Ueber die Eigenwerte des Laplace-Operators auf kompakten Riemannschen Flächen II.

Comment. Math. Helvetici **53** (1978) 458–469 Birkhäuser Verlag, Basel

Ueber die Eigenwerte des Laplace-Operators auf kompakten Riemannschen Flächen II

HEINZ HUBER (Basel)

Albert Pfluger zum 70. Geburtstag

1.

Es sei $\mathcal{F}$ eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g_{\mathcal{F}}>1$, versehen mit ihrer Poincaré-Metrik konstanter Krümmung -1. Nach Gauss-Bonnet besitzt sie den Inhalt

$$\int_{\mathcal{F}} d\omega_{\mathcal{F}} = 4\pi(g_{\mathcal{F}}-1). \tag{1}$$

Es sei

$$\lambda_0 = 0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \tag{2}$$

die Folge aller Eigenwerte von $-\Delta_{\mathcal{F}}$, wobei jeder Eigenwert seiner Multiplizität entsprechend oft auftrete. Das Weylsche asymptotische Verteilungsgesetz besagt dann, dass der Quotient

$$Q_{\mathcal{F}}(x) = \sum_{\lambda_n \leqslant x} 1 \Big/ (g_{\mathcal{F}}-1)x, \qquad x>0, \tag{3}$$

für $x \to +\infty$ den Grenzwert 1 besitzt. Das schliesst natürlich nicht aus, dass $\inf_{\mathcal{F}} Q_{\mathcal{F}}(x)$ selbst für beliebig grosse x verschwinden könnte. In [3] wurde aber gezeigt: Es gibt eine für $\varepsilon>0$, $\delta>0$ positive und in beiden Variabeln monoton wachsende Funktion $q(\varepsilon, \delta)$ derart, dass $Q_{\mathcal{F}}(\frac{1}{4}+\varepsilon) \geqslant q(\varepsilon, \delta)$ für alle Flächen $\mathcal{F}$ mit $\cosh \frac{1}{2}\mu_{\mathcal{F}} \geqslant 1+\delta$. Dabei ist $\mu_{\mathcal{F}}$ die Länge der kürzesten geschlossenen Geodätischen auf $\mathcal{F}$.

Dieser Satz soll nun wesentlich erweitert werden: Es gibt sogar eine für $\varepsilon>0$ positive und wachsende Funktion $q(\varepsilon)$, sodass $Q_{\mathcal{F}}(\frac{1}{4}+\varepsilon) \geqslant q(\varepsilon)$ für *alle* Flächen $\mathcal{F}$. Das ergibt sich aus dem folgenden Satz, der in Abschnitt 2 beweisen wird:

(A) Ist $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ ein zur Eigenwertfolge (2) gehöriges Orthonormalsystem von

Eigenfunktionen, so gilt für $n\geq 0$, $\mu>\frac{1}{4}$, $p\in\mathscr{F}$ die Ungleichung

$$1\leq \mu/\lambda_{n+1}+2\pi(a(\mu)-1)\sum_{k=0}^{n}(1-\lambda_k/\lambda_{n+1})\,|\varphi_k(p)|^2.$$

Dabei ist $a(\mu)>1$ die kleinste Nullstelle der Legendreschen Funktion

$$F_\mu(x):=P_\nu(x),\qquad -\nu(\nu+1)=\mu,$$

im Intervall $[1,+\infty)$. (Für $\mu\leq\frac{1}{4}$ besitzt F_μ keine Nullstellen in diesem Intervall; vergl. [4] pag. 388 und 402).

Aus (A) ergibt sich durch Integration über $\mathscr{F}$ wegen (1):

(**B**) Für $n\geq 0$, $\mu>\frac{1}{4}$ gilt die Ungleichung

$$1\leq \mu/\lambda_{n+1}+\frac{a(\mu)-1}{2(g_{\mathscr{F}}-1)}\sum_{k=0}^{n}(1-\lambda_k/\lambda_{n+1})$$
$$\leq \mu/\lambda_{n+1}+(a(\mu)-1)\frac{n+1}{2(g_{\mathscr{F}}-1)}.$$

Zu gegebenem $\varepsilon>0$ werde jetzt n so bestimmt, dass

$$\lambda_n\leq\tfrac{1}{4}+\varepsilon<\lambda_{n+1}.$$

Dann ist nach (2), (3)

$$Q_{\mathscr{F}}(\tfrac{1}{4}+\varepsilon)=(n+1)/(g_{\mathscr{F}}-1)(\tfrac{1}{4}+\varepsilon).$$

Wählen wir

$$\mu=\tfrac{1}{4}+\delta\varepsilon,\qquad 0<\delta<1,$$

so folgt aus (B):

$$Q_{\mathscr{F}}(\tfrac{1}{4}+\varepsilon)\geq\frac{32\varepsilon}{(4\varepsilon+1)^2}\frac{1-\delta}{a(\frac{1}{4}+\delta\varepsilon)-1}. \tag{4}$$

In 3.3 wird gezeigt, dass

$$a(\mu)-1\sim j^2/2\mu\quad\text{für}\quad\mu\to+\infty,$$

($j=2{,}4048\ldots$ ist die kleinste positive Nullstelle der Besselschen Funktion J_0).

Daraus folgt, dass die rechte Seite von (4) für $\varepsilon \to +\infty$ den Grenzwert $4\delta(1-\delta)/j^2$ besitzt. Daher wählen wir optimal $\delta = \frac{1}{2}$ und erhalten:

$$\text{(C)}\quad Q_{\mathcal{F}}(\tfrac{1}{4}+\varepsilon) \geq \frac{16\varepsilon}{(4\varepsilon+1)^2}(a(\tfrac{1}{4}+\varepsilon/2)-1)^{-1}, \qquad \varepsilon > 0.$$

In [4] pag. 402 wird nachgewiesen, dass

$$F_\mu\left(\cosh\frac{\pi}{\sqrt{\mu-\frac{1}{4}}}\right) < 0, \qquad \mu > \tfrac{1}{4}.$$

Daher ist wegen $F_\mu(1) = 1$

$$a(\mu) < \cosh\frac{\pi}{\sqrt{\mu-\frac{1}{4}}}. \tag{5}$$

Somit ergibt sich aus (C) das sehr explizite Resultat

$$\text{(D)}\quad Q_{\mathcal{F}}(\tfrac{1}{4}+\varepsilon) \geq q(\varepsilon) = \frac{8\varepsilon}{(4\varepsilon+1)^2}\sinh^{-2}\left(\frac{\pi}{\sqrt{2\varepsilon}}\right), \qquad \varepsilon > 0.$$

Andererseits wurde schon in [3] bewiesen, dass

$\inf_{\mathcal{F}} Q_{\mathcal{F}}(\frac{1}{4}) = 0.$ Wir definieren jetzt

$$\sigma(\eta) = \sup_{\mu \geq \eta}(\mu-\eta)(a(\mu)-1), \qquad \eta > \tfrac{1}{4}. \tag{6}$$

Aus (5) folgt, dass $\sigma(\eta) < \infty$; σ ist offensichtlich monoton fallend im Intervall $(\frac{1}{4}, +\infty)$. Wir zeigen nun

(E) Für $m \geq 1$, $\eta > \frac{1}{4}$ gilt

$$\lambda_m \leq \eta + \frac{\sigma(\eta)m}{g-1} + \left[\left(\frac{\sigma(\eta)m}{g-1}\right)^2 + 2\eta\frac{\sigma(\eta)m}{g-1}\right]^{1/2} < 2\eta + \frac{2\sigma(\eta)m}{g_{\mathcal{F}}-1}.$$

In der Tat: Aus (B) und (6) folgt

$$1 \leq \mu/\lambda_m + \frac{\sigma(\eta)m}{2(g-1)}\cdot\frac{1}{\mu-\eta}, \qquad m \geq 1, \qquad \mu > \eta.$$

Wir dürfen gleich annehmen, dass $\lambda_m > \eta$, da andernfalls nichts zu beweisen wäre. Dann können wir aber

$$\mu = \eta + \tfrac{1}{2}(\lambda_m - \eta)$$

wählen und erhalten

$$(\lambda_m - \eta)^2 \leq \frac{2\sigma(\eta)m}{g-1}\lambda_m.$$

Daraus folgt sofort die Behauptung (E).

In Abschnitt 3 wird gezeigt, dass

$$\lim_{\eta \downarrow 1/4} \sigma(\eta) = +\infty, \qquad \sigma(\eta) = j^2/2 \quad \text{für} \quad \eta \geq j^2/4.$$

Somit ergibt sich aus (E) insbesondere

$$\textbf{(F)} \quad \lambda_m < \frac{j^2}{2} + \frac{j^2 m}{g_{\mathcal{F}} - 1}, \qquad m \geq 1.$$

Es ist bemerkenswert, dass diese Abschätzung die "richtige" Grössenordnung des asymptotischen Gesetzes

$$\lambda_m \sim m/(g_{\mathcal{F}} - 1), \qquad m \to \infty,$$

besitzt, im Gegensatz zur Abschätzung von Cheng [1]:

$$\lambda_m \leq \tfrac{1}{4} + 16\pi^2 d^{-2} m^2, \qquad d = \text{Durchmesser von } \mathcal{F},$$

(d erfüllt übrigens die Ungleichung $\cosh d > 2g - 1$).

2. Beweis von (A)

2.1 Der Beweis der Ungleichung (A) stützt sich auf folgendes

LEMMA. *Für $n \geq 0$ und reellwertige $\Theta \in C^2(\mathcal{F})$ gilt:*

$$\lambda_{n+1} \|\Theta\|^2 \leq -(\Delta_{\mathcal{F}}\Theta, \Theta) + \sum_{k=0}^{n} (\lambda_{n+1} - \lambda_k) |(\Theta, \varphi_k)|^2.$$

Beweis: Da die Funktion

$$\Psi = \Theta - \sum_{k=0}^{n} (\Theta, \varphi_k) \cdot \varphi_k \tag{1}$$

orthogonal zu den Eigenfunktionen $\varphi_0, \ldots \varphi_n$ ist, liefert das Rayleighsche Extremalprinzip die Ungleichung

$$\lambda_{n+1} \|\Psi\|^2 \leq \int_{\mathscr{F}} |\text{grad } \Psi|^2 \, d\omega_{\mathscr{F}} = -(\Delta_{\mathscr{F}} \Psi, \Psi). \tag{2}$$

Wegen $\Theta \in C^2(\mathscr{F})$ gilt

$$(\Delta_{\mathscr{F}} \Theta, \varphi_k) = (\Theta, \Delta_{\mathscr{F}} \varphi_k) = -\lambda_k (\Theta, \varphi_k).$$

Somit folgt aus (1):

$$(\Delta_{\mathscr{F}} \Psi, \Psi) = \left(\Delta_{\mathscr{F}} \Theta + \sum_{k=0}^{n} \lambda_k (\Theta, \varphi_k) \varphi_k, \; \Theta - \sum_{k=0}^{n} (\Theta, \varphi_k) \varphi_k\right)$$

$$= (\Delta_{\mathscr{F}} \Theta, \Theta) + \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \, |(\Theta, \varphi_k)|^2. \tag{3}$$

Weiter folgt aus (1):

$$\|\Psi\|^2 = \|\Theta\|^2 - \sum_{k=0}^{n} |(\Theta, \varphi_k)|^2. \tag{4}$$

Nun ergibt sich die Behauptung aus (2), (3) und (4).

2.2 Es sollen jetzt Funktionen auf $\mathscr{F}$ konstruiert werden, auf welche sich dieses Lemma mit Erfolg anwenden lässt. Zu diesem Zweck versehen wir den Einheitskreis

$E = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ mit der hyperbolischen Metrik

$$ds = 2 \frac{|dz|}{1 - |z|^2} \tag{5}$$

welche die Krümmung -1 besitzt. Für die hyperbolische Distanz $\rho(z, 0)$ ergibt sich dann

$$\cosh \rho(z, 0) = \frac{1+|z|^2}{1-|z|^2}. \tag{6}$$

Führen wir geodätische Polarkoordinaten

$$\rho = \rho(z, 0), \qquad \vartheta = \arg z \tag{7}$$

ein, so wird

$$ds^2 = d\rho^2 + \sinh^2 \rho \, d\vartheta^2.$$

Somit besitzt die Metrik das Flächenelement

$$d\omega = \sinh \rho \, d\rho \, d\vartheta. \tag{8}$$

Ist nun $p \in \mathscr{F}$ ein beliebiger Punkt, so gibt es eine konforme Ueberlagerungsabbildung

$$\gamma : E \to \mathscr{F}, \qquad \gamma(0) = p. \tag{9}$$

Mit Hilfe von γ wird die Differentialgeometrie (5) von E auf $\mathscr{F}$ verpflanzt und ergibt, unabhängig von der Wahl von p, die Poincaré-Metrik von $\mathscr{F}$. Wir bezeichnen mit Γ die zu γ gehörige Gruppe der Deckisometrien von E und betrachten für $\varepsilon \geqslant 0$ die Funktionenschar

$$h_\varepsilon(z) = \sum_{T \in \Gamma} f_\varepsilon(\cosh \rho(Tz, 0)) \tag{10}$$

mit

$$f_\varepsilon(x) = \begin{array}{lll} F_\mu^{1+\varepsilon}(x) & \text{in} & [1, a(\mu)],\ \mu > \frac{1}{4}, \\ 0 & \text{in} & [a(\mu), +\infty), \end{array} \tag{11}$$

(f_ε fällt monoton von 1 nach 0). Da h_ε automorph bezüglich der Deckgruppe Γ ist, gibt es genau eine auf $\mathscr{F}$ definierte Funktion Ψ_ε mit

$$\Psi_\varepsilon \circ \gamma = h_\varepsilon. \tag{12}$$

In [2] wurde gezeigt[1]), dass diese Funktion für *positives* ε folgende Eigenschaften besitzt:

$$\Psi_\varepsilon \in C^1(\mathscr{F}), \tag{13}$$

$$\Psi_\varepsilon \in C^2(\mathscr{F} - \mathscr{C}) \tag{14}$$

$$-\Delta_{\mathscr{F}} \Psi_\varepsilon \leq (1+\varepsilon)\mu \Psi_\varepsilon \quad \text{auf} \quad \mathscr{F} - \mathscr{C} \tag{15}$$

$$\Delta_{\mathscr{F}} \Psi_\varepsilon \in \mathscr{L}^1(\mathscr{F}). \tag{16}$$

Dabei ist $\mathscr{C}$ das γ-Bild der Kreislinie

$$|z| = \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^{1/2}, \qquad \text{(vergl. (6) und (10)–(12))},$$

also eine analytische Kurve auf $\mathscr{F}$, welche–wenn $a(\mu)$ gross ist—viele mehrfache Punkte besitzen kann. In [2] wurde ferner gezeigt, dass es zu $\varepsilon > 0$ eine Folge $\{\Theta_m\}_1^\infty$, $\Theta_m \in C^\infty(\mathscr{F})$, derart gibt, dass $\Theta_m \to \Psi_\varepsilon$ gleichmässig auf $\mathscr{F}$ und zugleich $(\Delta_{\mathscr{F}}\Theta_m, \Theta_m) \to (\Delta_{\mathscr{F}}\Psi_\varepsilon, \Psi_\varepsilon)$. Daher folgt nun nach Lemma 2.1:

$$\lambda_{n+1} \|\Psi_\varepsilon\|^2 \leq -(\Delta_{\mathscr{F}}\Psi_\varepsilon, \Psi_\varepsilon) + \sum_{k=0}^{n} (\lambda_{n+1} - \lambda_k) |(\Psi_\varepsilon, \varphi_k)|^2, \ \varepsilon > 0.$$

Daraus ergibt sich wegen (15) und $\Psi_\varepsilon \geq 0$:

$$\lambda_{n+1} \|\Psi_\varepsilon\|^2 \leq (1+\varepsilon)\mu \|\Psi_\varepsilon\|^2 + \sum_{k=0}^{n} (\lambda_{n+1} - \lambda_k) |(\Psi_\varepsilon, \varphi_k)|^2, \qquad \varepsilon > 0. \tag{17}$$

In dieser schwächeren Ungleichung kann nun auch der Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ vollzogen werden: Aus (10)–(12) ersieht man, dass $\Psi_\varepsilon \to \Psi_0$ gleichmässig auf $\mathscr{F}$. Somit ergibt sich aus (17) die Ungleichung

$$1 \leq \mu/\lambda_{n+1} + \|\Psi_0\|^{-2} \sum_{k=0}^{n} (1 - \lambda_k/\lambda_{n+1}) |(\Psi_0, \varphi_k)|^2. \tag{18}$$

2.3 Wir berechnen jetzt die Fourierkoeffizienten und die Norm von Ψ_0. Ist $D \subset E$ ein Fundamentalbereich der Deckgruppe Γ, so folgt aus (10)–(12):

---

[1] der hiesige und der dortige Laplace-Operator haben entgegengesetztes Vorzeichen!

$$(\varphi_k, \Psi_0) = \int_{\mathscr{F}} \varphi_k \Psi_0 \, d\omega_{\mathscr{F}} = \int_D (\varphi_k \circ \gamma)(z) h_0(z) \, d\omega$$

$$= \sum_{T \in \Gamma} \int_D (\varphi_k \circ \gamma)(z) f_0(\cosh \rho(Tz, 0)) \, d\omega$$

$$= \sum_{T \in \Gamma} \int_{T(D)} (\varphi_k \circ \gamma)(z) f_0(\cosh \rho(z, 0)) \, d\omega$$

$$= \int_E (\varphi_k \circ \gamma)(z) f_0(\cosh \rho(z, 0)) \, d\omega.$$

Führen wir die Polarkoordinaten (7) ein und setzen

$(\varphi_k \circ \gamma)(z) = \Phi_k(\rho, \vartheta)$, so ergibt sich wegen (8):

$$(\varphi_k, \Psi_0) = \int_0^\infty f_0(\cosh \rho) \left(\int_0^{2\pi} \Phi_k(\rho, \vartheta) \, d\vartheta \right) \sinh \rho \, d\rho. \tag{19}$$

Nach [3] 3.3 gilt aber

$$\int_0^{2\pi} \Phi_k(\rho, \vartheta) \, d\vartheta = 2\pi \rho_k(p) F_{\lambda_k}(\cosh \rho).$$

Somit folgt aus (19) und (11):

$$(\varphi_k, \Psi_0) = 2\pi \varphi_k(p) \int_1^{a(\mu)} F_\mu(x) F_{\lambda_k}(x) \, dx. \tag{20}$$

Wegen $f_0 \geqslant 0$ folgt aus (10)

$h_0^2(z) \geqslant \sum_{T \in \Gamma} f_0^2(\cosh \rho(Tz, 0))$. Daher wird

$$\|\Psi_0\|^2 = \int_D h_0^2(z) \, d\omega \geqslant \sum_{T \in \Gamma} \int_D f_0^2(\cosh \rho(Tz, 0)) \, d\omega$$

$$= \int_E f_0^2(\cosh \rho(z, 0)) \, d\omega = 2\pi \int_0^\infty f_0^2(\cosh \rho) \sinh \rho \, d\rho \tag{21}$$

$$= 2\pi \int_1^{a(\mu)} F_\mu^2(x) \, dx.$$

2.4 Aus (18), (20) und (21) ergibt sich jetzt die Ungleichung

$$1 \leq \mu/\lambda_{n+1} + 2\pi\left(\int_1^{a(\mu)} F_\mu^2\, dx\right)^{-1} \sum_{k=0}^{n} (1-\lambda_k/\lambda_{n+1})\, |\varphi_k(p)|^2 \left(\int_1^{a(\mu)} F_\mu F_{\lambda_k}\, dx\right)^2$$

$$\leq \mu/\lambda_{n+1} + 2\pi \sum_{k=0}^{n} (1-\lambda_k/\lambda_{n+1})\, |\varphi_k(p)|^2 \int_1^{a(\mu)} F_{\lambda_k}^2(x)\, dx.$$

Daraus folgt aber die Ungleichung (A), wenn wir noch nachweisen, dass

$$|F_\lambda(x)| \leq 1 \quad \text{für } x \geq 1, \qquad \lambda \geq 0. \tag{22}$$

Nach [4] pag. 273 (145) besitzt

$$F_\lambda = P_\nu, \; -\nu(\nu+1) = \lambda,$$

die Integraldarstellung

$$F_\lambda(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cos\left(\pi\sqrt{\tfrac{1}{4}-\lambda}\right) \int_0^\infty \frac{\cosh\left((\tfrac{1}{4}-\lambda)^{1/2} u\right)}{(x+\cosh u)^{1/2}}\, du, \qquad x \geq 1, \qquad 0 < \lambda \leq \tfrac{1}{4}.$$

Somit ist F_λ positiv und monoton fallend in $[1, +\infty)$, und wegen $F_\lambda(1) = 1$ folgt

$$0 < F_\lambda(x) \leq 1, \, x \geq 1, \, 0 < \lambda \leq \tfrac{1}{4}. \tag{23}$$

Das gilt auch noch für $\lambda = 0$, da $F_0 = 1$.
Nach [4] pag. 270 (141) gilt:

$$F_\lambda(\cosh t) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^t \frac{\cos\left((\lambda - \tfrac{1}{4})^{1/2} u\right)}{(\cosh t - \cosh u)^{1/2}}\, du, \qquad t > 0, \qquad \lambda \geq \tfrac{1}{4}. \tag{24}$$

Daraus geht hervor, dass

$$|F_\lambda(\cosh t)| \leq F_{1/4}(\cosh t), \qquad t > 0, \qquad \lambda \geq \tfrac{1}{4}.$$

Hieraus und aus (23) folgt aber die Behauptung (22). Damit ist die Ungleichung (A) bewiesen.

3. Hilfssätze über $\sigma(\eta)$

3.1 Aus der Definition

$$\sigma(\eta)=\sup_{\mu\geqslant\eta}(\mu-\eta)(a(\mu)-1), \qquad \eta>\tfrac{1}{4}, \tag{1}$$

folgt unmittelbar, dass σ im Intervall $(\frac{1}{4}, +\infty)$ monoton fallend ist.

3.2 Nach [3] Lemma 2 gilt

$$a(\mu)-1\geqslant j^2/2\mu \quad \text{für} \quad \mu\geqslant 3. \tag{2}$$

Daraus folgt für $\eta\geqslant 3$:

$$\sigma(\eta)\geqslant \sup_{\mu\geqslant\eta} j^2(\mu-\eta)/2\mu=j^2/2.$$

Somit ist wegen 3.1

$$\sigma(\eta)\geqslant j^2/2 \quad \text{für} \quad \eta>\tfrac{1}{4}. \tag{3}$$

3.3 F_μ erfüllt die Legendresche Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}((x^2-1)F'_\mu)+\mu F_\mu=0. \tag{4}$$

Für jede Funktion

$$f\in C^1[1, a(\mu)], \qquad f(a(\mu))=0, \tag{5}$$

ist fF'_μ/F_μ stetig in $[1, a(\mu)]$ und es gilt

$$0\leqslant\int_1^{a(\mu)}(x^2-1)\left(f'-\frac{F'_\mu}{F_\mu}f\right)^2 dx=\int_1^{a(\mu)}(x^2-1)(f')^2\,dx$$

$$-\int_1^{a(\mu)}(x^2-1)\frac{F'_\mu}{F_\mu}(f^2)'\,dx+\int_1^{a(\mu)}(x^2-1)\left(\frac{F'_\mu}{F_\mu}\right)^2 f^2\,dx. \tag{6}$$

Durch partielle Integration unter Berücksichtigung von (4), (5) ergibt sich:

$$\int_1^{a(\mu)} (x^2-1)\frac{F'_\mu}{F_\mu}(f^2)'\,dx = \mu\int_1^{a(\mu)} f^2\,dx + \int_1^{a(\mu)} (x^2-1)\left(\frac{F'_\mu}{F_\mu}\right)^2 f^2\,dx.$$

Somit folgt aus (6):

$$\mu\int_1^{a(\mu)} f^2\,dx \le \int_1^{a(\mu)} (x^2-1)(f')^2\,dx. \tag{7}$$

Die Funktion

$$f(x) = J_0\left(j\sqrt{\frac{x-1}{a(\mu)-1}}\right)$$

erfüllt offenbar die Bedingungen (5). Eine kleine Rechnung ergibt:

$$\int_1^{a(\mu)} f^2\,dx = \frac{2}{j^2}(a(\mu)-1)\int_0^j J_0^2(t)t\,dt, \tag{8}$$

$$\int_1^{a(\mu)} (x^2-1)(f')^2\,dx = \int_0^j (J_0'(t))^2 t\,dt + \tfrac{1}{2}(a(\mu)-1)\int_0^j \left(\frac{t}{j}\right)^2 (J_0'(t))^2 t\,dt$$

$$\le [1+\tfrac{1}{2}(a(\mu)-1)]\int_0^j (J_0'(t))^2 t\,dt. \tag{9}$$

Aus der Besselschen Differentialgleichung $(tJ_0')' + tJ_0 = 0$ folgt

$$\int_0^j J_0(tJ_0')'\,dt + \int_0^j J_0^2 t\,dt = 0,$$

und daraus durch partielle Integration

$$\int_0^j (J_0')^2 t\,dt = \int_0^j J_0^2 t\,dt.$$

Somit ergibt sich aus (7)–(9):

$$(\mu - j^2/4)(a(\mu)-1) \le j^2/2. \tag{10}$$

Folglich ist $\sigma(j^2/4) \le j^2/2$, und daher wegen 3.1 und (3)

$$\sigma(\eta) = j^2/2 \quad \text{für} \quad \eta \ge j^2/4. \tag{11}$$

Aus (2) und (10) ergibt sich noch

$$a(\mu)-1 \sim j^2/2\mu, \qquad \mu \to +\infty. \tag{12}$$

3.4 Der Intergraldarstellung 2.4 (24) entnimmt man, dass

$$F_\mu(\cosh t) > 0 \quad \text{für} \quad 0 < t \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\mu-\frac{1}{4}}}, \qquad \mu > \tfrac{1}{4}.$$

Daher ist

$$a(\mu) > \cosh\left(\frac{\pi}{2\sqrt{\mu-\frac{1}{4}}}\right)$$

und

$$a(\mu)-1 > 2\sinh^2\left(\frac{\pi}{4\sqrt{\mu-\frac{1}{4}}}\right)$$

Somit wird

$$\sigma(\eta) \geq (\eta-\tfrac{1}{4})[a(\eta+(\eta-\tfrac{1}{4}))-1] > 2(\eta-\tfrac{1}{4})\sinh^2\left(\frac{\pi}{4\sqrt{2(\eta-\frac{1}{4})}}\right).$$

Daraus folgt aber

$$\lim_{\eta \downarrow 1/4} \sigma(\eta) = +\infty. \tag{13}$$

LITERATUR

[1] CHENG, S.-Y., *Eigenvalue comparison theorems and its geometric applications*, Math. Z. *143* (1975), 289–297.

[2] HUBER, H., *Ueber den ersten Eigenwert des Laplace-Operators auf kompakten Riemannschen Flächen*, Comment. Math. Helv. *49* (1974), 251–259.

[3] —— *Ueber die Eigenwerte des Laplace-Operators auf kompakten Riemannschen Flächen*, Comment. Math. Helv. *51* (1976), 215–231.

[4] HOBSON, E. W., *The theory of spherical and ellipsoidal harmonics*, (Cambridge University Press 1931).

Eingegangen den 10. Dezember 1977