Gitterzahlen und innere Volumina.

Autor(en): **Wills, Jörg M.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **53 (1978)**

PDF erstellt am: **15.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-40782

Comment. Math. Helvetici 53 (1978) 508–524 Birkhäuser Verlag, Basel

Gitterzahlen und innere Volumina

JÖRG M. WILLS

Hugo Hadwiger zum 70. Geburtstag gewidmet

1. Einleitung

In der vorliegenden Arbeit werden diskrete Funktionale untersucht, die bei Gitterpunktproblemen auftreten und die diskrete Analoga zu Minkowskis Quermaßintegralen darstellen. Wir beginnen mit einer ausführlichen Einleitung, die zugleich Hadwigers Beiträge zu diesem Themenkreis würdigen soll.

Bezeichnungen und Definitionen sind, soweit nicht anders angegeben, dem Standardwerk von Hadwiger [7] entnommen. Zu einem konvexen Körper K des d-dimensionalen euklidischen Raumes E^d sei $G(K) = \operatorname{card}(K \cap \mathbf{Z}^d)$ seine Gitterpunktanzahl. Abschätzungen von G durch stetige Funktionale wie das Volumen V sind für spezielle Klassen konvexer Körper lange bekannt. So gilt für zentralsymmetrische konvexe Körper der Satz von Minkowski-van der Corput ([16] S. 44)

$$K = -K \Rightarrow 2\left[\frac{V(K)}{2^d}\right] + 1 \leq G(K)$$

($[x]$ größte ganze Zahl $\leq x$), der den Minkowskischen Fundamentalsatz aus der Geometrie der Zahlen als Spezialfall enthält und eine untere Schranke für G gibt. Eine obere Schranke liefert nach Blichfeldt ([16] S. 55)

$$\operatorname{aff}(K \cap \mathbf{Z}^d) = E^d \Rightarrow G(K) \leq d!\, V(K) + d.$$

Bei beliebigen konvexen Körpern $K \subset E^d$ werden neben V weitere stetige Funktionale wie z.B. die Oberfläche F benötigt. Für die untere Schranke von G wurde das Problem nach Zwischenergebnissen anderer Autoren [5], [9], [25], [32], [33] (s. auch [35]) von Hadwiger [10], [3] vollständig gelöst mit

$$V(K) - \tfrac{1}{2} F(K) < G(K).$$

Durch die einfache und dimensionsfreie Formulierung sowie den engen Zusammenhang zwischen den wichtigsten stetigen und diskreten Funktionalen konvexer Körper und der Anwendbarkeit auf Überdeckungsprobleme und den keineswegs einfachen Beweis gehört Hadwigers Gitterpunktsatz zu den schönsten Ergebnissen der Konvex-Geometrie.

Zur oberen Abschätzung von G bei beliebigen konvexen Körpern genügen Volumen und Oberfläche alleine nicht. Bezeichnen wie üblich $W_i(K)$ die Minkowskischen Quermaßintegrale und ω_i die Volumina der i-dimensionale Einheitskugel, so seien

$$V_i(K) = \binom{d}{i} \frac{1}{\omega_{d-i}} W_{d-i}(K) \qquad i = 0, 1, \ldots, d$$

die von McMullen [18] eingeführten inneren Volumina, die neben den bekannten Eigenschaften der W_i noch die der Dimensionsinvarianz besitzen. Insbesondere ist

$$V_d = V, \; V_{d-1} = \tfrac{1}{2} F \quad \text{und} \quad V_0 = 1.$$

Ist $W(K) = \sum_{i=0}^{d} V_i(K)$, so läßt sich eine 1971 [31] aufgestellte Vermutung für die obere Schranke von G kurz so formulieren:

$$G(K) \leq W(K).$$

Ist Q^d die Menge der (auch niederdimensionalen) achsenorientierten Quader $\subset E^d$, deren Ecken Gitterpunkte sind,

so gilt: $Q \in Q^d \Rightarrow G(Q) = W(Q)$

d.h. die Vermutung ist im Fall ihrer Gültigkeit bestmöglich. Für $d = 2$ ist das Ergebnis schon lange bekannt und wiederholt bewiesen worden, zuerst wohl von Pick [23].

Für $d = 3$ wurde die Vermutung von Overhagen [22] bewiesen, Spezialfälle davon schon vorher von Hadwiger und Wills [12]. Für Rotationskörper mit $d \leq 6$ wurde sie von Hadwiger und Wills [13] bewiesen, numerisch sogar bis $d \leq 20$, bis Betke [1] zeigte, daß diese Methode bei großen Dimensionen versagt. Betke bewies (unpubliz.) die Vermutung für Gitterzonotope. Bokowski [2] zeigte für $d \leq 5$

$$G(K) \leq V(K + \omega_d^{-1/d} S) \quad (S\text{: Einheitskugel}).$$

Dies ist wegen

$$\omega_n^{1/n} \geq \omega_{n+1}^{1/(n+1)}, \qquad n = 1,2,\ldots$$

[2] eine etwas schwächere Abschätzung als $G \leq W$, aus der mit

$$W_i \leq \omega_d \left(\frac{B}{2}\right)^{d-i} \qquad ([7]\ S.\,278)$$

$$G(K) \leq \left(\omega_d^{1/d} \frac{B}{2} + 1\right)^d \qquad (B\text{: mittlere Breite})$$

und $B \leq D$

$$G(K) \leq \left(\omega_d^{1/d} \frac{D}{2} + 1\right)^d \qquad (D\text{: Durchmesser})$$

folgen. Auch diese Ungleichungen sind für $d > 5$ unbewiesen. Nach Hadwiger [11] gestattet W die Integraldarstellung

$$W(K) = \int_{\mathbf{E}^d} e^{-\pi r(x,K)^2}\, dx$$

wobei $r(x, K)$ der Abstand des Punktes x von K ist. Darüber hinaus entdeckte Hadwiger [11] weitere Eigenschaften des Funktionals W, die es unabhängig von seiner Einführung über die Gitterpunktanzahl für die Konvex-Geometrie interessant macht. Z.B. kann die Integraldarstellung von W als Ausgangspunkt für verschiedene Systeme von Funktionalen dienen, die eine Basis im Raum der additiven, bewegungsinvarianten und stetigen Funktionale bilden (vgl. [4]).

Für die Anzahl der Gitterpunkte auf dem Rand $\dot{K}$ von $K : G(\dot{K}) = \operatorname{card}(\dot{K} \cap \mathbf{Z}^d)$ vermutete Hadwiger 1972:

$$G(\dot{K}) \leq 2 \sum_{\substack{i=1 \\ d-i \text{ ungerade}}}^{d} V_i(K).$$

Für $d = 2$ erhält man $G(\dot{K}) \leq U(K)$ (U: Um fang), für $d = 3$:

$$G(\dot{K}) \leq F(K) + 2;$$

ein zuerst von Ehrhart [6] bewiesenes Ergebnis, das unabhängig davon von McMullen und Wills [20] in etwas schärferer Form

$$G(K)-G\left(K-\frac{1}{\sqrt{2}}S\right)\leq F(K)+2$$

bewiesen wurde (links steht die Anzahl der Gitterpunkte in einer $1/\sqrt{2}$ dicken Randschicht von K). Für $d\geq 4$ ist Hadwigers Vermutung nur in Spezialfällen bewiesen [22]. Auch hier gilt Gleichheit für $Q\in Q^d$.

Bei Untersuchungen zu den Funktionalen G und W entwickelte McMullen [18], [19] eine auf Ergebnissen von Hadwiger [7], Ehrhart [6], MacDonald [17], Reeve [24] und Shephard [27], [28], [29] aufbauende Theorie, die Ergebnisse der kombinatorischen, der diskreten und der Konvex-Geometrie umfaßt und teilweise einen gemeinsamen Aufbau dieser drei Bereiche ermöglicht. Ein bedeutendes Ergebnis dieser Theorie, das schon Ehrhart (teilweise) und MacDonald erhalten hatten und das unabhängig davon auch von D. N. Bernstein [34] gefunden wurde, ist der Satz, daß die Gitterpunktanzahl (und andere diskrete Funktionale) eine Theorie der gemischten Volumina besitzen. Insbesondere gilt:

Ist $\mathfrak{P}^d$ die Menge der eigentlichen und uneigentlichen Gitterpolytope des E^d, d.h. der konvexen Hüllen endlich vieler Gitterpunkte, so gilt für jedes $P\in\mathfrak{P}^d$ und $n\geq 0$ ganz:

$$G(nP)=\sum_{i=0}^{d} G_i(P)n^i.$$

Ist $\hat{G}(P)=\sum_{g\in P\cap \mathbf{Z}^d}\alpha(g,P)_i\alpha(g,P)$: Winkel von g bezüglich P) die von Hadwiger [8] eingeführte und von Reeve [24] und MacDonald [17] weiter untersuchte gewogene Gitterpunktanzahl, so gilt nach MacDonald für $P\in\mathfrak{P}^d$ und $n\geq 0$ ganz

$$\hat{G}(nP)=\sum_{\substack{i=1\\ d-i \text{ gerade}}}^{d}\hat{G}_i(P)n^i.$$

Die Untersuchung der diskreten Funktionale G_i und $\hat{G}_i$ und der Vergleich mit den analogen stetigen Funktionalen V_i ist das Thema der Arbeit. Abschließend möchte ich Herrn U. Betke und Herrn P. McMullen für etliche Verbesserungsvorschläge, und Herrn P. M. Gruber für einen Literaturhinweis danken.

2. Ergebnisse

Die meist einfachen, teils bekannten, teils neuen Eigenschaften der G_i und $\hat{G}_i$ sind im folgenden Satz zusammengestellt:

Satz. *Für die auf der Menge* $\mathfrak{P}^d$ *der konvexen Gitterpolytope des* E^d *erklärten Funktionale* G_i *und* $\hat{G}_i$ *gilt mit* $P, Q \in \mathfrak{P}^d$:

(a) *Additivität: Mit* $P \cup Q \in \mathfrak{P}^d$ *ist*

$$G_i(P \cup Q) + G_i(P \cap Q) = G_i(P) + G_i(Q)$$

(b) *Einfache Additivität: Mit* $P \cup Q \in \mathfrak{P}^d$ *und* $\dim(P \cap Q) < d$ *ist*

$$\hat{G}_i(P \cup Q) = \hat{G}_i(P) + \hat{G}_i(Q)$$

(c) *Translationsinvarianz: Mit* $t \in \mathbf{Z}^d$ *ist*

$$G_i(P+t) = G_i(P), \qquad \hat{G}_i(P+t) = \hat{G}_i(P)$$

(d) *Homogenität: Mit* $n \geq 0$ *ganz ist*

$$G_i(nP) = n^i G_i(P), \qquad \hat{G}_i(nP) = n^i \hat{G}_i(P)$$

(e) *Dimensionsinvarianz: Die* G_i *sind dimensionsinvariant, d.h. unabhängig von dem Raum, in dem* $P \in \mathfrak{P}^d$ *eingebettet ist.*

(f) *Die* $\hat{G}_i$ *sind nicht dimensionsinvariant.*

(g) *Beschränktheit und Rationalität:*

$$G_i(P) = \sum_{r=0}^{d} c_{ir} G(rP), \qquad \hat{G}_i(P) = \sum_{r=0}^{d} \hat{c}_{ir} \hat{G}(rP) \qquad i = 1, \ldots, d$$

wobei die c_{ir}, $\hat{c}_{ir}$ *rationale Zahlen sind, die nur von d und nicht von P abhängen.*

(h) $G_d = V_d = V$ *und* $G_0 = V_0 = 1$

(i) *Für* $P \in \mathfrak{P}^d$ *eigentlich ist* $\hat{G}_d = V_d$, $\hat{G}_0 = 0$ *und* $\hat{G}_i = 0$, *falls* $d-i$ *ungerade.*

(j) $0 \leq G_{d-1}(P) = \frac{1}{2} \Sigma' \frac{V_{d-1}(f)}{\Delta_{d-1}(f)} \leq V_{d-1}(P)$

wobei Σ' *über alle Facetten f von P läuft und* $\Delta_{d-1}(f)$ *die Determinante des durch* aff *f induzierten Gitters ist.*

(k) $0 \leq G_{d-2}(P) - \hat{G}_{d-2}(P) = \Sigma'' \gamma(f, P) \frac{V_{d-2}(f)}{\Delta_{d-2}(f)} \leq V_{d-2}(P)$

wobei Σ'' *über alle* $(d-2)$*-Seiten f von P läuft,* $\Delta_{d-2}(f)$ *die Determinante des durch* aff *f induzierten Gitters ist und* $\gamma(f, P)$ *der normierte Außenwinkel von f bezüglich P.*

(l) *Spezielle Abbildungsinvarianz: Ist* $u: P \to P'$ *unimodulare Gitter-Transformation, so ist* $G_i(P') = G_i(P)$ $i = 0, 1, \ldots, d$.

(m) *Für* $Q \in Q^d$ *gilt* $G_i(Q) = V_i(Q)$ $i = 0, \ldots, d$.

(n) *Für* $Q \in Q^d$ *eigentlich gilt* $\hat{G}_d(Q) = V(Q)$ *und* $\hat{G}_i(Q) = 0$ $i = 0, 1, \ldots, d-1$.

(o) $\displaystyle\sum_{\substack{i=1\\ d-i \text{ gerade}}}^{d} \hat{G}_i(P) < \sum_{\substack{i=0\\ d-i \text{ gerade}}}^{d} G_i(P)$ *für* $\dim P = d$

(p) $\displaystyle\sum_{\substack{i=0\\ d-i \text{ ungerade}}}^{d} G_i(P) \leq \sum_{\substack{i=0\\ d-i \text{ gerade}}}^{d} G_i(P)$ *für* $\dim P = d$

(q) *Starke Nicht-Monotonie: Es gibt kein* $\alpha \geq 1$ *mit:* $P \subset Q \nRightarrow G_{d-1}(P) \leq \alpha G_{d-1}(Q)$.

(r) *Simultane Nicht-Monotonie: Es gibt* $P, Q \in \mathfrak{P}^d$ *mit* $P \subset Q$ *und* $G_i(P) > G_i(Q)$ *für mehr als ein* $i \in [1, d-1]$.

(s) *Indefinitheit: Es gibt eine Folge* $P_q \in \mathfrak{P}^d (d \geq 3)$ *mit* $G_i(P_q) \to -\infty$ *und* $\hat{G}_i(P_q) \to -\infty$ *für ein* $i \in [1, d-2]$.

(t) *Es gibt ein eigentliches* $P \in \mathfrak{P}^3$ *mit* $G_1(P) = 0$.

(u) *Es gibt ein* $P \in \mathfrak{P}^d (d \geq 3)$ *mit*

$$\left.\begin{aligned} G_i(P) &> V_i(P) \\ \hat{G}_i(P) &> V_i(P) \end{aligned}\right\} \text{ für ein } i \in [1, d-2].$$

(v) *Es gibt zu jedem* $j \in [1, d-1]$ *eine Folge uneigentlicher* $P_q \in \mathfrak{P}^d$ *mit*

$$G_i(P_q) \to \infty \quad i = 1, \ldots, j$$

$$G_i(P_q) = 0 \quad i = j+1, \ldots, d$$

(w) *Es gibt eine Folge* $P_q \in \mathfrak{P}^d$ *mit*

$$G_i(P_q) = \binom{d}{i} \qquad i = 0, \ldots, d-1$$

und $G_d(P_q) \to \infty$.

(x) *Es gibt eine Folge* $P_q \in \mathfrak{P}^d$ *mit* $\sum_{i=0}^{d} (-1)^{d-i} G_i(P_q) = 0$ *und*

$$G_i(P_q) \to \infty \qquad i = 1, \ldots, d.$$

(y) *Für* $P \in \mathfrak{P}^d$ *eigentlich ist*

$$\binom{d+1}{2} G_d(P) \geq G_{d-1}(P).$$

(z) *Für* $P \in \mathfrak{P}^d$ *gilt* $\hat{G}(P) \leq \frac{1}{2} d\,!\, V(P)$ *und die Schranke ist optimal.*

Beweis. (a)–(j) sind schon in [18], [19] und vorangehenden Arbeiten bewiesen worden. Insbesondere folgt (g) durch Auflösen des Gleichungssystems

$$G(rP) = \sum_{i=0}^{d} G_i(P) r^i \qquad r = 0, 1, \ldots, d.$$

(k) Nach [18] S. 256 ist

$$G(P) = \sum_f \gamma(f, P) \hat{G}(f) \tag{*}$$

wobei die Σ über alle Seiten f von P läuft $\gamma(f, P)$ der Außenwinkel von f bezüglich P ist, und $\hat{G}(f)$ jeweils bezüglich aff f gemessen wird. Koeffizientenvergleich liefert wegen der Homogenität der G_i und $\hat{G}_i$:

$$G_i(P) = \sum \gamma(f, P) \hat{G}_i(f)$$

Da auch die $\hat{G}_i(f)$ in aff f gemessen werden, ist $\hat{G}_i(f) = 0$ für $\dim f < i$ und für $\dim f \not\equiv i \bmod 2$. Also folgt für $i = d-1$ das schon von Ehrhart und McMullen bewiesene (j).

Für $i = d-2$ folgt die Gleichung in (k).

Beachtet man $\Delta_{d-2}(f) \geq 1$ und$\Sigma'' \gamma(f, P) V_{d-2}(f) = V_{d-2}(P)$ so ist (k) bewiesen.

Man kann analog für $d-3$ usw.fortfahren, erhält jedoch keine übersichtlichen Relationen mehr.

(1) Ist u unimodulare Gittertransformation, so werden Gitterpolytope in volumengleiche Gitterpolytope überführt.

Für ein $g \in \mathbf{Z}^d$ und ein $P \in \mathfrak{P}^d$ gilt

$$g \in P \Leftrightarrow g' = u(g) \in P' = u(P)$$

Also

$$G(nP) = G(nP') \quad \text{für} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Daraus folgt (1).

(m) Sei $Q \in Q^d$ und o.E. $\dim Q = d$. Ist $q_i \in \mathbf{N}$ Kantenlänge von Q in x_i-Richtung, so gilt: $G(Q) = \prod_{i=1}^{d} (q_i + 1)$. Ist K_i eine Kante in x_i-Richtung, so ist $W(K_i) = q_i + 1$. Nach Hadwiger [11] gilt für totalorthogonale $A, B \in \mathfrak{P}^d$:

$$W(A+B) = W(A) W(B)$$

also ist: $W(Q) = \prod_{i=1}^{d} (q_i + 1)$.

Wird Q durch nQ, $n \geq 0$ ganz, ersetzt, so folgt der erste Teil von (m) wegen der Homogenität der G_i und V_i durch Koeffizientenvergleich.

(n) Für den d-dimensionalen Einheitswürfel C^d gilt: $\hat{G}(C^d) = V(C^d) = 1$. Mit $\hat{G}$, V einfach additiv folgt für $Q \in Q^d$ mit $\dim Q = d : \hat{G}(Q) = V(Q)$. Mit $n \geq 0$ ganz, $\hat{G}_d = V$ und der Homogenität der $\hat{G}_i$ folgt $\hat{G}_i(Q) = 0$ für $i < d$. (Folgt auch aus [19], Lemma 5).

Vor dem Beweis von (o) bis (z) werden ein paar einfache Definitionen benötigt: Zu $P \in \mathfrak{P}^d$ sei $G^0(P) = \operatorname{card}(\operatorname{relint} P \cap \mathbf{Z}^d)$. Nach Ehrhart [6] und MacDonald [17] ist

$$G^0(P) = \sum_{i=0}^{d} (-1)^{d-i} G_i(P)$$

(Ehrhartsches Reziprozitätsgesetz).

Ist weiter

$$\bar{G}(P) = \tfrac{1}{2}(G(P) + G^0(P))$$

und

$$\dot{G}(P) = \tfrac{1}{2}(G(P) - G^0(P))$$

so folgt

$$\bar{G}(P) = \sum_{\substack{i=0 \\ d-i \text{ gerade}}}^{d} G_i(P)$$

und

$$\dot{G}(P) = \sum_{\substack{i=0 \\ d-i \text{ ungerade}}}^{d} G_i(P)$$

Man beachte, daß $\dot{G}$ die halbe Gitterpunktanzahl des Randes angibt, also: $\dot{G}(P) = \frac{1}{2} G(\dot{P})$. Mit den G-Funktionalen werden jetzt 0) bis x) bewiesen:

(o) $\bar{G}$ zählt jeden Randpunkt von P mit $\frac{1}{2}$; $\hat{G}$ jeden Randpunkt g mit $ß(g, P)$ wobei $ß$ der Innenwinkel von g bezüglich P ist, also $ß \leq \frac{1}{2}$.

(p) folgt aus $G^0(P) \geq 0$.

(q) Sei $P = \{(x_1, \ldots, x_d) \mid |x_i| \leq q, i = 1, \ldots, d\}$, also nach (m):

$$V_{d-1}(P) = G_{d-1}(P)$$

Sei $Q=\operatorname{conv}\{P,\pm(q+1,\ldots,0),\ldots,\pm(0,\ldots,q+1)\}$, also $P\subset Q$. Da alle Facetten von Q einander gleich sind, folgt mit (j):

$$G_{d-1}(Q)=(q^2+1)^{-1/2}(q^2+1)^{1/2}\frac{1}{q}V_{d-1}(P)=\frac{1}{q}G_{d-1}(P)$$

(r) Sei $d=3$ (für $d>3$ lassen sich analoge P, Q konstruieren) Mit $A=\{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(1,1,0)\}$ ist $P=\operatorname{conv}\{A, A+(0,0,q)\}$ ein Prisma und $Q=\operatorname{conv.}\{3A-(1,1,0), A+(0,0,q)\}$ ein Pyramidenstumpf, also $P\subset Q$. Dann ist $G(P)=4(q+1)$

$$G_3(P)=q,\ G_2(P)=2q+1,\ G_1(P)=q+2$$

und

$$G(Q)=4(q+1)+12=4q+16$$
$$G_3(Q)=\tfrac{13}{3}q,\ G_2(Q)=9,\ G_1(Q)=6-\tfrac{1}{3}q$$

Also ist für $q\geq 4$ $G_1(P)>G_1(Q)$ und $G_2(P)>G_2(Q)$

(s) Dazu ein Beispiel: Sei

$$P_q=\operatorname{conv}\{(0,\ldots,0),(1,0,\ldots,0)\ldots,(0,\ldots,1,0),(1\ldots,1,q\}$$

Dann ist

$$G(P_q)=d+1,\ \bar{G}(P_q)=\tfrac{1}{2}(d+1)$$

und

$$V(P_q)=G_d(P_q)=\frac{q}{d\,!}$$

also $G_i(P_q)\to-\infty$ mit $q\to\infty$ für mindestens ein i mit $d-i$ gerade und $\hat{G}_i(P_q)\to-\infty$ mit $q\to\infty$ für mindestens ein i mit $d-i$ gerade.

(t) Sei $P=\operatorname{conv}\{0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(1,1,12)\}$ Dann ist $G(P)=4$, $\bar{G}(P)=G_3(P)+G_1(P)=2$ Wegen $V(P)=G_3(P)=2$ folgt $G_1(P)=0$. $\hat{G}(P)=G_3(P)+G_1(P)=2$ Wegen $V(P)=G_3(P)=2$ folgt $G_1(P)=0$.

(u) Beispiel: Sei $Q_q=\{(x_1\ldots,x_{d-1},0)\,|\,|x_i|\leq q,\ i=1,\ldots,d-1\}$ $q\in\mathbf{N}$ und

$P_q = \operatorname{conv}\{Q_q, (0, ., , 0, 1), (0, ., ., , 0, -1)\}$ eine Doppelpyramide Dann ist

$$G(P_q) = (2q+1)^{d-1} + 2, \; G^0(P_q) = (2q-1)^{d-1}$$

und

$$\bar{G}(P_q) = \tfrac{1}{2}[(2q+1)^{d-1} + (2q-1)^{d-1}] + 1 = (2q)^{d-1} + 0(q^{d-3})$$

Weiter ist

$$V(P_q) = G_d(P_q) = \frac{2}{d}(2q)^{d-1}$$

also $G_i(P_q) = O(q^{d-1})$ für mindestens ein $i < d$ mit $d - i$ gerade Andererseits ist $V_i(P_q) = O(q^i)$.

Also $V_i(P_q) < G_i(P_q)$ für mindestens ein $i < d$ mit $d - i$ gerade und q genügend groß. Analog für $\hat{G}_i$.

Wegen

$$\bar{W}(P_q) = \frac{2}{d}(2q)^{d-1} + O(q^{d-3})$$

und

$$G^0(P_q) = (2q-1)^{d-1}$$

folgt noch $G^0(P_q) > \bar{W}(P_q)$ für genügend große q.

(v) Sei $P_q = \{(x_1, \ldots, x_d) \mid 0 \leq x_i \leq q, \; i = 1, \ldots, j$ und $x_{j+1} = \ldots = x_d = 0\}$. Dann folgt (v) direkt aus (m) und der Dimensionsinvarianz der G_i.

(w) Sei $\lambda \in [0, 1]$ und

$$Q(\lambda) = \{(x_1, \ldots, x_{d-1}, 0) \mid 0 \leq x_i - \lambda \leq 1, \qquad i = 1, \ldots, d-1\}$$

Dann ist

$$G(Q(\lambda)) = 2^{d-1} \quad \text{für} \quad \lambda = 0 \text{ oder } \lambda = 1$$

und

$$G(Q(\lambda)) = 1 \quad \text{für} \quad \lambda \in (0, 1).$$

Ist $n \in \mathbf{N}$, so gilt weiter

$$G(nQ(\lambda)) = (n+1)^{d-1} \quad \text{für} \quad \lambda = \frac{i}{n}, \qquad i = 0, \dots, n$$

und

$$G(nQ(\lambda)) = n^{d-1} \quad \text{für} \quad \lambda \in (0, 1) \text{ sonst}$$

Sei jetzt $q \in \mathbf{N}$ und P_q folgendes schiefe Prisma:

$$P_q = \operatorname{conv}\{Q(0),\ Q(1) + (0, \dots, 0, q)\}$$

Dann ist

$$G(P_q) = 2^d + q - 1$$

und

$$V(P_q) = G_d(P_q) = q$$

Weiter ist mit einem $\lambda \neq i/n$, $i = 0, \dots, n$

$$\begin{aligned} G(nP_q) &= (n+1)G(nQ(0)) + n(q-1)G(nQ(\lambda)) \\ &= (n+1)^d + (q-1)n^d = qn^d + \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d}{i} n^i \end{aligned}$$

Also ist

$$G_d(P_q) = q \quad \text{und} \quad G_i(P_q) = \binom{d}{i} \qquad i = 0, 1, \dots, d-1$$

(x) Sei $P_q = \{(x_1, \dots, x_d) \mid 0 \le x_i \le q,\ i = 1, \dots, d-1,\ 0 \le x_d \le 1\}$. Dann ist

$$G(P_q) = 2(q+1)^{d-1}$$

und

$$G(nP_q) = (n+1)(nq+1)^{d-1}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Koeffizientenvergleich in n zeigt:

$$G_i(P_q)=\binom{d-1}{i}q^i+\binom{d-1}{i-1}q^{i-1}$$

also $G_i(P_q)\to\infty$, $i=1,\ldots,d$.

Andererseits ist

$$G^0(P_q)=\sum_{i=0}^{d}(-1)^{d-i}G_i(P_q)=0$$

Die Besonderheit dieser Aussage wird erst bei den Bemerkungen am Ende der Arbeit deutlich.

(y) Sei $S\in\mathfrak{P}^d$ eigentliches Gittersimplex mit den Ecken $0, x_1,\ldots,x_d$ und f die Facette mit den Ecken $0, x_1,\ldots,x_{d-1}$. Weiter seien P bzw. P' die durch $0, x_1,\ldots,x_d$ bzw. $0, x_1,\ldots,x_{d-1}$ aufgespannten Parallelepipede und $V_d(P)$, $V_{d-1}(P')$ die zugehörigen Volumina. Dann gilt $V_d(P)=hV_{d-1}(P')$ mit einem $h>0$.

Andererseits ist $h(\det\operatorname{aff} f)=h\Delta_{d-1}(f)\geq 1$, da das durch $0, x_1,\ldots,x_d$ erklärte Gitter Teilmenge von $\mathbf{Z}^d$ ist. Also ist

$$V_d(P)\geq\frac{V_{d-1}(P')}{\Delta_{d-1}(f)}$$

Mit

$$V_d(P)=d\,!\;V_d(S),\qquad V_{d-1}(P')=(d-1)\,!\;V_{d-1}(f)$$

folgt

$$dV_d(S)\geq\frac{V_{d-1}(f)}{\Delta_{d-1}(f)}.$$

Summation über die $d+1$ Facetten liefert mit h) und j) des Satzes:

$$(d+1)dG_d(S)\geq 2G_{d-1}(S)$$

Damit ist die Behauptung für Gittersimplices bewiesen. Ist $P\in\mathfrak{P}^d$ eigentlich, aber kein Gittersimplex, so läßt sich P zerlegen in eigentliche Gittersimplizes $P_i\in\mathfrak{P}^d$

$i=1,\dots,k$ Nach (a) und (b) ist

$$G_d(P)=\sum_{i=1}^{k} G_d(P_i)$$

$$G_{d-1}(P)=\sum_{i=1}^{k} G_{d-1}(P_i)-\sum_{1\le i<j\le k} G_{d-1}(P_i\cap P_j)$$

Wegen $P_i\cap P_j\in\mathfrak{P}^{d-1}$ ist $G_{d-1}(P_i\cap P_j)\ge 0$.

Also

$$G_{d-1}(P)\le\sum_{i=1}^{k} G_{d-1}(P_i)\le\binom{d+1}{2}\sum_{i=1}^{k} G_d(P_i)=\binom{d+1}{2}G_d(P)$$

(z) Ist $\dim P<d$, gilt die Aussage trivialerweise. Sei also $\dim P=d$. $\hat{G}$ und V sind einfach additiv. Da sich jedes eigentliche $P\in\mathfrak{P}^d$ in eigentliche Gitter-Simplizes S zerlegen läßt, deren einzige Gitterpunkte die Ecken sind, genügt es, die Behauptung dafür zu zeigen.

Es ist $V(S)\ge 1/d\,!$ und $\hat{G}(S)=\sum_{e_i}\alpha(e_i,S)$, wobei die Σ über alle Ecken e_i von S läuft und α der Innenwinkel von S in der Ecke e_i ist.

Nach einem Satz von Höhn [15] ist $\sum_{e_i}\alpha(e_i,S)\le\frac{1}{2}$ also $\hat{G}(S)\le\frac{1}{2}$ und damit

$$\hat{G}(S)\le\frac{d\,!}{2}V(S)$$

Andererseits sei

$$S_q=\operatorname{conv}\{0,\dots,0),(1,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1,0)\ (-q,\dots,-q,1)\}$$

also

$$V(S_q)=\frac{1}{d\,!}.$$

Ist $\alpha(0,S_q)$ der Innenwinkel von S_q im Ursprung, so gilt offenbar

$$\lim_{q\to\infty}\alpha(0,S_q)=\tfrac{1}{2},\quad\text{also}\quad\lim_{q\to\infty}\hat{G}(S_q)=\tfrac{1}{2}$$

d.h. das Ergebnis ist bestmöglich.

4. Bemerkungen und offene Probleme

Definiert man analog zu G^0, $\bar{G}$ und $\dot{G}$:

$$W^0(P)=\sum_{i=0}^{d}(-1)^{d-i}V_i(P)$$
$$\bar{W}(P)=\tfrac{1}{2}(W(P)+W^0(P))$$
$$\dot{W}(P)=\tfrac{1}{2}(W(P)-W^0(P))$$

so erhält man zwischen den diskreten G-Funktionalen und den stetigen W-Funktionalen eine Fülle von Euler-Typ-Relationen analog (*) worauf wir nicht näher eingehen.

Aus (1) folgt für $Q\in Q^d$:

$G(Q)=W(Q)$, $G^0(Q)=W^0(Q)$, $\bar{G}(Q)=\bar{W}(Q)$, $\dot{G}(Q)=\dot{W}(Q)$ und $\hat{G}(Q)=V(Q)$

Die naheliegende Frage, ob wenigstens im E^3 Ungleichungen analog zu $G\leq W$ bestehen, läßt sich weitgehend verneinen.

Einfache Beispiele (s.z.B. Beweis zu u)) zeigen schon für den $E^3:\hat{G}\nleq V$ und $G^0\nleq W^0$

Dagegen folgen direkt aus (h) bis (k) drei Ergebnisse, die schon vorher von anderen Autoren mit anderen Methoden gefunden wurden:

KOROLLAR. *Für $P\in\mathfrak{P}^d$ gilt*

(a)	$\dot{G}(P)\leq\dot{W}(p)$, $d\leq 3$	(Ehrhart)
(b)	$\mathrm{G(P)-\hat{G}(P)\leq W(P)-V(P)}$, $\mathrm{d}\leq 3$	(Hadwiger)
(c)	$\mathrm{\bar{G}(P)-\hat{G}(P)\leq\bar{W}(P)-V(P)}$, $\mathrm{d}\leq 4$	(Bokowski)

Teil (q) besagt mehr als die Nicht-Monotonie. Z.B. ist V/F nicht monoton, jedoch im folgenden Sinne "quasi-monoton" [28]

$$AcB\Rightarrow\frac{V}{F}(A)\leq d\frac{V}{F}(B)$$

Teil (q) zeigt, daß G_{d-1} nicht einmal "quasi-monoton" ist. Teil(s) des Satzes klärt ein von McMullen 1976 in Oberwolfach gestelltes Problem (Definitheit der G_i), Teil (u) widerlegt eine in [18] geäußerte Vermutung.

(v) zeigt, daß sich die G_i ähnlich wie die V_i verhalten.

(w) zeigt, daß die G_i keiner isoperimetrischen Ungleichung genügen. Außerdem gibt (w) eine nichtbeschränkte Folge an, bei der alle G_i außer G_d konstant sind.

(y) zeigt, daß das Verhalten in (v) nur für uneigentliche $P \in \mathfrak{P}^d$ gilt. Die Ungleichung in (y) zeigt ein Verhalten der G_i, das die V_i nicht besitzen. Das Beispiel in (z) zeigt eine Folge von Gitterpolytopen mit $V_d = 1/d\,!$ und $V_{d-1} \to \infty$.

Abschliessend eine Bemerkung zu (x). Nach (x) gibt es eine Folge P_q mit $G^0(P_q) = 0$ und $G_i(P_q) \to \infty$, d.h. G^0 und G sind völlig unabhängig voneinander. Anscheinend gibt es jedoch kein $n \in \mathbf{N}$ mit einer zugehörigen Folge P'_q mit $G^0(P'_q) = n$ und $G(P'_q) \to \infty$. Einiges spricht dafür, daß im Fall $G^0(P) > 0$ folgende Ungleichung zwischen G^0 und G besteht:

$$G(P) \leq \binom{2d-1}{d-1}(G^0(P)-1) + \binom{2d+1}{d} \tag{**}$$

Die Faktoren erhält man wie folgt:

Ist $S_q^d = \operatorname{conv}\{(0, \ldots, 0), (q, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, q)\}$ das achsenorientierte Simplex, so liefert Induktion nach q und d:

$$G(S_q^d) = \binom{d+q}{d}$$

Insbesondere ist

$$G(S_{d+1}^d) = \binom{2d+1}{d} \quad \text{und} \quad G^0(S_{d+1}^d) = 1$$

und vermutlich gilt: Für ein $P \in \mathfrak{P}^d$ mit

$$G^0(P) = 1 \quad \text{ist} \quad G(P) \leq \binom{2d+1}{d};$$

das Analogon zu Minkowskis Satz ([21]S. 79):

Für einen zentralsymmetrischen konvexen Körper K mit $G^0(K) = 1$ ist $G(K) \leq 3^d$.

Für $d = 2$ ist (**) von Scott [26] bewiesen worden.

Dasselbe Phänomen hat Ehrhart wohl dazu geführt, folgende Erweiterung des am Anfang zitierten Minkowskischen Fundamentalsatzes zu vermuten und für $d = 2$ zu beweisen ([6]S. 144 oder [16]S. 45).

Für einen konvexen Körper $K c E^d$ mit Schwerpunkt in $\mathbf{Z}^d$ gilt: Aus

$$V(K) \geqslant \frac{(d+1)^d}{d\,!} \quad \text{folgt} \quad G(K) \geq 2.$$

(z) ist das Analogon zu dem am Anfang dieser Arbeit erwähnten Satz von Blichfeldt. Eine analoge Vermutung zu $G \leq W$ ist für $\hat{G}$ nicht bekannt.

Speziell für $P \in \mathfrak{P}^d$ spricht einiges für die Vermutung

$$V(P) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{d}\right) F(P) \leq \hat{G}(P)$$

die für $d = 2$ gilt und für Gitterpolytope eine Verschärfung des Hadwigerschen Gitterpunktsatzes darstellen würde.

LITERATUR

[1] Betke U., *Zu einem Abstandsintegral von Hadwiger*, Arch. Math. *29* (1977), 208–209.

[2] Bokowski J., *Gitterpunktanzahl und Parallelkörpervolumen von Eikörpern*, Monatshefte Math. *79* (1975), 93–101.

[3] ——, Hadwiger H. und Wills J. M., *Eine Ungleichung zwischen Volumen, Oberfläche und Gitterpunktanzahl konvexer Körper im n-dimensionalen euklidischen Raum.* Math. Z. *127* (1972), 363–364.

[4] ——, ——, ——, *Eine Erweiterung der Croftonschen Formeln für konvexe Körper*, Mathematika *23* (1976), 212–219.

[5] Bokowski J. und Wills J. M., *Eine Ungleichung zwischen Volumen, Oberfläche und Gitterpunktanzahl konvezer Mengen im R^3.* Acta Math. Acad. Sci. Hung. *25* (1974), 7–13.

[6] Ehrhart E., *Polynômes arithmétiques et Méthode des Polyèdres en Combinatoire*, Birkhäuser, Basel (1977).

[7] Hadwiger H., *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg, (1957).

[8] ——, *Über Gitter und Polyeder*, Monatshefte Math. *57* (1953), 246–254.

[9] ——, *Volumen und Oberfläche eines Eikörpers, der keine Gitterpunkte überdeckt.* Math. Z. *116* (1970), 191–196.

[10] ——, *Gitterperiodische Punktmengen und Isoperimetrie* Monatshefte Math. *76* (1972), 410–418.

[11] ——, *Das Wills'sche Funktional*, Monatsh. Math. *79* (1975), 213–221.

[12] ——, Wills J. M., *Über Eikörper und Gitterpunkte im gewöhnlichen Raum.* Geometriae dedicata *2* (1973), 255–260.

[13] ——, ——, *Gitterpunktanzahl konvexer Rotationskörper*, Math. Ann. *208* (1974), 221–232.

[14] ——, ——, *Neuere Studien über Gitterpolygone*, reine angew. Math. *280* (1976), 61–69.

[15] Höhn W., *Winkel und Winkelsumme im n-dimensionalen euklidischen Simplex*, Dissertation, Zürich (1953).

[16] Lekkerkerker C. G., *Geometry of numbers.* Wolters-Noordhoff Groningen (1969).

[17] MacDonald I. G., *The volume of a lattice polyhedron*, Proc. Camb. Phil. Soc. *59* (1963), 719–726.

[18] McMullen P., *Non-linear angle sum relations for polyhedral cones and polytopes*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. *78* (1975), 247–261.
[19] ——, *Valuations and Euler-type relations on certain classes of convex polytopes*, Proc. London Math. Soc. *35* (3) (1977).
[20] ——, Wills J. M., *Zur Gitterpunktanzahl auf dem Rand konvexer Körper*, Monatsh. Math. *77* (1973), 411–415.
[21] Minkowski H., *Geometrie der Zahlen*, Teubner, Leipzig (1910).
[22] Overhagen T., *Zur Gitterpunktanzahl konvexer Körper im 3-dimensionalen euklidischen Raum* (Dissert. auszug), Math. Ann. *216* (1975), 217–224.
[23] Pick G., *Geometrisches zur Zahlenlehre.* Naturwiss. Z. Lotos, Prag (1899), 311–319.
[24] Reeve J. E., *On the volume of lattice polyhedra*, Proc. London Math. Soc. III, 7 (1957), 378–395.
[25] Schmidt W. M., *Volume, surface area and the number of integer points covered by a convex set.* Arch. Math. *23* (1972), 537–543.
[26] Scott P. R., *On convex lattice polygons*, Bull. Austral. Math. Soc. *15* (1976), 395–399.
[27] Shephard G., *Euler-type relations for convex polytopes*, Proc. London Math. Soc. (3) *18* (1968), 597–606.
[28] ——, *The Steiner point of a convex polytope*, Canad. J. Math. *18* (1966), 1294–1300.
[29] ——, *The mean width of a convex polytope*, J. London Math. Soc. *43* (1968), 207–209.
[30] Wills J. M., *Zum Verhältnis von Volumen zu Oberfläche bei konvexen Körpern*, Arch. Math. *21* (1970), 557–560.
[31] ——, *Zur Gitterpunktanzahl konvexer Mengen*, Elemente Math. *28* (1973), 57–63.
[32] ——, *Ein Satz über konvexe Mengen und Gitterpunkte*, Monatsh. Math. *72* (1968), 451–463.
[33] ——, *Ein Satz über konvexe Körper und Gitterpunkte* Abh. Math. Sem. Hamburg *35* (1970), 8–13.
[34] Bernstein D. N., *The number of integral points in integral polyhedra*, Functional Analysis and its Applications *10* (3) (1976), 223–224.
[35] Hammer J., *Unsolved problems concerning lattice points*, Pitman, London, 1977.

Lehrstuhl für Mathematik II
GH Siegen
Hölderlinstr. 3
59 *Siegen* 21

Eingegangen den 26. Juli 1977