{-1}\xi)}\in(\mathbf{Z}/k)^*/\{\pm1\}$. Si $d(\xi)=1$, ξ peut être induit par un isomorphisme de F sur F' et dans ce cas $N\overset{Q}{\simeq}N'$. Réciproquement, si $N\overset{Q}{\simeq}N'$, un Q-isomorphisme de N sur N' induit d'abord un isomorphisme de F sur F' qui à son tour induit un isomorphisme $\xi:F/F^{(k)}\to F'/(F')^k$ tel que $d(\xi)=1$.

LEMME 2.2. *Si les deux extensions $T\rightarrowtail N\twoheadrightarrow F$ et $T'\rightarrowtail N'\twoheadrightarrow F'$ sont faiblement équivalentes, alors*

i) *pour tout groupe abélien de type fini A tel que $h(A)\geq1$ et qui est muni d'une Q-action triviale, $N\times A\overset{Q}{\simeq}N'\times A$*

ii) $N^{\phi(k)/2}\overset{Q}{\simeq}N'^{\phi(k)/2}$, *où k est comme dans la définition* 2.2.

Preuve. i) Il suffit de montrer que $N\times\mathbf{Z}\simeq N'\times\mathbf{Z}$. On considère alors l'isomorphisme $\xi:F/F^{(k)}\to F'/(F')^{(k)}$ que l'on prolonge en un isomorphisme η de $F/F^{(k)}\times$

$\mathbf{Z}/k$ sur $F'/(F')^{(k)}\times\mathbf{Z}/k$ en posant $\eta=\xi$ sur $F/F^{(k)}$ et $\eta=$ multiplication par un représentant de $d(\xi)^{-1}$ dans $\mathbf{Z}/k$ sur $\mathbf{Z}/k$. Puisque $d(\eta)=1$, η est induit par un Q-isomorphisme de $F\times\mathbf{Z}$ sur $F'\times\mathbf{Z}$ et la conclusion découle des remarques précédentes appliquées aux extensions $T\rightarrowtail N\times\mathbf{Z}\twoheadrightarrow F\times\mathbf{Z}$ et $T\rightarrowtail N'\times\mathbf{Z}\twoheadrightarrow F'\times\mathbf{Z}$

ii) $\xi: F/F^{(k)}\to F'(F')^{(k)}$ détermine un isomorphisme $\xi^n:(F/F^{(k)})^n\to (F'/(F')^{(k)})^n$ et $d(\xi)^n=d(\xi)^n$. La conclusion est alors une conséquence du fait que $d(\xi)^{\phi(k)/2}=1$.

THÉORÈME 2.2. *Si M, $N\in\mathcal{Q}_0$, les quatre conditions suivantes sont équivalentes:*

i) $QF(M)=QF(N)$

ii) $M^n\overset{Q}{\cong}N^n$ *pour un certain* $n\in\mathbf{N}$

iii) $M\times A\overset{Q}{\cong}N\times A$ *pour tout groupe abélien de type fini A tel que $h(A)\geq 1$ et sur lequel on fait opérer Q trivialement.*

iv) $\hat{M}\overset{Q}{\cong}\hat{N}$.

Preuve. Le théorème 2.1 montre que chacune des conditions i), ii) et iii) implique iv). La preuve que iv) entraîne i), ii) et iii) est similaire à celle de [16], théorème 2. En particulier, pour montrer que iv) entraîne ii) et iii), il suffit d'après le lemme précédent de montrer que M et N peuvent être décrites par des extensions faiblement équivalentes.

Si G est un Q-groupe, nous désignons par $\hat{G}_p$ le complété p-adique de G muni de sa structure naturelle de Q-groupe, c'est-à-dire $\hat{G}_p=\varprojlim G/G^{(p^k)}$. On prouve de la même façon que dans [16], les résultats suivants:

LEMME 2.3. *Si M et N sont des Q-groupes nilpotents de type fini, alors $QF(M)=QF(N)$ si et seulement si $\hat{M}_p\overset{Q}{\cong}\hat{N}_p$ pour tout premier p.*

LEMME 2.4. *Si M et N sont des Q-groupes nilpotents de type fini tels que $M\in QG_M(N)$, alors $\hat{M}_p\overset{Q}{\cong}\hat{N}_p$ et $M_0\overset{Q}{\cong}N_0$.*

Pour les Q-groupes nilpotents de type fini, la définition du Q-genre (Pickel), noté $QG_P(-)$. est la suivante:

DÉFINITION 2.3. $M\in QG_P(N)$ si et seulement si $QF(M)=QF(N)$ et $M_0\overset{Q}{\cong}N_0$.

Les lemmes 2.3 et 2.4 montrent que $M\in QG_M(N)$ entraîne que $M\in QG_p(N)$. La réciproque n'est pas vraie en général et cela même dans le cas des groupes sans opérateurs ainsi que l'ont montré Belfi et Wilkerson ([1], corollaire 4.2). Cependant, si nous nous limitons à la catégorie $\mathcal{Q}_0$, alors $M\in QG_P(N)$ entraîne $M\in QG_M(N)$ (voir théorème 2.4).

THÉORÈME 2.3. *Si M et N sont des Q-groupes nilpotents de type fini et si l'on a une des conditions:*

i) $M^n \overset{Q}{\cong} N^n$ *pour un certain* $n \in \mathbf{N}$, *ou*

ii) $M \times L \overset{Q}{\cong} N \times L$ *pour un certain Q-groupe nilpotent de type fini L, alors* $M \in QG_p(N)$.

THÉORÈME 2.4. *Soient M, $N \in \mathcal{Q}_0$. Les six conditions suivantes sont équivalentes:*

i) $QF(M) = QF(N)$

ii) $M^n \overset{Q}{\cong} N^n$ *pour un certain* $n \in \mathbf{N}$

iii) $M \times A \overset{Q}{\cong} N \times A$ *pour tout groupe abélien de type fini A tel que $h(A) \geq 1$ et sur lequel on fait opérer Q trivialement*

iv) $\hat{M} \overset{Q}{\cong} \hat{N}$

v) $\hat{M}_p \overset{Q}{\cong} \hat{N}_p$ *pour tout premier p*

vi) $M_p \overset{Q}{\cong} N_p$ *pour tout premier p.*

Le théorème 2.3 se prouve comme dans [16] et le théorème 2.4 est déjà essentiellement prouvé; en effet, les cinq premières conditions sont équivalentes d'après le théorème 2.2 et le lemme 2.3; d'après le lemme 2.4, vi) implique v); enfin iii) entraîne vi) se démontre comme le corollaire 1 dans [12] ainsi que nous le remarquons dans les commentaires suivant le théorème 1.5; dans ce cas, Mislin ne fait pas appel au foncteur $H^2(\text{-},\text{-})$ et le résultat est valide dans $\mathcal{Q}_0$ (et non seulement $\mathcal{M}_0$).

THÉORÈME 2.5. *Pour $N \in \mathcal{Q}_0$, $|QG_M(N)| = |QG_P(N)| \leq \phi(k)/2$ où ϕ est la fonction d'Euler et $k = \exp T(\nu_Q^1 N)$.*

Preuve. Puisque $\nu_Q^1 N$ est abélien et muni d'une Q-action triviale, le genre de $\nu_Q^1 N$ est trivial ([4], proposition 3.3); par ailleurs, $\nu_Q^1(-)$ est un invariant du Q-genre car $(\nu_Q^1 N)_p \overset{Q}{\cong} \nu_Q^1(N_p)$. On peut donc pour chaque $M \in QG_M(N)$ choisir le même entier $k = T(\nu_Q^1 N)$ dans le lemme 2.1 et si M, $M' \in QG_M(N)$, les extensions $T \rightarrowtail N \twoheadrightarrow F_N$, $T \rightarrowtail M \twoheadrightarrow F_M$ et $T \rightarrowtail M' \twoheadrightarrow F_{M'}$ obtenues comme dans le lemme 2.1 sont deux-à-deux faiblement équivalentes d'après le théorème 2.4 (nous avons en effet indiqué dans la preuve du théorème 2.2 que si $\hat{M} \overset{Q}{\cong} \hat{N}$, alors il existe une équivalence faible entre les extensions correspondant à M et N).

Supposons maintenant que $\xi_M : F_n/(F_n)^{(k)} \xrightarrow{\cong} F_M/(F_M)^{(k)}$ et $\xi_{M'} : F_N/(F_N)^{(k)} \xrightarrow{\cong} F_{M'}/(F_{M'})^{(k)}$ induisent des équivalences faibles entre les extensions correspondantes telles que $d(\xi_M) = d(\xi_{M'})$. Il existe alors $g : F_N \xrightarrow{\cong} F_M$ et $h : F_N \xrightarrow{\cong} F_{M'}$ tels que dét $(\bar{g}^{-1}\xi_{M'}) = \text{dét}\,(\bar{h}^{-1}\xi_{M'})$. Il est clair que $\xi_{M'} \circ \xi_M^{-1} : F_M/(F_M)^{(k)} \xrightarrow{\cong} F_{M'}/(F_{M'})^{(k)}$

induit une équivalence faible et que dét$(\bar{g}\bar{h}\xi_{M'}\xi_M^{-1}) = \pm 1$. Il découle alors des remarques précédant le lemme 2.2 que $M \overset{Q}{\cong} M'$.

Nous avons montré que nous pouvons associer à chaque élément de $QG_M(N)$ un élément $\bar{a} \in (Z/k)^*/\{\pm 1\}$ et que l'application ainsi obtenue est injective; en particulier, $|QG_M(N)| = |QG_P(N)| \leq |(\mathbf{Z}/k)^*\{\pm 1\}| = \phi(k)/2$.

Notons que Mislin a obtenu une borne supérieure pour $|G_M(N)|$ en montrant qu'il existe une surjection $(\mathbf{Z}/k)^*/\{\pm 1\} \twoheadrightarrow G_M(N)$ alors que nous obtenons un résultat analogue pour $|QG_M(N)|$ en démontrant l'existence d'une injection $QG_M(N) \rightarrowtail (\mathbf{Z}/k)^*/\{\pm 1\}$.

BIBLIOGRAPHIE

1. BELFI, V. and WILKERSON, C. *Some examples in the theory of P-completions*. Indiana Univ. J. Math. (à paraître).
2. HILTON, P. J., *Localization and cohomology of nilpotent groups*. Math. Z. *132* (1973). 263–286.
3. ——, *Nilpotent actions on nilpotent groups*. Lecture Notes in Math. *450*, Springer (1975), 174–196.
4. ——, *Localization in topology*. Amer. Math. Monthly *82* (1975), 113–131.
5. HILTON, P. J. and MISLIN G., *On the genus of a nilpotent group with finite commutator subgroup*. Math. Z. *146* (1976), 201–211.
6. HILTON, P. J., MISLIN, G., ROITBERG, J. *Sphere bundles over spheres and non-cancellation phenomena*. Lecture Notes in Math. *249*, Springer (1971), 34–46.
7. HILTON, P. J. and ROITBERG, J., *On proncipal S^3-bundles over spheres*. Ann. Math. *98* (1969), 91–107.
8. HILTON, P. J. and STAMMBACH, U., *On group actions on groups and associated series*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. *80* (1976), 43–55.
9. LEMAIRE, C. *A new bound for the genus of a nilpotent group*. Comment. Math. Helv. *51* (1976), 163–169.
10. MISLIN, G., *The genus of an H-space*, Lecture Notes in Math. *249*, Springer (1971), 75–83.
11. ——, *Cancellation properties of H-spaces*. Comment Math. Helv. *49* (1974), 195-200.
12. ——, *Nilpotent groups with finite commutator subgroups*. Lecture Notes in Math. *418*, Springer (1974), 103–118.
13. PICKEL, P. F., *Finitely generated nilpotent groups with isomorphic finite quotients*. Trans. Amer. Math. Soc. *160* (1971), 327–341.
14. ROITBERG, J., *Rational Lie algebras and p-isomorphisms of nilpotent groups and homotopy types*. Comment Math. Helv. *50* (1975), 1–8.
15. STAMMBACH, U., *Homology in Group Theory*. Lecture Notes in Math. *359*, Springer (1973).
16. WARFIELD, R. B., *Genus and cancellation for groups with finite commutator subgroup*. J. Pure and Applied Alg. *6* (1975), 125–132.
17. ——, *Nilpotent Groups*. Lect. Notes in Math. *513*, Springer (1976).
18. ZABRODSKY, A., *On the genus of finite CW-H-spaces*, Comment Math. Helv. *49* (1974), 48–64.

Dept. de Mathématiques
Université Laval
Cité Universitaire •
Quebec, Canada
61*K* 7*P*4

Reçu le 22 Juillet 1977