Ein Beitrag zur Whitney-Regularität im unendlichdimensionalen Fall.

Autor(en): **Reiffen, Hans-Jörg / Trapp, Heinz Wilhelm**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **54 (1979)**

PDF erstellt am: **05.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-41568

Comment. Math. Helvetici **54** (1979) 159–172 Birkhäuser Verlag, Basel

Ein Beitrag zur Whitney-Regularität im unendlichdimensionalen Fall

Hans-Jörg Reiffen und Heinz Wilhelm Trapp

Die Theorie der Whitney-Stratifikationen hat in den letzten Jahren große Bedeutung gewonnen, vor allem in der topologischen Stabilitätstheorie (vgl. z.B. [2]) und in der analytischen Geometrie (vgl. z.B. [8]). Wir untersuchen in dieser Arbeit Whitney-Stratifikationen im unendlichdimensionalen Fall, genauer: im Falle von Hilberträumen. Die Koordinaten- und Kompaktheitsargumente der endlichdimensionalen Theorie ersetzen wir dabei durch eine genauere Betrachtung der mit der Geometrie gegebenen Operatoren.

In §1 beschreiben wir die Situation, die wir in dieser Arbeit betrachten. Wir beschränken uns i.w. auf die Grundsituation zweier Strata; die Betrachtungen können jedoch auf allgemeinere Stratifikationen mit "mehr" Strata ausgedehnt werden. Allerdings ist bei unseren Methoden die Forderung wichtig, daß alle Strata, mit Ausnahme der minimalen, eine endliche Kodimension besitzen.

In §2 folgen wir zunächst den Überlegungen von Hironaka [3] und leiten für den Fall der strikten Whitney-Regularität eine übersichtliche Darstellung des Normalenkegels ab (Satz 2.5). Dabei wird insbesondere eine Verallgemeinerung des key lemma von Hironaka bewiesen. Sodann leiten wir eine Polarkoordinatendarstellung ab, welche die vorausgesetzte Whitney-Regularität respektiert (Satz 2.10). Im Falle der strikten Whitney-Regularität mit dem Exponenten 1 besitzt die Polarkoordinatendarstellung die schwache Form der Lipschitz-Stetigkeit, welche Verdier [8] eingeführt hat. Unser Ergebnis stellt eine unendlichdimensionale Variante des ersten Isotopie-Lemmas von Thom [2] dar.

In §3 wenden wir unsere Untersuchungen auf Banach-analytische Mengen endlicher Definition an (vgl. [4], [5]) und erhalten unter Benutzung von Ergebnissen von Schickhoff, daß die strikte Whitney-Regularität Normal-Pseudoflachheit und damit konstante Multiplizität impliziert (Satz 3.1). Ferner erhalten wir eine Variante eines Satzes von Stutz [6] über Äquisingularität (3.3).

§1. Vorbereitungen

Mit $\mathcal{G}(E)$ bezeichnen wir die Menge der Untervektorräume des vorgegebenen

Banachraumes E (mit der Norm $| \, |$). Unter einem Untervektorraum von E verstehen wir dabei stets einen direkten Summanden von E. $\mathscr{G}(E)$ trägt in natürlicher Weise die Struktur einer analytischen Mannigfaltigkeit [1].

Lineare Abbildungen werden stets als stetig, Isomorphismen als Homöomorphismen vorausgesetzt. Mit $GL\ E$ bezeichnen wir die Menge der Isomorphismen von E auf E. Für $M, N \in \mathscr{G}(E)$ mit $E = M \oplus N$ bezeichnet $p_{M,N}$ die natürliche Projektion von E auf N längs M.

1.1 *Bezeichnungen.* Für jede natürliche Zahl p bezeichnet $\mathscr{G}_p(E)$ die Menge der Untervektorräume von E der Dimension p, $\mathscr{G}^p(E)$ die Menge der Untervektorräume der Kodimension p. Außerdem sei

$$\mathscr{G}^*(\mathrm{E}) := \{\mathrm{M} \in \mathscr{G}(\mathrm{E}) : \{0\} \neq \mathrm{M} \neq \mathrm{E}\}.$$

$\mathscr{G}_p(\mathrm{E})$ und $\mathscr{G}^p(E)$ sind Zusammenhangskomponenten von $\mathscr{G}(E)$.

Douady [1] und Whitney [9] haben folgende Abstandsgrößen eingeführt:

1.2 DEFINITION. Seien $M, N \in \mathscr{G}^*(E)$, $x \in E$ mit $x \neq 0$. Dann sei

$$\alpha(x, N) := \inf\left\{ \left| \frac{x}{|x|} - y \right| : y \in N, |y| \leq 1 \right\},$$

$$\alpha(M, N) := \sup\{\alpha(x, N) : x \in M, |x| = 1\},$$

$$\Delta(M, N) := \max\{\alpha(M, N), \alpha(N, M)\}.$$

1.3 Es gilt:

1. $\alpha(M, N) = 0 \Leftrightarrow M \subset N$
2. Δ ist eine Metrik auf $\mathscr{G}^*(E)$, welche die Topologie erzeugt.
3. $\alpha : \mathscr{G}^*(E) \times \mathscr{G}^*(E) \to \mathbf{R}$ ist stetig.

Im weiteren sei E ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $\langle \, , \, \rangle$; $\perp$ bezeichne die Orthogonalität in E.

1.4 *Bezeichnungen.* Für $M \in \mathscr{G}(E)$ und $x \in E$ sei

$$p_M := p_{M^\perp, M},\ p_M^\perp := p_{M, M^\perp};\ x_M := p_M(x),\ x_M^\perp := p_M^\perp(x).$$

Man zeigt:

1.5 SATZ. *Die Parallel- und die Orthogonalprojektion*

$$\mathscr{G}(E) \to L(E, E),\ M \mapsto p_M;\ \mathscr{G}(E) \to L(E, E),\ M \mapsto p_M^\perp,$$

sind reell-analytisch.

Aus 1.2 folgt sofort:

1.6 Für $M, N \in \mathscr{G}^*(E)$ ist

$$\alpha(M, N) = \sup\left\{\frac{|\langle x, y\rangle|}{|x|\,|y|} : x \in M,\ x \neq 0;\ y \in N^\perp,\ y \neq 0\right\}.$$

Auf $\mathscr{G}_p(E)$ und auf $\mathscr{G}^p(E)$ stimmen Δ und α überein (vgl. [9]).

Wir legen nun die Grundsituation fest, die wir im folgenden studieren.

1.7 *Ausgangssituation.* Es sei E ein $\mathbf{R}$-Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $< \, , \, >$, $\dot{E}, \ddot{E} \in \mathscr{G}^*(E)$ mit $E = \dot{E} \oplus \ddot{E}$. Für $x \in E$ gilt dann $x = \dot{x} + \ddot{x}$, mit $\dot{x} \in \dot{E}$ und $\ddot{x} \in \ddot{E}$. Seien $\dot{U} \subset \dot{E}$, $\ddot{U} \subset \ddot{E}$ nichtleere offene Nullumgebungen. Wir setzen:

$$U := \dot{U} + \ddot{U}, \quad Y := \dot{U} + \{0\} = \dot{U}.$$

Ferner sei $X \subset U$ eine in U abgeschlossene Teilmenge, derart daß $X - Y$ eine rein q-codimensionale direkte (C^∞ – bzw. reellanalytische) Mannigfaltigkeit ist, und Y im topologischen Abschluß jeder Zusammenhangskomponente von $X - Y$ liegt. Wir definieren Funktionen $a : X - Y \to \mathbf{R}$, $b : X - Y \to \mathbf{R}$ durch

$$a(x) := \alpha(\dot{E}, T(X, x)), \quad b(x) := \alpha(\ddot{x}, T(X, x)).$$

Dabei bezeichnet $T(X, x) \in \mathscr{G}^q(E)$ den Tangentialraum an X in x.

Uns interessieren nur Mengenkeime. Daher lassen wir ohne besonderen Hinweis Verkleinerungen von $\dot{U}$ und $\ddot{U}$ zu.

1.8 DEFINITION. X heißt längs Y Whitney-regulär, wenn zwei monoton wachsende, in 0 stetige Funktionen e und ε mit den Eigenschaften

$$e(0) = \varepsilon(0) = 0; \ e(t) > 0, \ \varepsilon(t) > 0 \ \forall\, t > 0;$$

auf $\mathbf{R}_+ := \{t \in \mathbf{R} : t \geq 0\}$ existieren, derart daß gilt:

$$a(x) \leq e(|\ddot{x}|), \qquad b(x) \leq \varepsilon(|\ddot{x}|) \ \forall x \in X - Y.$$

Wir setzen voraus, daß X längs Y Whitney-regulär ist. Dabei dürfen wir $\ddot{E} = \dot{E}^\perp$ annehmen.

Im folgenden sei $r>0$ und $0<c<1$ mit $e(r)\leq c$, $\varepsilon(r)\leq c$. Wir setzen voraus:

$$|\ddot{x}|\leq r \ \forall x\in U.$$

1.9 SATZ. *Für die Abbildung*

$$T: X-Y\to L(\dot{E},\dot{E}),\ T(x):=p_{\ddot{E},\dot{E}}p_{T(X,x)}|\dot{E},$$

gilt (*mit* $\mathbf{1}:=id_{\dot{E}}$):

$$T(x)\in GL\,\dot{E},\ |T(X)^{-1}-\mathbf{1}|\leq\frac{1}{1-c}\,e(|\ddot{x}|)\quad x\in X-Y.$$

Beweis. Sei $x\in X-Y$ fest. Wir setzen dann für $v\in E$:

1.10 $\quad v_{\|}:=p_{T(X,x)}v, \qquad v_{\perp}:=p^{\perp}_{T(X,x)}v.$
Dann ist für $v\in\dot{E}$:

$$v_{\|}=(v-(v_{\perp})^{\cdot})-(v_{\perp})^{\cdot\cdot},\qquad T(x)v=v-(v_{\perp})^{\cdot};$$

$$|(v_{\perp})^{\cdot}|^2=|<(v_{\perp})^{\cdot},v_{\perp}>|\leq e(|\ddot{x}|)|(v_{\perp})^{\cdot}|\,|v_{\perp}|,$$

also

$$|\mathbf{1}-T(x)|\leq e(|\ddot{x}|)\leq c.$$

1.11 *Für* $y\in Y$ *sei* $X_y:=X\cap(y+\ddot{E})$. $X_y-\{y\}$ *ist eine abgeschlossene* C^∞- *bzw. reell-analytische Mannigfaltigkeit in* $(y+\ddot{U})-\{y\}$. *Für* $x\in X-Y$ *ist*

$$T(X_{\dot{x}},x)=T(X,x)\cap\ddot{E}.$$

1.12 SATZ. *Für die Funktion*

$$B: X-Y\to\mathbf{R},\qquad B(x):=\alpha(\ddot{x},T(X_{\dot{x}},x)),$$

gilt:

$$B(x)\leq\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}\,\varepsilon(|\ddot{x}|)\ \forall x\in X-Y.$$

Beweis. Zu jedem Vektor $u \in T(X_{\dot{x}}, x)^{\perp}$ gibt es eine eindeutig bestimmte Darstellung

$$u = .u + {}_{\perp}u \text{ mit } .u \in \dot{E},\ {}_{\perp}u \in T(X, x)^{\perp}.$$

Im Spezialfall $u \in T(X_{\dot{x}}, x)^{\perp} \cap \ddot{E}$ haben wir

$$|_{\perp}u|^2 = |.u|^2 + |u|^2.$$

Daraus folgt aufgrund der Whitney-Regularität die Behauptung.

1.13 *Für* $\rho > 0$ *sei* $S^{\rho}(\ddot{E}) := \{z \in \ddot{E} : |z| = \rho\}$,

$$U^{\rho} := \dot{U} + S^{\rho}(\ddot{E}), \qquad X^{\rho} := X \cap U^{\rho}.$$

Dann ist X^{ρ} *eine abgeschlossene* $C^{\infty}-$ *bzw. reell-analytische Mannigfaltigkeit in* U^{ρ}. *Für* $x \in X - Y$ *ist*

$$T(X^{|\ddot{x}|}, x) = T(X, x) \cap (\mathbf{R}\ddot{x})^{\perp}.$$

Gelegentlich lassen wir in 1.13 auch $\rho = 0$ zu.

1.14 SATZ. *Für die Funktion*

$$A : X - Y \to \mathbf{R}, \qquad A(x) := \alpha(\dot{E}, T(X^{|\ddot{x}|}, x)),$$

gilt:

$$A(x) \leq \left(1 + \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}}\right) e(|\ddot{x}|)\ \forall x \in X - Y.$$

Beweis. Zu jedem Vektor $u \in T(X^{|\ddot{x}|}, x)^{\perp}$ gibt es eine eindeutig bestimmte Darstellung

$$u = a_u \ddot{x} + {}_{\perp}u \text{ mit } a_u \in \mathbf{R},\ {}_{\perp}u \in T(X, x)^{\perp}.$$

Daraus folgt mit 1.10 unter Benutzung der Whitney-Regularität:

$$|_{\perp}u| \leq |u| \left(1 + \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}}\right).$$

Wir gehen im weiteren davon aus, daß für

$$l := \left(1 + \frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\right)e, \qquad \lambda := \frac{1}{\sqrt{1-c^2}}\,\varepsilon$$

gilt: $l(r) \leq \gamma$, $\lambda(r) \leq \gamma$, wobei $0 < \gamma < 1$ ist.

1.15 SATZ. *Fur die Abbildung*

$$\tau : X - Y \to L(\dot{E}, \dot{E}), \ \tau(x) := p_{\dot{E},\dot{E}}\, p_{T(X^{|\dot{x}|},x)} \mid \dot{E}$$

gilt (*mit* $\mathbf{1} := id_{\dot{E}}$):

$$\tau(x) \in GL\,\dot{E}, \ |\tau(x)^{-1} - \mathbf{1}| \leq \frac{1}{1-\gamma}\, l(|\dot{x}|) \quad x \in X - Y.$$

Beweis. Sei $x \in X - Y$ fest. Wir setzen dann für $v \in E$:

1.16 $v^{\parallel} := p_{T(X^{|\dot{x}|},x)} v, \qquad v^{\perp} := p^{\perp}_{T(X^{|\dot{x}|},x)} v.$

Die weiteren Überlegungen sind dann wie unter 1.9.

§2. Der Normalenkegel, eine Polarkoordinatendarstellung

Wir definieren zwei charakteristische Vektorfelder, eines "in Richtung" von $\dot{E}$, eines "normal" zu $\dot{E}$.

2.1 DEFINITION. Das Vektorfeld π auf $X - (Y \cup X_0)$ sei definiert durch

$$\pi(x) := \left(\tau(x)^{-1}\left(\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}\right)\right)^{\parallel} \in T(X^{|\dot{x}|}, x).$$

Das Vektorfeld ν auf $X - Y$ sei definiert durch

$$\nu(x) := \frac{|\ddot{x}|}{|{}^{\parallel}(\ddot{x})|^2}\, {}^{\parallel}(\ddot{x}) \in T(X_{\dot{x}}, x).$$

Dabei sei für $x \in X - Y$, $v \in E$

$${}^{\parallel}v := p_{T(X_{\dot{x}},x)} v, \qquad {}^{\perp}v := p^{\perp}_{T(X_{\dot{x}},x)} v.$$

Im folgenden seien $\dot{s}>0$, $\ddot{s}>0$ die Radien abgeschlossener Kugeln um den Nullpunkt in $\dot{E}$ bzw. $\ddot{E}$, die ganz in $\dot{U}$ bzw. $\ddot{U}$ liegen. Mit Standardschlüssen (vgl. [3]) zeigt man dann:

2.2 SATZ. (a) *Zu jedem* $x \in X-Y$ *mit* $0<|\dot{x}|<\dot{s}$, $0<|\ddot{x}|<\ddot{s}$ *gibt es einen Weg* $w:[0, \dot{s}] \to X^{|\ddot{x}|}$ *mit folgenden Eigenschaften:*

1. $|\dot{w}(t)|=t \quad \forall t \in [0, \dot{s}]$, $w(|\dot{x}|)=x$.
2. $w|]0, \dot{s}]$ *ist eine* $C^\infty-$ *bzw. reell-analytische Abbildung, und* $w'(t)=\pi(w(t)) \quad \forall t \in]0, \dot{s}]$.

Der Weg w *ist durch* $w'=\pi \circ w$, $w(|\dot{x}|)=x$ *als Keim eindeutig bestimmt. Für* w *gilt ferner:*

$$|w(t_1)-w(t_2)| \leq \frac{1}{1-\gamma}|t_1-t_2| \qquad \forall t_1, t_2 \in [0, \dot{s}].$$

(b) *Zu jedem* $x \in X-Y$ *mit* $|\dot{x}|<\dot{s}$, $0<|\ddot{x}|<\ddot{s}$ *gibt es einen Weg* $W:[0, \ddot{s}] \to X_{\dot{x}}$ *mit folgenden Eigenschaften:*

1. $|\ddot{W}(t)|=t \qquad \forall t \in [0, \ddot{s}]$, $W(|\ddot{x}|)=x$.
2. $W|]0, \ddot{s}]$ *ist eine* $C^\infty-$*bzw. reell-analytische Abbildung, und*

$$W'(t)=\nu(W(t)) \qquad \forall t \in]0, \ddot{s}].$$

Der Weg W *ist durch* $W'=\upsilon \circ W$, $W(|\ddot{x}|)=x$ *als Keim eindeutig bestimmt. Für* W *gilt ferner:*

$$|W(t_1)-W(t_2)| \leq \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}}|t_1-t_2| \qquad \forall t_1, t_2 \in [0, \ddot{s}].$$

Die folgende Aussage ist eine unendlichdimensionale Variante des key lemma von Hironaka [3].

2.3 SATZ. *Es gebe Zahlen* $C, \kappa>0$ *mit*

$$\varepsilon(t) \leq Ct^\kappa \qquad \forall t \in [0, r].$$

Ist dann W *ein Weg zu einem Punkt* $x \in X-Y$ *gemäß* 2.2,b), *so gilt für alle Zahlen* t_1, t_2 *mit* $0<t_1<t_2 \leq \ddot{s}$:

$$\left|\frac{\ddot{W}(t_2)}{t_2}-\frac{\ddot{W}(t_1)}{t_1}\right| \leq \frac{C}{\kappa\sqrt{1-c^2}\sqrt{1-\gamma^2}}t_2^\kappa.$$

Insbesondere ist W *in* 0 *differenzierbar.*

Beweis.[1] Wir können von $\dot{x}=0$ ausgehen. Dann ist $\dot{W}=0$ und $W=\ddot{W}$. Wir haben:

$$\left|\frac{W(t_2)}{t_2}-\frac{W(t_1)}{t_1}\right| \le \int_{t_1}^{t_2} \left|\frac{d}{du}\frac{W(u)}{u}\right| du,$$

$$\left|\frac{d}{du}\frac{W(u)}{u}\right|^2 = \frac{|^{\perp}W(u)|^2}{|^{\parallel}W(u)|^2\,|W(u)|^2}$$

und damit aufgrund von 1.12:

$$\left|\frac{d}{du}\frac{W(u)}{u}\right| \le \frac{C}{\sqrt{1-c^2}\sqrt{1-\gamma^2}}\,u^{\kappa-1}.$$

2.4 DEFINITION. Ein Vektor $v\in E$ heißt ein Normalenvektor an X auf Y in $y\in Y$, wenn es Folgen $(a_n)_{n\in N}$ in $\mathbf{R}$ und $(x_n)_{n\in \mathbf{N}}$ in X gibt, so daß gilt:

$$x_n \to y,\ a_n\ddot{x}_n \to v.$$

Kann man die Folgenglieder a_n positiv wählen, so heißt v ein spezieller Normalenvektor.

In naheliegender Weise definiert man den *Normalenkegel* $C(X, Y)$ bzw. den *speziellen Normalenkegel* $C^+(X, Y)$ an X längs Y.

2.5 SATZ. *Unter den Voraussetzungen von* 2.3 *und* $0<s_0<\ddot{s}$ *sei für jedes* $x\in X^{s_0}$ $W_x:[0,\ddot{s}]\to X_{\dot{x}}$ *der Weg zu* x *gemäß* 2.2,b), *und* $g: X^{s_0}\to C^+(X, Y)$ *diejenige Abbildung, welche jedem* $x\in X^{s_0}$ *den Geschwindigkeitsvektor* (dW_x/dt) (0) *zuordnet. Für jedes* $y\in Y$ *ist dann* $g(X_y\cap X^{s_0})$ *dicht in* $C^+(X, Y, y)$.

Beweis. Sei $v\in C^+(X, Y, 0)$, $|v|=1$, und seien $\delta, \eta, \theta\in\mathbf{R}$, $0<\delta$, $0<\eta<\dot{s}$, $0<\theta<\ddot{s}$. Dann existiert ein Punkt x in $X-Y$ mit

$$\left|v-\frac{\ddot{x}}{|\ddot{x}|}\right|\le\delta,\qquad |\dot{x}|\le\eta,\qquad |\ddot{x}|\le\theta.$$

Nun betrachten wir einen Weg W_1 durch x gemäß 2.2,b), einen Weg w durch $W_1(\theta)$ gemäß 2.2,a) und einen Weg W_2 durch $w(0)$ gemäß 2.2,b). Es ist dann mit

---

[1] Unser Beweis beruht auf einer Idee von S. Koenen.

gewissen positiven Konstanten Γ, Δ:

$$\left| v - \frac{dW_2}{dt}(0) \right| \leq \delta + \Gamma\theta^{\kappa} + \Delta \frac{\eta}{\theta}.$$

2.6 DEFINITION. X heißt längs Y strikt Whitney-regulär, wenn man e und ε als Funktionen folgenden Typs wählen kann:

$$e(t) = Ct^k, \qquad \varepsilon(t) = Ct^{\kappa} \qquad \forall t \in \mathbf{R}_+,$$

wobei C, k, κ positive Zahlen sind und $k \leq 1$ ist. Die Zahl k heißt Exponent der Whitney-Regularität.

Im folgenden setzen wir $X - Y$ als C^∞-Mannigfaltigkeit voraus. Wir wollen für $X - X_0$ eine Produktdarstellung von der Form $(Y - \{0\}) \times X_0$ herleiten.

Da die Abbildung

$$D: X - Y \to \mathbf{R} \times Y, x \mapsto (|\ddot{x}|^2, \dot{x}),$$

eine Submersion ist, haben wir:

2.7 *Zu $x \in X - Y$ existieren eine offene Umgebung V von x in $U - Y$, eine Zerlegung $E = \mathbf{R} \oplus \dot{E} \oplus {}^{\|}E \oplus E^{\|}$, mit ${}^{\|}E, E^{\|} \in \mathscr{G}(E)$, offene Kugeln $\tilde{V}, \dot{V}, {}^{\|}V, V^{\|}$ in $\mathbf{R}, \dot{E}, {}^{\|}E, E^{\|}$ und ein Diffeomorphismus*

$$\phi: V \to \tilde{V} \times \dot{V} \times {}^{\|}V \times V^{\|},$$

so daß gilt: $\phi(X \cap V) = \tilde{V} \times \dot{V} \times {}^{\|}V \times \{0\}$ *und*

$$|(\phi^{-1})^{\cdot\cdot}|^2 = p_{\dot{E} \oplus {}^{\|}E \oplus E^{\|}, \mathbf{R}}, \qquad (\phi^{-1})^{\cdot} = p_{\mathbf{R} \oplus {}^{\|}E \oplus E^{\|}, \dot{E}}.$$

2.8 SATZ. *Es existiert eine stetige Abbildung $P: U \to L(\dot{E}, E)$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. $P(x): \dot{E} \to T(U^{|\ddot{x}|}, x) \qquad \forall x \in U - Y,$
   $P(x): \dot{E} \to T(X^{|\ddot{x}|}, x) \qquad \forall x \in X - Y;$
2. $p_{\dot{E}, \dot{E}} P(x) = \mathbf{1} \qquad \forall x \in U, \qquad P(y) = \mathbf{1} \qquad \forall y \in Y;$
3. $P \mid U - Y$ *ist eine* C^∞*-Abbildung;*
4. $|P(x) - \mathbf{1}| \leq \dfrac{2}{1-\gamma} l(2|\ddot{x}|) \qquad \forall x \in U.$

Dabei bezeichnet $\mathbf{1}$ *die Injektion von* $\dot{E}$ *in* E.

Beweis. Wir beginnen mit lokalen Betrachtungen. Sei $x \in X - Y$. Wir legen die Bezeichnungen aus 2.7 zugrunde und kürzen ab:

$$E^{|} := \mathbf{R} \oplus \dot{E} \oplus {}^{\|}E, \qquad V^{|} := \tilde{V} \times \dot{V} \times {}^{\|}V.$$

Wir definieren eine C^∞-Abbildung $Q: V \to L(\dot{E}, E)$ durch

$$Q(u)v := d_u\phi^{-1}(d_{u^{|}}\phi((\tau(u^{|})^{-1}v)^{\|})), \qquad u^{|} := \phi^{-1}p_{E^{\|}, E^{|}}\phi(u).$$

Dann gilt für $u \in V$, $v \in \dot{E}$ und $\rho := |\ddot{u}| : Q(u)v \in T(U^\rho, u)$ bzw. $Q(u)v \in T(X^\rho, u)$ im Falle $u \in X \cap V$.

Wir dürfen annehmen, daß für $q := p_{\dot{E}, \dot{E}}Q$ gilt:

$$q(u) \in GL\,\dot{E} \qquad u \in V.$$

Dann gelten für $P: V \to L(\dot{E}, E)$, mit $P(u) := Q(u)q(u)^{-1}\ \forall u \in V$, die Aussagen 1., 2. und 3.. Außerdem können wir V so klein wählen, daß auch 4. gilt.

Die globale Aussage gewinnt man dann mit Hilfe einer C^∞ – Partition der Eins (vgl. [7]).

2.9 DEFINITION. Die Abbildung $\pi: U \times S^1(\dot{E}) \to T(U) = U \times \dot{E}$ sei definiert durch

$$\pi(x, v) := (x, P(x)v), \qquad P(x)v \in T(U^{|\ddot{x}|}, x).$$

Wir dürfen annehmen, daß $t \leq e(t)$ ist für alle $t \in \mathbf{R}_+$, und setzen:

$$\dot{B} := \left\{y \in \dot{E} : |y| < \frac{\dot{s}}{4}\right\}, \qquad \ddot{B} := \{z \in \ddot{E} : |z| < \ddot{s}\};$$

$$B := \dot{B} + \ddot{B}, \qquad J := \left]-\frac{\dot{s}}{4}, \frac{\dot{s}}{4}\right[.$$

Integration von π liefert eine eindeutig bestimmte Abbildung $\Phi: B \times S^1(\dot{E}) \times J \to U$ mit

$$\frac{d}{dt}\Phi(x, v, t) = P(\Phi(x, v, t))v, \qquad \Phi(x, v, o) = x.$$

2.10 SATZ. *Es sei*

$$B^* := (\dot{B} - \{0\}) + \ddot{B}, \qquad X^* := X \cap B^*:$$

$$B_0 := \{0\} + \ddot{B}, \qquad X_0 :2 = X \cap B_0; \qquad J_0 := \left]0, \frac{\dot{s}}{4}\right[;$$

$$\phi : B_0 \times S^1(\dot{E}) \times J_0 \to B^*, \qquad \phi(x, v, t) := \Phi(x, v, t);$$

$$\psi : B^* \to B_0 \times S^1(\dot{E}) \times J_0, \qquad \psi(x) := \left(\Phi\left(x, \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}, -|\dot{x}|\right), \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}, |\dot{x}|\right).$$

Dann gilt:

1. ϕ *und* ψ *sind zueinander inverse Homöomorphismen.*
2. $\phi|(B_0 - \{0\}) \times S^1(\dot{E}) \times J_0$, $\psi|B^* - Y$ *sind* C^∞ *- Abbildungen.*
3. $\phi(X_0 \times S^1(\dot{E}) \times J_0) = X^*$, $\quad \psi(X^*) = X_0 \times S^1(\dot{E}) \times J_0$.
4. *Es gibt ein* $K > o$ *mit*

$$|\phi(0, u, s) - \phi(x, v, t)| \leq K \cdot (l(2|\ddot{x}|) + |u - v| + |s - t|)$$

$$\forall x \in B_0, \qquad u, v \in S^1(\dot{E}), \qquad s, t \in J_0;$$

$$|\psi(y) - \psi(x)| \leq \frac{K}{|y|\,|\dot{x}|}(|y - \dot{x}| + l(2|\ddot{x}|))$$

$$\forall y \in Y \cap B^*, \qquad x \in B^*.$$

Satz 2.10 stellt eine unendlichdimensionale Variante des ersten Isotopie-Lemmas von Thom [2] dar.

Ist X längs Y strikt Whitney-regulär vom Exponenten k, so kann $l(2|\ddot{x}|)$ in 2.10.4 durch $|\ddot{x}|^k$ ersetzt werden. Im Falle $k = 1$ liegt dann eine schwache Form der Lipschitz-Stetigkeit vor, welche Verdier [8] für den klassischen Fall eingeführt hat. In einer folgenden Arbeit wenden wir uns dem Gesichtspunkt der Lipschitz-Stetigkeit genauer zu.

§3. Whitney - Regularität bei Ramisschen Mengen

Wir behandeln nun Anwendungen unserer Untersuchungen bei *Ramisschen Mengen, d.h. Banach-analytischen Mengen endlicher Definition* (vgl. [4], [5]).

Dazu seien E, $\dot{E}$, $\ddot{E}$ in 1.7 **C**-Vektorräume und X eine Ramissche Menge. Dann ist $X - Y$ eine komplexe Mannigfaltigkeit der komplexen Kodimension

$p = q/2$ (vgl. 4.7 in [5]). Ferner ist X_y eine p-kodimensionale Ramissche Menge in $\ddot{U}$ mit $\{y\}$ als Singularitätenmenge.

Der affine Normalenkegel im Sinne von [5] stimmt mit unserem Normalenkegel, ja sogar mit $C^+(X, Y)$ überein (vgl. 3.14 in [5]). Aus 2.5 bzw. [5], 3.23, folgt:

3.1 SATZ. *Ist X längs Y strikt Whitney-regulär, so gilt:*
1. $C(X, Y, y) = C_3(X_y, 0) \quad \forall y \in Y.$
2. *X ist längs Y normal-pseudoflach und besitzt insbesondere längs Y konstante Multiplizität.*

Wir wenden uns dem *Spezialfall* $p = \operatorname{codim} X = \operatorname{codim} Y - 1$ zu und können dann von folgender Situation ausgehen.

3.2 *Situationsbeschreibung.* Es ist $\ddot{E} = \tilde{E} \oplus E^{\|}$ mit $\tilde{E} \in \mathcal{G}_1^{\mathbf{C}}(E)$, $E^{\|} \in \mathcal{G}_p^{\mathbf{C}}(E)$; $\ddot{U} = \tilde{U} + U^{\|}$, wobei $\tilde{U} \subset \tilde{E}$, $U^{\|} \subset E^{\|}$ offene Kugeln mit den Radien $\tilde{\rho}, \ddot{\rho} > 0$ und dem Mittelpunkt 0 sind. Wir setzen:

$$E^{|} := \dot{E} \oplus \tilde{E}, \qquad U^{|} := \dot{U} + \tilde{U}$$

und gehen davon aus, daß auch $\dot{U} \subset \dot{E}$ eine offene Kugel ist mit dem Radius $\dot{\rho}$ und dem Mittelpunkt 0.

Die Projektion $\pi^{|}: X \to U^{|}$ liefert eine ausgezeichnete Darstellung von X (im Sinne von [5]); d.h. $\pi^{|}$ ist eine verzweigte Überlagerung und $E^{\|}$ schneidet $C_3(X, 0)$ isoliert.

3.3 SATZ. *Ist X längs Y strikt Whitney-regulär, so gilt für die Darstellung $(X, \pi^{|}, U^{|})$ (nach einer eventuellen Verkleinerung von U):*
1. $(\pi^{|})^{-1}(Y) = Y$; *Y enthält die Verzweigungsmenge von $\pi^{|}$.*
2. *$E^{\|}$ schneidet $C_3(X, y)$ für jedes $y \in Y$ isoliert.*

Aus 3.3 folgt, daß es zu jeder irreduziblen Komponente $X^{|}$ von X eine Zahl $\mu^{|} \in \mathbf{N}$, $\mu^{|} \geq 1$, und eine topologische holomorphe Abbildung $\phi: \dot{U} \times K^{|} \to X^{|}$ (mit $K^{|} := \{z \in \mathbf{C} : |z| < \tilde{\rho}^{1/\mu^{|}}\}$) der Form

$$\phi(y, z) = y + z^{\mu^{|}} \cdot \tilde{u} + \psi(y, z) \; (\tilde{u} \in \tilde{E}, |\tilde{u}| = 1)$$

gibt, wobei $\psi: \dot{U} \times K^{|} \to E^{\|}$ durch eine konvergente Potenzreihe der Form $\sum_{\nu=\mu^{|}}^{\infty} \psi_\nu(y) z^\nu$ beschrieben wird. Eine solche Darstellung von $X^{|}$ heißt eine Puiseux-Normalisierung.

Eine einfache Rechnung zeigt:

3.4 *X ist längs Y strikt Whitney-regulär vom Exponenten* 1.

Aufgrund von 3.1 sowie [5], 4.5, 4.2 und 3.15, genügt es zum Beweis von 3.3 zu zeigen:

3.5 $C_4(X,0) \subset \dot{E} + C(X, Y, 0)$.

Wir setzen $\dot{E}_x := \{v^{\|} \in T(X,x) : v \in \dot{E}\}$ für $x \in X - Y$. Es sei $\delta(r) < 1$ mit $\delta := (1/1-\gamma)l$. Mit einer Standardrechnung erhalten wir für die eindeutige Darstellung $w = \dot{w}_x + w_{\dot{x}}$, $\dot{w}_x \in \dot{E}_x$, $w_{\dot{x}} \in T(X_x, x)$ eines Vektors $w \in T(X, x)$:

$$3.6 \quad |\dot{w}_x|, |w_{\dot{x}}| \leq \max\left\{1, \frac{|w|^2}{2(1-\delta(r))} + |w|\right\}$$

Ist nun $v \in C_4(X, 0)$ und sind $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbf{N}}$ Folgen in $X - Y$ bzw. E mit $x_n \to 0$, $w_n \to v$, $w_n \in T(X, x_n)$, so zerlegen wir:

$$w_n = v_n + u_n, \qquad \text{mit} \quad v_n \in \dot{E}_{x_n}, \; u_n \in T(X_{\dot{x}_n}, x_n).$$

Wegen 3.6 dürfen wir annehmen, daß $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ und dann auch $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ konvergiert. Ein Standardargument zeigt: $\lim v_n \in \dot{E}$. Wir betrachten die eindeutige Darstellung

$$u_n = a_n \ddot{x}_n + y_n, \quad \text{mit } a_n \in \mathbf{C}, \; y_n \in \ddot{E}, \; y_n \perp T(X_{\dot{x}_n}, x_n).$$

Es gilt:

$$|y_n| \leq \lambda(|\ddot{x}_n|)|a_n \ddot{x}_n|, \; |a_n \ddot{x}_n| \leq \max\left\{1, \frac{|u_n|^2}{2(1-\lambda(r))} + |u_n|\right\},$$

also

$$\lim u_n = \lim a_n \ddot{x}_n \in C(X, Y, 0).$$

Satz 3.3 ist eine unendlichdimensionale Variante von Proposition 1.13 in [6].

Aus 5.6 in [5] folgt:

3.7 *Sei R eine rein p-codimensionale Ramissche Menge einer Hilbertmannigfaltigkeit, Z eine $(p+1)$-codimensionale Zusammenhangskomponente der Menge der regulären Punkte der Singularitätenmenge von R. Dann ist R längs Z außerhalb einer abgeschlossenen vernachlässigbaren Teilmenge A von Z strikt Whitney-regulär vom Exponenten* 1.

Im endlichdimensionalen Fall ist bekannt, daß jede analytische Menge eine analytische Stratifikation mit paarweise Whitney-regulären Strata zuläßt. Verdier [8] hat sogar gezeigt, daß man analytische Stratifikationen finden kann, bei denen die Strata paarweise strikt Whitney-regulär vom Exponenten 1 sind. Im übrigen folgt, im Falle dim $E<\infty$, aus Whitney-regulär stets strikt Whitney-regulär (vgl. [3]). Im unendlichdimensionalen Fall sind derartige Ergebnisse nicht bekannt und zum Teil auch gar nicht zu erwarten.

LITERATUR

[1] DOUADY, A.; *Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné*; Ann. Inst. Fourier *16* (1966), 1–98.

[2] GIBSON, C. G. et alii; *Topological Stability of Smooth Mappings*; *Lecture Notes in Mathematics* 552, *Springer Verlag, Berlin. Heidelberg. New York*, 1976.

[3] HIRONAKA, H.: *Normal Cones in Analytic Whitney Stratifications*; Publ. Math. I.H.E.S. *36*, 1969, 127–138.

[4] RAMIS, J.-P.; *Sous-ensembles analytiques d'une variété banachique complexe*; Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 53, Springer Verlag, Berlin. Heidelberg. New York, 1970.

[5] SCHICKHOFF, W.: *Whitneysche Tangentenkegel, Multiplizitätsverhalten, Normal-Pseudoflachheit und Äquisingularitätstheorie für Ramissche Räume*; Schriftenreihe des Math. Inst. der Univ. Münster (Westf.), 2. Serie, Heft 12, 197.

[6] STUTZ, J.; *Equisingularity and Equisaturation in Codimension* 1; Amer. J. Math. *94*, 1972, 1245–1268.

[7] TORUNCZYK, H.; *Smooth partitions of unity on some non-separable Banach spaces*; Studia mathematica XLVI, 1973, 43–51.

[8] VERDIER, J.-L.; *Stratifications de Whitney et théorème de Bertini-Sard*; Inv. math. *36*, 1976, 295–312.

[9] WHITNEY, H.; *Complex Analytic Varieties*; Addison–Wesley Publishing Company, Reading . Menlo Park . London . Don Mills, 1972.

Fachbereich Mathematik/Philosophie
Universität Osnabrück
Albrechtstraße 28
D-4500 Osnabrück

Eingegangen den 15. August 1977/27. Mai 1978.