Algebren, Darstellungsköcher, Ueberlagerungen und zurück.

Autor(en): **Riedtmann, C.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **55 (1980)**

PDF erstellt am: **30.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-42371

Comment. Math. Helvetici **55** (1980) 199–224 Birkhäuser Verlag, Basel

Algebren, Darstellungsköcher, Ueberlagerungen und zurück

C. RIEDTMANN

Eine bekannte Vermutung besagt, dass es für jede Dimension nur endlich viele Isomorphieklassen darstellungsendlicher Algebren über einem Körper k gibt. Für symmetrische Algebren wurde die Vermutung von H. Kupisch bewiesen [10]. K. Bongartz hat sie kürzlich auch für Algebren bestätigt, deren Köcher keinen Zyklus enthält [4].

In dieser Arbeit leiten wir allgemeine Ergebnisse über darstellungsendliche Algebren über einem algebraisch abgeschlossenen Körper her. Daraus folgt eine Einteilung aller selbstinjektiven Algebren in Klassen A_n, D_n, E_6, E_7 und E_8. Wir werden diese Klassen später getrennt mit den Methoden von [8] behandeln und eine vollständige Klassifikation erhalten. Im Fall symmetrischer Algebren der Klasse A_n werden dabei nur Dade-Janusz-Kupisch-Algebren im Sinne von [8] auftreten. Aus unserer Klassifikation wird insbesondere eine Verallgemeinerung des Ergebnisses von H. Kupisch [10] auf selbstinjektive Algebren folgen.

Eine Vorankündigung meiner Ergebnisse ist in den Proceedings der "International Conference on Ring Theory in Antwerp 1978" (Marcel Dekker, New York) enthalten. Die Klassifikation der darstellungsendlichen selbstinjektiven Algebren der Klassen A_n und D_n erscheint in den Proceedings der International Conference on Representations of Algebras in Ottawa 1979. P. Gabriel danke ich für Diskussionen über die Darstellung meiner Ergebnisse.

1. Darstellungsköcher

1.1 Sei Γ ein Köcher bestehend aus der *Eckenmenge* Γ_0, der *Pfeilmenge* Γ_1 und den Abbildungen $d_0, d_1, : \Gamma_1 \rightrightarrows \Gamma_0$ [7]. Ist $\alpha \in \Gamma_1$, so nennen wir $d_0\alpha \in \Gamma_0$ das *Ziel* des Pfeils α und $d_1\alpha \in \Gamma_0$ die *Quelle*. Ferner setzen wir

$$x^+ = \{d_0\alpha : \alpha \in \Gamma_1 \quad \text{und} \quad d_1\alpha = x\}$$

und

$$x^- = \{d_1\alpha : \alpha \in \Gamma_1 \quad \text{und} \quad d_0\alpha = x\}$$

für jede Ecke $x \in \Gamma_0$.

DEFINITION. Ein Darstellungsköcher $\Gamma=(\Gamma,\tau)$ ist ein Köcher Γ zusammen mit einer Teilmenge $P_0\subset\Gamma_0$ und einer Injektion $\tau:P_0\to\Gamma_0$, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

(a) Γ enthält weder Doppelpfeile noch Schlaufen (d.h. aus $\alpha,\beta\in\Gamma_1$, $d_1\alpha=d_1\beta$ und $d_0\alpha=d_0\beta$ folgt $\alpha=\beta$; und aus $\alpha\in\Gamma_1$ folgt $d_1\alpha\neq d_0\alpha$).

(b) Für jede Ecke $x\in P_0$ gilt $x^-=(\tau x)^+$.

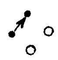
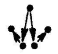
Zu jedem Pfeil $x\xrightarrow{\alpha}y$ mit $y\in P_0$ existiert genau ein Pfeil $\tau y\xrightarrow{\beta}x$. Wir setzen $\sigma\alpha=\beta$ und erhalten somit eine Bijektion $\sigma:\{\alpha\in\Gamma_1:d_0\alpha\in P_0\}\xrightarrow{\sim}\{\beta\in\Gamma_1:d_1\beta\in\tau P_0\}$. Sind P und τP die *vollen* Unterköcher von Γ mit den Eckenmengen P_0 und τP_0 (und den Pfeilmengen $P_1=d_0^{-1}(P_0)\cap d_1^{-1}(P_0)$ und $(\tau P)_1=d_0^{-1}(\tau P_0)\cap d_1^{-1}(\tau P_0)$), so lässt sich die *Verschiebung* τ zu genau einem Isomorphismus $\tau:P\xrightarrow{\sim}\tau P$ erweitern: Setze $\tau\alpha=\sigma^2\alpha$ für $\alpha\in P_1$.

Ein *Morphismus* zwischen Darstellungsköchern ist ein Köchermorphismus, der mit den Verschiebungen verträglich ist. Ein Darstellungsköcher Γ heisst *zusammenhängend*, wenn $\Gamma_0\neq\emptyset$ und wenn Γ keine echte direkte Summenzerlegung in der Kategorie der Darstellungsköcher zulässt. Dies impliziert nicht, dass der unterliegende Köcher zusammenhängend ist!

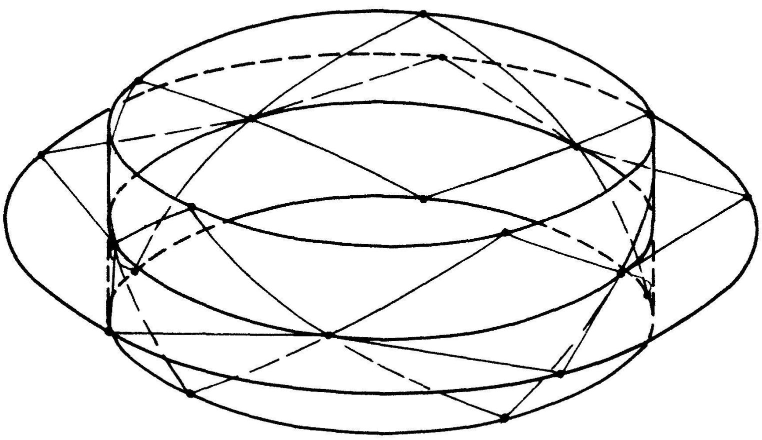
1.2 Zu einer endlichdimensionalen Algebra A über dem Körper k definieren wir den *Auslander–Reiten-Köcher* Γ_A: Die Ecken sind die Isomorphieklassen unzerlegbarer endlichdimensionaler A-Moduln. Ferner werden zwei Ecken x, y durch einen Pfeil $x\to y$ verbunden, wenn ein *irreduzibler* Morphismus von einem Repräsentanten von x nach einem von y existiert. Für P_0 wählen wir die Isomorphieklassen, deren Elemente nicht projektiv sind. Die Verschiebung τ wird durch die DTr-Konstruktion von Auslander-Reiten induziert [1]. Offenbar ist Γ_A ein Darstellungsköcher.

(a) Als *erstes Beispiel* betrachten wir die "gebundene" Algebra des Köchers

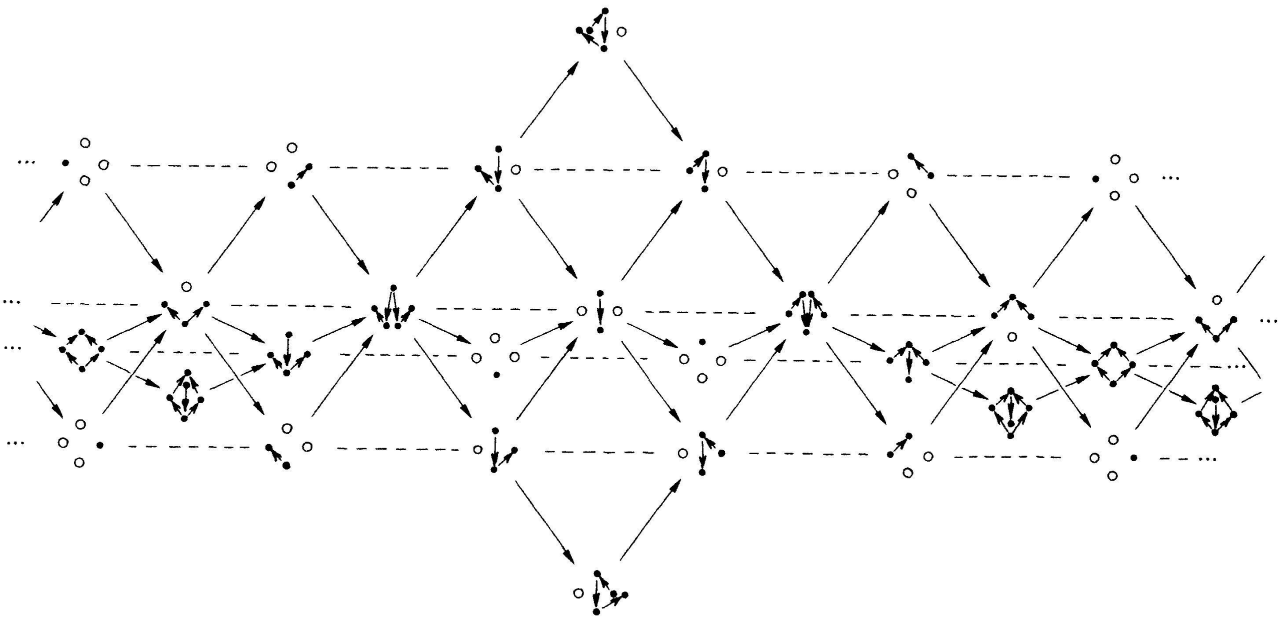
$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dd, "\alpha"] & \\
3 \arrow[ur, "\gamma"] & & 4 \arrow[ul, "\varepsilon"'] \\
 & 2 \arrow[ul, "\beta"] \arrow[ur, "\delta"'] &
\end{tikzcd}$$

mit den Relationen $\gamma\beta=\varepsilon\delta$, $\delta\alpha\gamma=0$, $\beta\alpha\varepsilon=0$, $\alpha\gamma\beta\alpha=0$ [8]. Der Auslander–Reiten-Köcher ist in Figur 1 abgebildet. Siehe Legende am Ende der Arbeit. Es repräsentieren zum Beispiel  und  die Darstellungen

$$\begin{tikzcd}
 & k \arrow[dd] & \\
k \arrow[ur, "{[1]}"] & & 0 \arrow[ul] \\
 & 0 \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
\quad \text{und} \quad
\begin{tikzcd}
 & k \arrow[dd, "{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}"] & \\
k \arrow[ur, "{[0]}"] & & k \arrow[ul, "{[0]}"'] \\
 & k^2 \arrow[ul, "{[1\ 0]}"] \arrow[ur, "{[0\ 1]}"'] &
\end{tikzcd}$$



Figur 1a.



Figur 1b.

(b) Als *zweites Beispiel* betrachten wir die gebundene Algebra des Köchers $1 \xrightarrow[\alpha]{} 2 \circlearrowleft_{\beta}$ mit der Relation $\beta^3 = 0[3]$. Der Auslander–Reiten-Köcher ist in Figur 2 abgebildet.

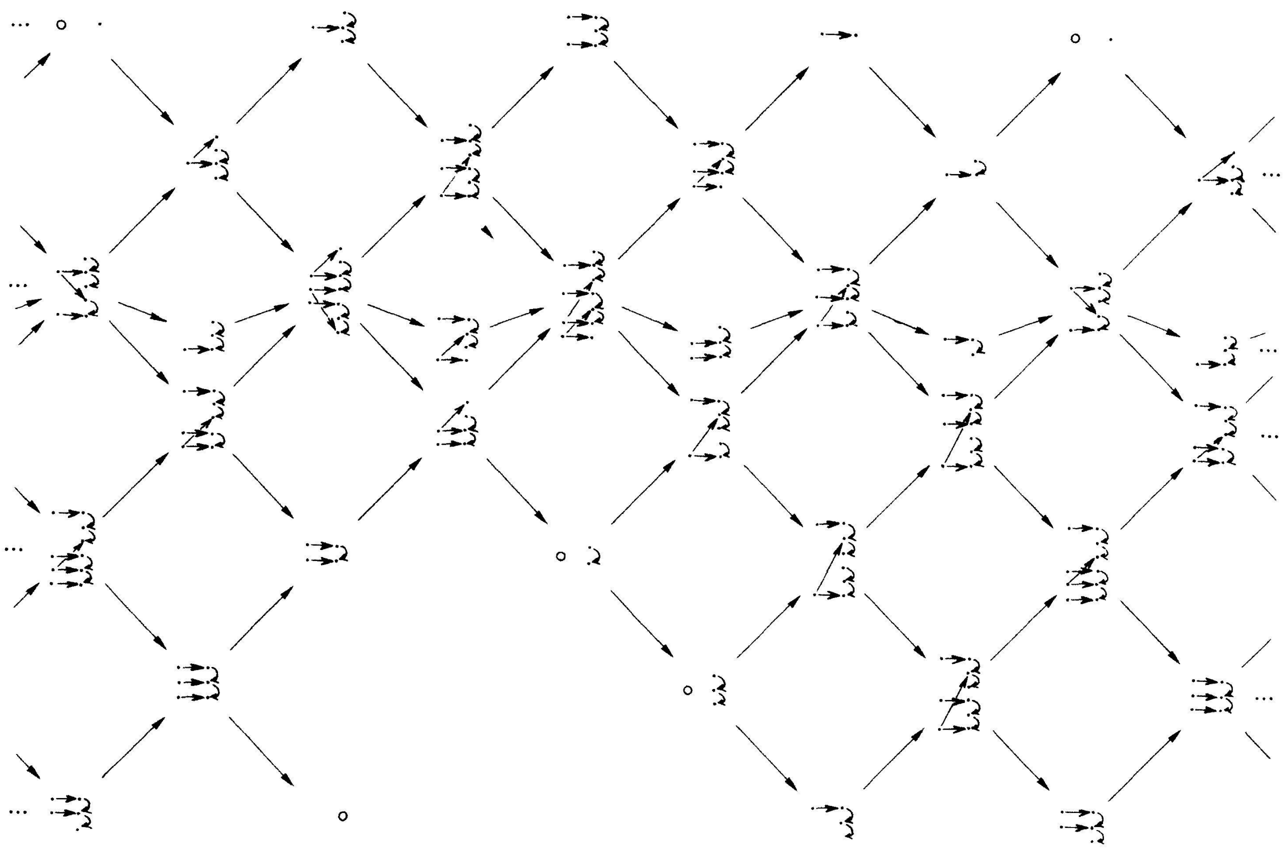
(c) Als *drittes Beispiel* geben wir die gebundene Algebra des Köchers $1 \xrightarrow[\alpha]{} 2 \circlearrowleft_{\beta}$ mit den Relationen $\beta\alpha = 0$, $\beta^2 = 0$: Figur 3.

(d) Unser *viertes Beispiel* liefert die gebundene Algebra des Köchers

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[dr, "\gamma"] & \\ 1 \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[drr, "\delta"'] & & & 4 \\ & & 5 \arrow[ur, "\varepsilon"'] & \end{tikzcd}$$

mit den Relationen $\beta\alpha = 0$, $\gamma\beta = 0$, $\varepsilon\delta = 0$: Figur 4.

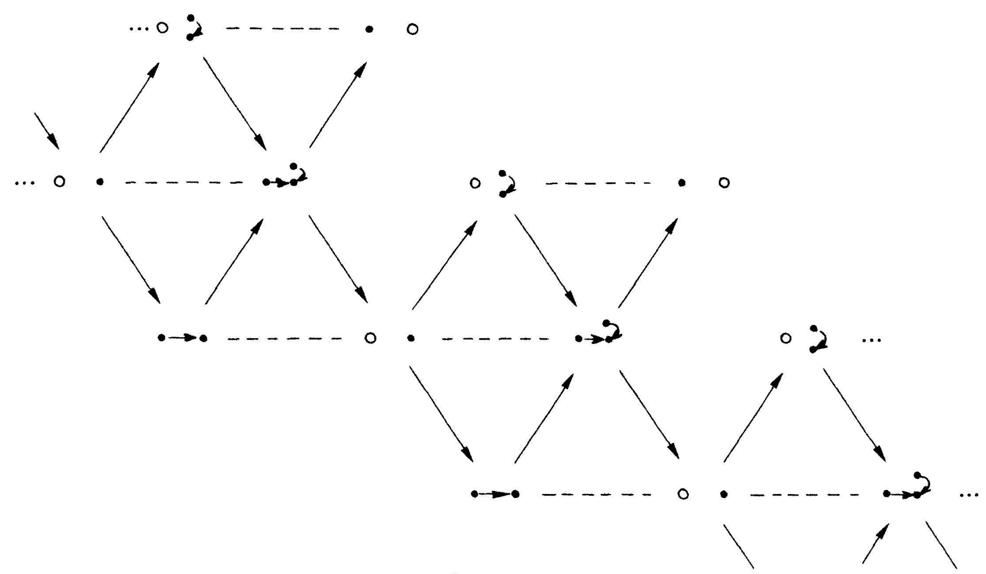
(e) Als *letztes Beispiel* konstruieren wir den Auslander-Reiten-Köcher der



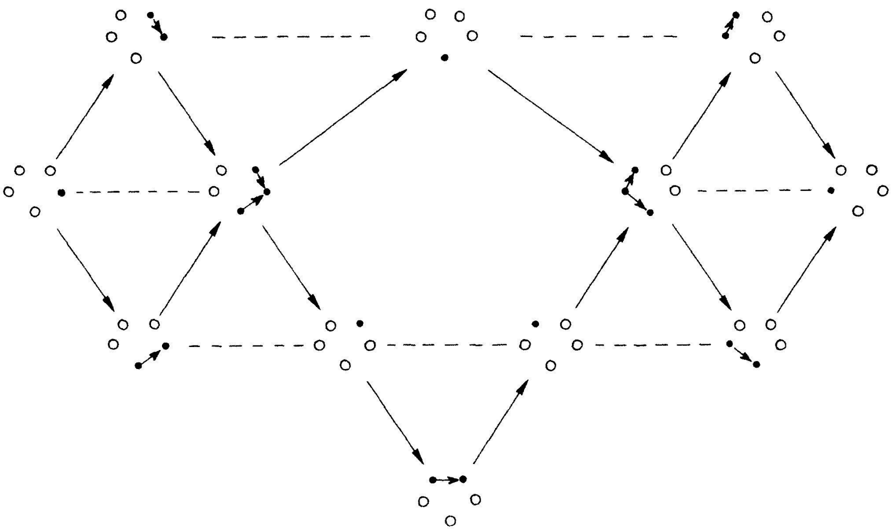
Figur 2.

gebundenen Algebra zum Köcher $3 \underset{\gamma}{\overset{\beta}{\rightleftarrows}} 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \underset{\varepsilon}{\overset{\delta}{\rightleftarrows}} 4$ mit den Relationen $\alpha\beta = 0$, $\delta\alpha = 0$, $\gamma\beta\gamma = 0$, $\beta\gamma\beta = 0$, $\delta\varepsilon\delta = 0$, $\varepsilon\delta\varepsilon = 0$: Figur 5.

1.3 Einem Köcher Q ohne Schlaufen und Doppelpfeile ordnen wir einen Graph $\bar{Q}$ zu [5]: Q und $\bar{Q}$ haben dieselben Ecken. Ferner werden zwei Ecken x, y in $\bar{Q}$ durch eine Kante x——y verbunden, wenn in Q Pfeile der Gestalt $x \to y$ oder $x \leftarrow y$ existieren. Wir nennen Q einen *gerichteten Baum*, wenn Q keinen Unterköcher der Gestalt $x \rightleftarrows y$ enthält und $\bar{Q}$ ein Baum ist [5].

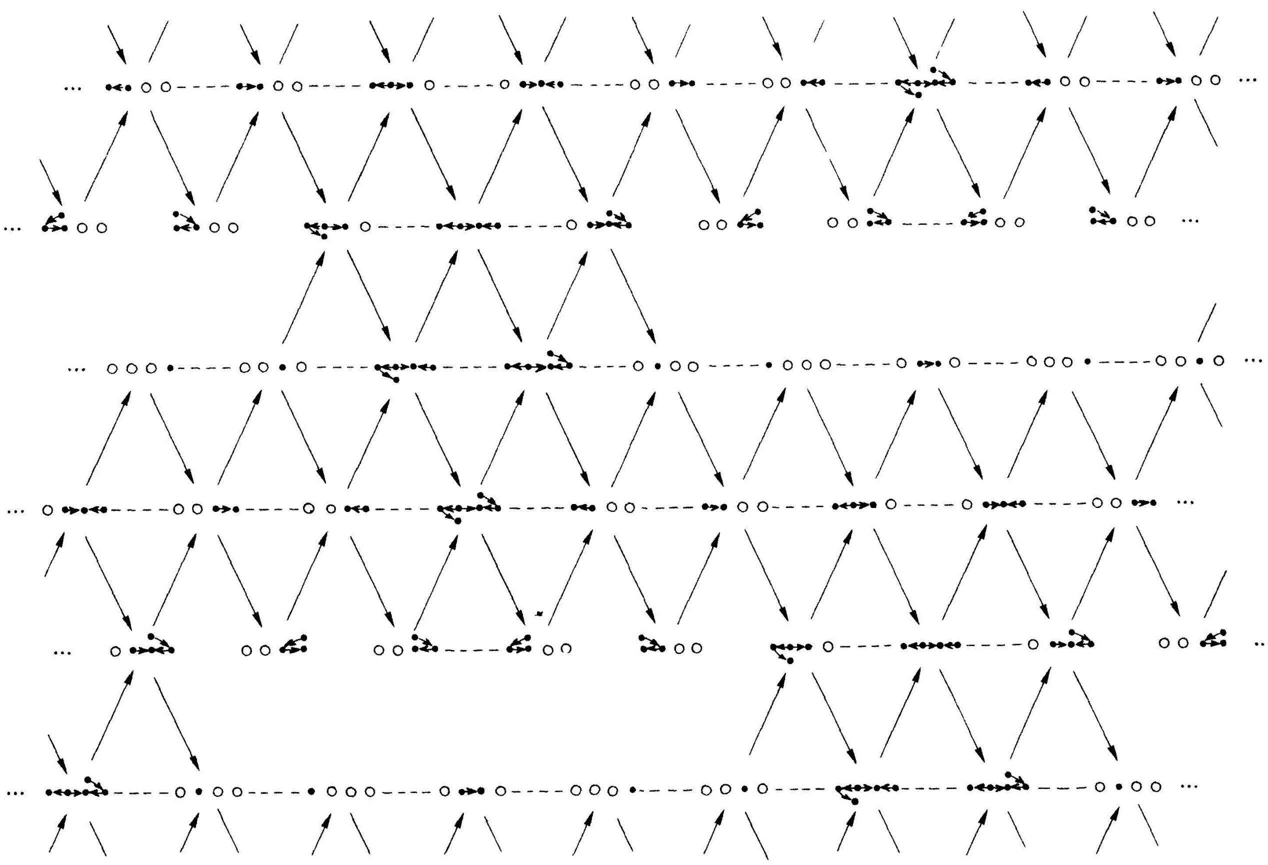


Figur 3.



Figur 4.

Einem *gerichteten Baum* B ordnen wir einen Darstellungsköcher $\mathbf{Z}B$ zu: Die Ecken sind die Paare (n, x) mit $x \in B_0$ und $n \in \mathbf{Z}$. Die Menge der Pfeile besteht aus je einem Pfeil $(n, x) \xrightarrow{(n,\alpha)} (n, y)$ und einem $(n+1, y) \xrightarrow{\sigma(n,\alpha)} (n, x)$ für jedes $n \in \mathbf{Z}$ und jeden Pfeil $x \xrightarrow{\alpha} y$ von B. Die Verschiebung τ ist auf ganz $(\mathbf{Z}B)_0$ definiert vermöge $\tau(n, x) = (n+1, x)$. Wir geben ein Beispiel (Figur 6). In der Folge identifizieren wir B mit einem Unterköcher von $\mathbf{Z}B$ vermöge $b \rightsquigarrow (0, b)$.



Figur 5.

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny] & 2 \\ 1 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & 3 \\ & 4 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[row sep=tiny] & 2 \\ 1 \arrow[ur, dash] \arrow[r, dash] \arrow[dr, dash] & 3 \\ & 4 \end{tikzcd}$$

B $\qquad$ $\bar{B}$

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny, column sep=small] {} \arrow[r, dashed] \arrow[dr, dashed] & (2,2) \arrow[dr] & & (1,2) \arrow[dr] & & (0,2) \arrow[dr] & & (-1,2) \arrow[dr, dashed] & \\ {} \arrow[r, dashed] & (2,3) \arrow[r] & (1,1) \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & (1,3) \arrow[r] & (0,1) \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & (0,3) \arrow[r] & (-1,1) \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & (-1,3) \arrow[r, dashed] & {} \\ {} \arrow[ur, dashed] \arrow[r, dashed] & (2,4) \arrow[ur] & & (1,4) \arrow[ur] & & (0,4) \arrow[ur] & & (-1,4) \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

Figur 6

Der Graph $\bar{B}$ kann aus $\mathbf{Z}B$ zurückgewonnen werden: Man betrachte den “Restklassengraph” $\mathbf{Z}B/\tau$ mit den Bahnen von τ in $(\mathbf{Z}B)_0$ als Ecken. In $\mathbf{Z}B/\tau$ werden zwei Ecken $\bar{x} = \{(n, x) : n \in \mathbf{Z}\}$ und $\bar{y}$ durch eine Kante verbunden, wenn $\mathbf{Z}B$ einen Pfeil der Gestalt $(n, x) \to (m, y)$ enthält. Der Restklassengraph $\mathbf{Z}B/\tau$ kann offensichtlich mit $\bar{B}$ vermöge $\bar{x} \xrightarrow{\sim} x$ identifiziert werden.

SATZ. *Die Darstellungsköcher $\mathbf{Z}B$ und $\mathbf{Z}B'$ zu den gerichteten Bäumen B und B' sind genau dann isomorph, wenn die Graphen $\bar{B}$ und $\bar{B}'$ isomorph sind.*

Beweis. Ein Morphismus $f : \mathbf{Z}B \to \mathbf{Z}B'$ ist verträglich mit τ und induziert folglich einen Morphismus $f/\tau : \bar{B} = \mathbf{Z}B/\tau \to \mathbf{Z}B'/\tau = \bar{B}'$. Offensichtlich ist f genau dann ein Isomorphismus, wenn f/τ einer ist. Insbesondere folgt $\bar{B} \xrightarrow{\sim} \bar{B}'$ aus $\mathbf{Z}B \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}B'$.

Umgekehrt gibt es zu jedem $g : \bar{B} \to \bar{B}'$ nach den zwei folgenden Lemmata einen Morphismus $f : \mathbf{Z}B \to \mathbf{Z}B'$ mit $f/\tau = g$. Ist g ein Isomorphismus, so auch f. OK.

LEMMA 1. *Es seien B und B' zwei gerichtete Bäume und $p : \overline{\mathbf{Z}B'} \to \bar{B}'$ die kanonische Projektion. Für jedes $b \in B_0$ und jeden Morphismus $g : \bar{B} \to \bar{B}'$ gibt es genau einen Köchermorphismus $h : B \to \mathbf{Z}B'$ mit $hb = (0, gb)$ und $p\bar{h} = g$.* OK.

LEMMA 2. *Es seien B ein gerichteter Baum und D ein stabiler Darstellungsköcher. Für jeden Köchermorphismus $h : B \to D$ gibt es genau einen Morphismus von Darstellungsköchern $f : \mathbf{Z}B \to D$ mit $f \mid B = h$.*

Stabile Darstellungsköcher werden in 1.4 definiert. OK.

1.4 Sei x eine Ecke des Darstellungsköchers Γ. Die Bahn von x unter τ ist von einem der folgenden Typen:

$$\infty \;- - - -\; \cdot \xleftarrow{\tau}\!\!| \;\cdot\; \xleftarrow{\tau}\!\!| \; x \; \xleftarrow{\tau}\!\!| \;\cdot\; \xleftarrow{\tau}\!\!| \;\cdot\; - - - - \; \infty$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & x \arrow[dl, mapsto, "\tau"'] & \\ \cdot \arrow[d, mapsto, "\tau"'] & & \cdot \arrow[ul, mapsto, "\tau"'] \\ \cdot \arrow[dr, dash, dashed] & & \cdot \arrow[u, mapsto, "\tau"'] \\ & {} \arrow[ur, dash, dashed] & \end{tikzcd}$$

$$\infty \;- - - - - -\; \cdot \xleftarrow{\tau}\!\!| \; x \; \xleftarrow{\tau}\!\!| \;\cdot\; - - - - - - \; \cdot \xleftarrow{\tau}\!\!| \; i$$

$$p \xleftarrow{\tau}\!\!| \;\cdot\; \xleftarrow{\tau}\!\!| \;\cdot\; - - - - \; \cdot \xleftarrow{\tau}\!\!| \; x \; \xleftarrow{\tau}\!\!| \;\cdot\; - - - - \; \infty$$

$$p \xleftarrow{\tau}\!\!| \;\cdot\; - - - - \; \cdot \xleftarrow{\tau}\!\!| \; x \; \xleftarrow{\tau}\!\!| \;\cdot\; - - - - \; \cdot \xleftarrow{\tau}\!\!| \; i$$

In den beiden ersten Fällen sagen wir, dass x *stabil* ist, in den drei letzten, dass x *transjektiv* ist. Ist $\Gamma = \Gamma_A$ der Darstellungsköcher einer Algebra A, so ist die Isomorphieklasse eines unzerlegbaren injektiven A-Moduls der Anfangspunkt einer Bahn, während die Isomorphieklasse eines unzerlegbaren projektiven Moduls "Endstation" einer Bahn ist. Beide Isomorphieklassen sind also transjektiv. Unsere Beispiele zeigen, dass es neben diesen im allgemeinen noch andere transjektive Isomorphieklassen gibt.

DEFINITION. Ein Darstellungsköcher Γ heisst stabil, wenn alle Ecken von Γ stabil sind.

Ist B ein gerichteter Baum, so ist der Darstellungsköcher $\mathbf{Z}B$ stabil. Ist Γ ein beliebiger Darstellungsköcher, so ist der volle Unterköcher ${}_s\Gamma \subset \Gamma$ bestehend aus den stabilen Ecken von Γ ein stabiler Darstellungsköcher; dabei wird die Verschiebung von ${}_s\Gamma$ durch diejenige von Γ induziert. Wir nennen ${}_s\Gamma$ den *stabilen Teil* von Γ.

Bemerkung. Ist A eine endlichdimensionale Algebra, so entsprechen die Ecken von ${}_s\Gamma_A$ gewissen Isomorphieklassen unzerlegbarer Objekte der "stabilen" Kategorie im Sinne von Auslander–Reiten [1]. Die Beziehung ist nur dann bijektiv, wenn die Algebra A selbstinjektiv (= quasi-Frobenius) ist, d.h. wenn injektive und projektive Moduln zusammenfallen.

1.5 DEFINITION. Sei Γ ein Darstellungsköcher. Eine Automorphismengruppe G von Γ heisst zulässig, wenn keine Bahn von G in Γ_0 eine Teilmenge der Gestalt $x^- \cup \{x\}$ oder $\{x\} \cup x^+$ in mehr als einer Ecke trifft.

Zu jeder zulässigen Automorphismengruppe G von Γ konstruieren wir einen Darstellungsköcher Γ/G: Wir setzen $(\Gamma/G)_0 = \Gamma_0/G$ und $(\Gamma/G)_1 = \Gamma_1/G$; die Verschiebung sowie die Abbildungen Quelle und Ziel von Γ/G werden durch die entsprechenden Abbildungen von Γ induziert. Ist Γ stabil, so auch Γ/G.

STRUKTURSATZ. *Zu jedem zusammenhängenden stabilen Darstellungsköcher Γ gibt es einen gerichteten Baum B und eine zulässige Automorphismengruppe $G \subset \operatorname{Aut} \mathbf{Z}B$, so dass Γ isomorph ist zu $\mathbf{Z}B/G$. Dabei bestimmt Γ den zu B gehörigen Graphen $\bar{B}$ eindeutig bis auf Isomorphie und G eindeutig bis auf Konjugation in* $\operatorname{Aut} \mathbf{Z}B$.

Dem Beweis des Struktursatzes stellen wir in den folgenden Abschnitten einige klassische Hilfsmittel voran.

1.6 Sei Γ ein zusammenhängender stabiler Darstellungsköcher. Wir wählen eine feste Ecke $x \in \Gamma_0$ und betrachten die *Wege* $\delta = (y \mid \alpha_m, \ldots, \alpha_1 \mid x)$ von Γ mit Anfangspunkt x ([8], 1.1), *die keinen Teilweg der Gestalt* $(z \mid \alpha, \sigma\alpha \mid \tau z)$ *enthalten.* Diese Wege fassen wir als Ecken eines neuen Köchers $B = x\Gamma$ mit den Pfeilen $(d_1\alpha_m \mid \alpha_{m-1}, \ldots, \alpha_1 \mid x) \xrightarrow{\alpha_m} (y \mid \alpha_m, \ldots, \alpha_1 \mid x) = \delta$, $\delta \neq (x \| x)$, auf. Da B zusammenhängend ist und in jeder Ecke höchstens ein Pfeil endet, kann B offenbar nur ein gerichteter Baum oder ein Zyklus sein. Die zweite Möglichkeit ist aber ausgeschlossen, weil in $(x \| x)$ kein Pfeil endet. *Also ist B ein gerichteter Baum.*

Nach 1.3, Lemma 2, lässt sich der Köchermorphismus $h: B \to \Gamma$, $(y \mid \alpha_m, \ldots, \alpha_1 \mid x) \mapsto y$ in eindeutiger Weise zu einem "*kanonischen*" Morphismus von Darstellungsköchern $\pi: \mathbf{Z}B \to \Gamma$ erweitern.

DEFINITION. Ein Morphismus von Darstellungsköchern $f: \Delta \to \Gamma$ heisst Ueberlagerung, wenn für jede Ecke $p \in \Delta_0$ die induzierten Abbildungen $p^- \to (fp)^-$ und $p^+ \to (fp)^+$ bijektiv sind. Ferner wird vorausgesetzt, dass τ (bzw. τ^{-1}) an der Stelle p definiert ist, wenn τfp (bzw. $\tau^{-1}fp$) definiert ist.

Als Beispiel einer Ueberlagerung kennen wir bereits die kanonische Projektion $f: \Delta \to \Delta/G$, falls G eine zulässige Automorphismengruppe von Δ ist. Sind in unserer Definition Δ und Γ stabil, so folgt die Bijektivität der Abbildungen $p^- \to (fp)^-$ aus derjenigen der Abbildungen $p^+ \to (fp)^+$.

SATZ. *Es sei Γ ein zusammenhängender stabiler Darstellungsköcher. Dann gilt:*

(a) *Ist $x \in \Gamma_0$ und $B = x\Gamma$, so ist der kanonische Morphismus $\pi: \mathbf{Z}B \to \Gamma$ eine Ueberlagerung.*

(b) *Ist B ein gerichteter Baum, $\pi:\mathbf{Z}B\to\Gamma$ ein Morphismus von Darstellungsköchern, $f:\Delta\to\Gamma$ eine Ueberlagerung und q eine Ecke von $\mathbf{Z}B$, so gibt es zu jedem $p\in\Delta_0$ mit $fp=\pi q$ genau einen Morphismus $g:\mathbf{Z}B\to\Delta$ mit $\pi=fg$ und $gq=p$.*

$$\begin{tikzcd} q\in\mathbf{Z}B \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \Delta\ni p \arrow[dl, "f"] \\ & fp\in\Gamma & \end{tikzcd}$$

Beweis. (a) Wir haben zu zeigen, dass π für jede Ecke $(n,\delta)\in(\mathbf{Z}B)_0$ eine Bijektion $(n,\delta)^+\xrightarrow{\sim}(\pi(n,\delta))^+$ induziert. Da π mit τ verträglich ist, dürfen wir ohne Beschränkung $n=0$ voraussetzen. Es sei also $\delta=(y\mid\alpha_m,\ldots,\alpha_1\mid x)$ eine Ecke von B. Wir berechnen δ^+ in B:

$$\delta^+=\begin{cases}\{\varepsilon=(z\mid\beta,\alpha_m,\ldots,\alpha_1\mid x):z\in y^+,\ z\neq\tau^{-1}d_1\alpha_m\} & \text{falls}\quad m>0\\ \{\varepsilon=(z\mid\beta\mid x):z\in x^+\} \quad \text{falls}\quad m=0.\end{cases}$$

Weiter gilt in $\mathbf{Z}B$:

$$(0,\delta)^+=\begin{cases}\{(0,\varepsilon):\varepsilon\in\delta^+\}\cup\{(-1,d_1\alpha_m)\} & \text{falls}\quad m>0\\ \{(0,\varepsilon):\varepsilon\in\delta^+\} \quad \text{falls}\quad m=0\end{cases}$$

Somit induziert π eine Bijektion $(0,\delta)^+\xrightarrow{\sim}y^+$. (b) Da π und f mit den Verschiebungen verträglich sind, dürfen wir wegen $(n,b)=\tau^n(0,b)$ ohne Beschränkung annehmen, dass q die Gestalt $(0,b)\xrightarrow{\sim}b$ hat. Nun gibt es nach dem folgenden Lemma genau einen Köchermorphismus $h:B\to\Delta$ mit $fh=\pi\mid B$ und $hb=p$. Nach 1.3, Lemma 2 existiert genau ein $g:\mathbf{Z}B\to\Delta$ mit $g\mid B=h$. Dies ist der gesuchte, eindeutig bestimmte Morphismus. OK.

LEMMA. *Es seien B ein gerichteter Baum und $f:\Delta\to\Gamma$ eine Ueberlagerung. Für jedes $b\in B_0$, jeden Köchermorphismus $l:B\to\Gamma$ und jedes $p\in\Delta_0$ mit $lb=fp$ gibt es genau einen Köchermorphismus $h:B\to\Delta$ mit $fh=l$ und $hb=p$.* OK.

1.7 DEFINITION. Sei Γ ein zusammenhängender stabiler Darstellungsköcher, x eine Ecke von Γ, $B=x\Gamma$ und $\pi:\mathbf{Z}B\to\Gamma$ die kanonische Ueberlagerung. Die Fundamentalgruppe $\Pi(\Gamma,x)$ von Γ im Punkt x ist die Gruppe der Decktransformationen von π, d.h. der Morphismen von Darstellungsköchern $g:\mathbf{Z}B\to\mathbf{Z}B$ mit $\pi g=\pi$.

SATZ. *Die Fundamentalgruppe $\Pi(\Gamma, x)$ ist eine zulässige Automorphismengruppe von $\mathbf{Z}B$, und π induziert einen Isomorphismus $\mathbf{Z}B/\Pi(\Gamma, x) \xrightarrow{\sim} \Gamma$.*

Der Satz folgt unmittelbar aus 1.6. Damit ist auch der Struktursatz 1.5 bewiesen mit Ausnahme der letzten Aussage, der wir uns nun zuwenden: Sei $j : \Gamma \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}B'/G'$ ein Isomorphismus, wobei B' ein gerichteter Baum ist und G' eine zulässige Automorphismengruppe von $\mathbf{Z}B'$. Da die kanonische Projektion $\kappa : \mathbf{Z}B' \to \mathbf{Z}B'/G'$ eine Ueberlagerung ist, lassen sich j und j^{-1} nach Satz 1.6(b) zu zueinander inversen Morphismen $\mathbf{Z}B \overset{g}{\rightleftarrows} \mathbf{Z}B'$ hochheben. Wir schliessen daraus, dass $G' = g\Pi(\Gamma, x)g^{-1}$ und $\bar{B} \xrightarrow{\sim} \bar{B}'$ (1.3).

Bemerkung. In der Folge nennen wir $\mathbf{Z}B$ "die" *universelle Ueberlagerung* von Γ. Die Isomorphieklasse von $\bar{B}$ heisst *(Baum)klasse* von Γ.

2. Darstellungsendliche Algebren

In diesem Abschnitt bezeichnet A eine endlichdimensionale Algebra über dem *algebraisch abgeschlossenen* Körper k. Wir setzen ferner voraus, dass A *darstellungsendlich* ist, d.h. dass es nur eine endliche Anzahl von Isomorphieklassen unzerlegbarer A-Moduln gibt.

HAUPTSATZ. *Sei Γ eine Zusammenhangskomponente des stabilen Teils ${}_s\Gamma_A$ des Auslander–Reiten-Köchers Γ_A zur darstellungsendlichen Algebra A. Die Baumklasse von Γ ist eine der folgenden:*

$$A_n \qquad 1 \text{ --- } 2 \text{ --- } 3 \text{ --- } \cdots \text{ --- } n-1 \text{ --- } n, \qquad n \geq 1$$

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash] & & & & & n-1 \\ D_n & 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & n-2 \arrow[u] \arrow[d] & , \; n \geq 4 \\ & & & & & n \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash] E_n & 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & n-1 \arrow[r] & n, & n = 6, 7, 8 \\ & & & 4 \end{tikzcd}$$

Mit anderen Worten: Γ ist isomorph zu $\mathbf{Z}B/G$, wobei G eine zulässige Automorphismengruppe von $\mathbf{Z}B$ ist und B ein Baum mit Graph $\bar{B} = A_n, D_n, E_6, E_7$ oder E_8.

Der Beweis unseres Hauptsatzes erstreckt sich über den ganzen Abschnitt 2.

2.1 Zunächst konstruieren wir zu einem beliebigen Darstellungsköcher Γ eine

Kategorie $k(\Gamma)$: Die Objekte sind die Ecken von Γ. Für je zwei Ecken x, y bezeichnen wir mit $W_\Gamma(x, y)$ den k-Vektorraum, der von den Wegen von x nach y in Γ frei erzeugt wird. Die Zusammensetzung der Wege liefert eine Kategorie W_Γ mit den Morphismenmengen $W_\Gamma(x, y)$ und mit k-bilinearen Kompositionsabbildungen. In W_Γ erzeugen die Morphismen $\sum_\alpha (x\,|\alpha, \sigma\alpha|\,\tau x) \in W_\Gamma(\tau x, x)$, wobei α die Pfeile von Γ mit Ziel x durchläuft, ein Ideal I_Γ. Die Restklassenkategorie W_Γ/I_Γ mit den Morphismenmengen $W_\Gamma(x, y)/I_\Gamma(x, y)$ ist unser $k(\Gamma)$.

Im Fall einer kranzähnlichen (= wreath-like) Algebra A implizieren die Ergebnisse von [8], dass $k(\Gamma_A)$ zur Kategorie der unzerlegbaren A-Moduln äquivalent ist. Insbesondere kann dann A aus Γ_A zurückgewonnen werden. Dies wird auch bei den meisten Algebren so sein, die wir in den folgenden Arbeiten untersuchen werden. Hier wollen wir zwei Sätze beweisen, aus denen unser Hauptsatz folgt.

SATZ 1. *Es sei Γ eine Zusammenhangskomponente des stabilen Teils ${}_s\Gamma_A$ des Auslander–Reiten-Köchers einer darstellungsendlichen Algebra A. Es sei ferner $\mathbf{Z}B$ die universelle Ueberlagerung von Γ. Dann gibt es ein $N \in \mathbf{N}$, so dass jeder Weg δ von $\mathbf{Z}B$ der Länge $\geq N$ im Ideal I_Γ liegt und folglich die Restklasse $\bar{\delta} = 0$ in $k(\mathbf{Z}B)$ hat.*

SATZ 2. *Ist B ein gerichteter Baum und gilt $\bar{\delta} = 0$ in $k(\mathbf{Z}B)$ für jeden Weg δ von $\mathbf{Z}B$ der Länge $\geq N \in \mathbf{N}$, N fest, so ist der Graph $\bar{B}$ isomorph zu A_n, D_n, E_6, E_7 oder E_8.*

2.2 Sei $\operatorname{mod} A$ die Kategorie der endlichdimensionalen A-Moduln. Wir nennen einen A-Modul $x \in \operatorname{mod} A$ *transjektiv*, wenn es für jeden unzerlegbaren direkten Summanden Y von X ein $r \in \mathbf{N}$ gibt, so dass $(DTr)^r Y$ projektiv ist oder $(TrD)^r Y$ injektiv. Die gestellte Bedingung bedeutet auch, dass die Isomorphieklasse von Y ein transjektiver Punkt von Γ_A ist. Einen A-Modul $X \in \operatorname{mod} A$ ohne transjektiven unzerlegbaren direkten Summanden nennen wir *stabil.*

Für $X, Y \in \operatorname{mod} A$ bezeichnen wir mit $\mathcal{T}(X, Y)$ den Unterraum von $\operatorname{Hom}_A(X, Y)$ bestehend aus den Morphismen, die sich durch einen transjektiven Modul faktorisieren lassen. Die Unterräume $\mathcal{T}(X, Y)$ liefern ein Ideal $\mathcal{T}$ der Kategorie $\operatorname{mod} A$. Wir bezeichnen mit $\underline{\operatorname{mod}}\, A$ die Restklassenkategorie $\operatorname{mod} A/\mathcal{T}$ mit den Morphismenmengen $\underline{\operatorname{Hom}}_A(X, Y) = \operatorname{Hom}_A(X, Y)/\mathcal{T}(X, Y)$, und wir nennen $\underline{\operatorname{mod}}\, A$ die *stabile Kategorie* zu A. Wir bemerken dabei, dass $\underline{\operatorname{mod}}\, A$ nur dann mit der stabilen Kategorie im Sinne von Auslander-Reiten [1] übereinstimmt, wenn die Algebra A selbstinjektiv ist.

Es seien nun Γ eine Zusammenhangskomponente von ${}_s\Gamma_A$, $\mathbf{Z}B$ die universelle Ueberlagerung von Γ, Π eine zulässige Automorphismengruppe mit $\mathbf{Z}B/\Pi \xrightarrow{\sim} \Gamma$

und $\pi : \mathbf{Z}B \to \Gamma$ die kanonische Projektion. Für jede Ecke $x \in \Gamma_0$ wählen wir einen (unzerlegbaren stabilen) Repräsentanten $X \in \operatorname{mod} A$, und wir bezeichnen mit $\mathcal{S}$ die Menge dieser Repräsentanten.

SATZ. *Es gibt einen k-linearen Funktor $F : k(\mathbf{Z}B) \to \underline{\operatorname{mod}}\, A$ mit den Eigenschaften* (a) *und* (b):

(a) *Für jedes Objekt $x \in (\mathbf{Z}B)_0$ ist $Fx \in \mathcal{S}$ der Repräsentant von $\pi x \in \Gamma_0$.*

(b) *Für jeden Pfeil $y \xrightarrow{\alpha} x$ von $\mathbf{Z}B$ mit Restklasse $\bar{\alpha}$ in $k(\mathbf{Z}B)$ ist $F\bar{\alpha} : Fy \to Fx$ ein irreduzibler Morphismus von $\underline{\operatorname{mod}}\, A$.*

Bemerkung. Wir verlangen nicht, dass $F\bar{\alpha} = F\bar{\beta}$, falls $\pi\alpha = \pi\beta$. Ein Funktor F mit dieser Eigenschaft würde einen Funktor $k(\Gamma) \to \underline{\operatorname{mod}}\, A$ liefern und uns den Umweg über die universelle Ueberlagerung ersparen.

Beweis. Die Bedingung (a) bestimmt F eindeutig auf den Objekten. Wir haben die Bilder $F\bar{\alpha}$ der Pfeile $y \xrightarrow{\alpha} x$ offensichtlich so zu wählen, dass für alle $x \in (\mathbf{Z}B)_0$ die Gleichung $0 = \sum_{y \in x^-} F\bar{\alpha} \circ F\overline{\sigma\alpha}$ in $\underline{\operatorname{Hom}}_A(F\tau x, Fx)$ gilt.

Dafür dürfen wir wegen Satz 1.3 annehmen, dass B keinen Weg der Länge ≥ 2 zulässt. Dann zerfällt B_0 in zwei Klassen: Wir nennen $x \in B_0$ maximal, wenn in x kein Pfeil von B startet (d.h. wenn mindestens ein Pfeil von B in x landet); wir nennen x minimal, wenn in x kein Pfeil von B landet. Entsprechend teilen wir die Ecken von $\mathbf{Z}B$ in zwei Klassen auf:

$$(\mathbf{Z}B)_0^- = \{y = \tau^{-r}x : x \in B_0,\ r > 0 \text{ oder } r = 0 \text{ und } x \text{ maximal}\}$$

$$(\mathbf{Z}B)_0^+ = \{y = \tau^{r}x : x \in B_0,\ r > 0 \text{ oder } r = 0 \text{ und } x \text{ minimal}\}$$

Ist $y = \tau^r x \in (\mathbf{Z}B)_0^+$, so definieren wir F auf allen Pfeilen von $\mathbf{Z}B$, die in y starten, und zwar induktiv nach

$$l(y) = \begin{cases} 2r, & \text{wenn } x \in B_0 \text{ minimal ist} \\ 2r-1, & \text{wenn } x \in B_0 \text{ maximal ist.} \end{cases}$$

Ist $l(y) = 0$, so ist $y \in B_0$ minimal, jeder Pfeil $y \xrightarrow{\alpha} z$ von $\mathbf{Z}B$ gehört zu B: Für $F\bar{\alpha}$ wählen wir einen beliebigen irreduziblen Morphismus von Fy nach Fz in $\underline{\operatorname{mod}}\, A$. Ist $l(y) > 0$, so betrachten wir $y^+ = \{y_1, \ldots, y_r\}$, $y \xrightarrow{\alpha_i} y_i$ und $z = \tau^{-1}y$. Es gilt dann $l(y_i) = l(y) - 1$, und $F\overline{\sigma^{-1}\alpha_i} \in \underline{\operatorname{Hom}}_A(Fy_i, Fz)$ ist bereits definiert. Für $F\bar{\alpha}_1, \ldots, F\bar{\alpha}_r$ wählen wir irreduzible Morphismen in $\underline{\operatorname{mod}}\, A$, so dass $\sum_i (F\overline{\sigma^{-1}\alpha_i}) \circ (F\bar{\alpha}_i) = 0$. Dies ist möglich nach Anhang 1, Satz 3.4.

Die Konstruktion von $F\bar{\alpha}: Fz \to Fy$ für $y \in (\mathbf{Z}B)_0^-$ beruht auf dualen Argumenten.

2.3 SATZ. *Sei $F: k(\mathbf{Z}B) \to \underline{\mathrm{mod}}\, A$ ein Funktor mit den Eigenschaften von Satz 2.2. Für je zwei $x, y \in (\mathbf{Z}B)_0$ induziert F eine Bijektion*

$$\bigoplus_{Fz=Fy} \mathrm{Hom}_{k(\mathbf{Z}B)}(x, z) \to \underline{\mathrm{Hom}}_A(Fx, Fy).$$

Beweis.

LEMMA. *Es seien $x^+ = \{x_1, \ldots, x_r\}$ und $x \xrightarrow{\alpha_i} x_i$ der zu x_i gehörige Pfeil in $\mathbf{Z}B$. Zu jedem $f \in \underline{\mathrm{Hom}}_A(Fx, Fy)$ existieren Morphismen $f_i \in \underline{\mathrm{Hom}}_A(Fx_i, Fy)$, so dass $f = \sum_i f_i(F\bar{\alpha}_i)$ falls $Fx \neq Fy$, und $f = \lambda \mathbf{1}_{Fx} + \sum_i f_i(F\bar{\alpha}_i)$ für ein geeignetes $\lambda \in k$ falls $Fx = Fy$.*

Beweis. Ist $Fx = Fy$, so wählen wir λ derart, dass $f - \lambda\mathbf{1}$ nilpotent sei. Da

$$Fx \xrightarrow{[F\bar{\alpha}_1 \cdots F\bar{\alpha}_r]^T} \bigoplus_i Fx_i$$

in $\underline{\mathrm{mod}}\, A$ maximal q-irreduzibel ist (siehe Anhang 1, 3.2), kann $f - \lambda\mathbf{1}$ durch $[F\bar{\alpha}_1 \cdots F\bar{\alpha}_r]^T$ faktorisiert werden. Entsprechendes gilt falls $Fx \neq Fy$. OK.

Aus dem Lemma erhalten wir induktiv für jedes $n \in \mathbf{N}$: Zu jedem Weg $\delta = (z\,|\alpha_m, \ldots, \alpha_1|\,x)$ in $\mathbf{Z}B$ mit $m < n$ und $Fz = Fy$ und jedem Weg $\varepsilon = (w\,|\beta_n, \ldots, \beta_1|\,x)$ der Länge n gibt es Morphismen $\phi_\delta \in \mathrm{Hom}_{k(\mathbf{Z}B)}(x, z)$ und $f_\varepsilon \in \underline{\mathrm{Hom}}_A(Fw, Fy)$, so dass $f = \sum_\delta F\phi_\delta + \sum_\varepsilon f_\varepsilon(F\bar{\varepsilon})$. Ist nun $\mathcal{R}_A$ das Radikal der Kategorie mod A, so gilt $\mathcal{R}_A^n = 0$ für grosses n, denn A ist darstellungsendlich. Folglich gilt auch $\underline{\mathcal{R}}_A^n = 0$, wenn $\underline{\mathcal{R}}_A$ das Radikal von $\underline{\mathrm{mod}}\, A$ bezeichnet (3.1). Somit ist $F\bar{\varepsilon} = 0$ für grosses n und $f = \sum_\delta F\phi_\delta$.

Beweis der Injektivität. Es sei (ϕ_z) in $\bigoplus_{Fz=Fy} \mathrm{Hom}_{k(\mathbf{Z}B)}(x, z)$ mit $\sum_z F\phi_z = 0$.

LEMMA. *Mit den Notationen des vorhergehenden Lemmas gibt es für jedes z und jedes i einen Morphismus $\phi_{zi}: x_i \to z$ in $k(\mathbf{Z}B)$, so dass $\phi_z = \sum_j \phi_{zj}\bar{\alpha}_j$ und $\sum_t F\phi_{ti} = 0$.*

Beweis. Im Fall $x^+ = \emptyset$ gilt $\underline{\mathrm{Hom}}_A(Fx, Fx) = k$ und $\underline{\mathrm{Hom}}_A(Fx, Fy) = 0$ falls $Fx \neq Fy$: ein klarer Fall. Wir nehmen also an, dass $x^+ \neq \emptyset$: Ist $Fx = Fy$, so gilt

$\phi_x = \lambda \mathbf{1}_x$ mit $\lambda \in k$ und $-\lambda \mathbf{1}_{Fx} = \sum_{z \neq k} F\phi_z \in \mathcal{R}_A(Fx, Fx)$. Folglich ist $\lambda = 0$. In allen Fällen hat also ϕ_z die Gestalt $\phi_z = \sum_i \psi_{zi}\bar{\alpha}_i$ mit $\psi_{zi} \in \mathrm{Hom}_{k\,(\mathbf{Z}B)}(x_i, z)$. Aus $\sum_z F\phi_z = 0$ folgt nun

$$0 = \sum_z \sum_i (F\psi_{zi})(F\bar{\alpha}_i) = \sum_i \Big(\sum_z F\psi_{zi}\Big) F\bar{\alpha}_i.$$

Sei $w = \tau^{-1}x$. Da

$$Fx \xrightarrow{[F\bar{\alpha}_1 \cdots F\bar{\alpha}_r]^T} \bigoplus_i Fx_i \xrightarrow{[F\overline{\sigma^{-1}\alpha_1} \cdots F\overline{\sigma^{-1}\alpha_r}]} Fw$$

eine Auslander–Reiten-Sequenz in $\underline{\underline{\mathrm{mod}}}\, A$ ist (Anhang 1, 3.4), gibt es ein $l \in \underline{\mathrm{Hom}}_A(Fw, Fy)$ mit $\sum_z (F\psi_{zi}) = l(F\overline{\sigma^{-1}\alpha_i})$ für jedes i. Nach der bereits bewiesenen Surjektivität gibt es nun eine Familie (χ_z) in $\bigoplus_{Fz = Fy} \mathrm{Hom}_{k\,(\mathbf{Z}B)}(w, z)$ mit $l = \sum_z F\chi_z$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\phi_z &= \sum_i \psi_{zi}\bar{\alpha}_i = \sum_i \psi_{zi}\bar{\alpha}_i - \chi_z \sum_i \overline{(\sigma^{-1}\alpha_i)}\overline{\alpha_i}\\ &= \sum_i (\psi_{zi} - \chi_z \overline{(\sigma^{-1}\alpha_i)})\overline{\alpha_i}\end{aligned}$$

und $\sum_z F(\psi_{zi} - \chi_z \overline{(\sigma^{-1}\alpha_i)}) = \sum_z F\psi_{zi} - lF\overline{(\sigma^{-1}\alpha_i)} = 0$. Setze $\phi_{zi} = \psi_{zi} - \chi_z \overline{(\sigma^{-1}\alpha_i)}$. OK.

Aus dem Lemma erhalten wir induktiv für jedes $n \in \mathbf{N}$: Zu jedem $z \in (\mathbf{Z}B)_0$ mit $Fz = Fy$ und jedem Weg $\delta = (w \,|\alpha_n, \ldots, \alpha_1|\, x)$ der Länge n in $\mathbf{Z}B$ gibt es ein $\phi_{z\delta} \in \mathrm{Hom}_{k\,(\mathbf{Z}B)}(w, z)$ mit $\phi_z = \sum_\delta \phi_{z\delta}\bar{\delta}$ und $\sum_z F\phi_{z\delta} = 0$. Betrachten wir nun ein festes z und wählen wir n grösser als die gemeinsame Länge der Wege von x nach z in $\mathbf{Z}B$, so gibt es keinen Weg von w nach z in $\mathbf{Z}B$. Folglich gilt $\mathrm{Hom}_{k\,(\mathbf{Z}B)}(w, z) = 0$, $\phi_{z\delta} = 0$ für jedes δ und $\phi_z = 0$. OK.

KOROLLAR. *Es seien A eine darstellungsendliche Algebra, $\mathcal{R}_A$ das Radikal der Kategorie* mod A *und N eine natürliche Zahl mit $\mathcal{R}_A^N = 0$. Dann gilt $\bar{\delta} = 0$ in $k\,(\mathbf{Z}B)$ für jeden Weg δ von $\mathbf{Z}B$ der Länge $\geq N$.*

Damit ist Satz 1 von 2.1 bewiesen.

2.4 Wir wenden uns nun dem Beweis von Satz 2, §2.1 zu. Ein zusammenhängender gerichteter Baum B, dessen Graph $\bar{B}$ nicht isomorph zu A_n, D_n, E_6, E_7

oder E_8 ist, enthält bekanntlich einen gerichteten Baum B' mit Graph

$$\tilde{D}_n \qquad \begin{array}{ccccc} 0 & & & & n-1 \\ & \diagdown & & \diagup & \\ & & 2 - 3 - \cdots - n-2 & & \\ & \diagup & & \diagdown & \\ 1 & & & & n \end{array}, \quad n \geq 4$$

$$\tilde{E}_6 \qquad \begin{array}{ccccccccc} 1 & - & 2 & - & 3 & - & 4 & - & 5 \\ & & & & | & & & & \\ & & & & 6 & & & & \\ & & & & | & & & & \\ & & & & 7 & & & & \end{array}$$

$$\tilde{E}_7 \qquad \begin{array}{ccccccccccccc} 1 & - & 2 & - & 3 & - & 4 & - & 5 & - & 6 & - & 7 \\ & & & & & & | & & & & & & \\ & & & & & & 8 & & & & & & \end{array}$$

oder

$$\tilde{E}_8 \qquad \begin{array}{ccccccccccccccc} 1 & - & 2 & - & 3 & - & 4 & - & 5 & - & 6 & - & 7 & - & 8 \\ & & & & | & & & & & & & & & & \\ & & & & 9 & & & & & & & & & & \end{array}$$

Betrachten wir das Ideal $\mathcal{J}$ in $k\,(\mathbf{Z}B)$, das von allen Morphismen erzeugt wird, die sich durch ein Objekt in $(\mathbf{Z}B)_0 \backslash (\mathbf{Z}B')_0$ faktorisieren lassen. Offenbar ist $k\,(\mathbf{Z}B')$ äquivalent zu $k\,(\mathbf{Z}B)/\mathcal{J}$. Wir wollen nun zeigen, dass in $\mathbf{Z}B'$ Wege δ beliebiger Länge mit Restklasse $\bar{\delta} \neq 0$ in $k\,(\mathbf{Z}B')$ existieren. Das Gleiche gilt dann auch in $\mathbf{Z}B$, und Satz 2 folgt.

2.5 Es bleibt zu zeigen, dass es im Fall $\bar{B} = \tilde{D}_n$, $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$, $\tilde{E}_8$ Ecken $x \in B_0$ gibt, so dass $\mathrm{Hom}_{k\,(\mathbf{Z}B)}(x, y) \neq 0$ für unendlich viele $y \in (\mathbf{Z}B)_0$. Wir geben dafür einen "theoretischen" Beweis, der auf klassische Ergebnisse zurückgreift und diese neu beleuchtet.

Sei B ein beliebiger endlicher gerichteter Baum B, $\mathrm{mod}\,k\,(B)$ die Kategorie seiner Darstellungen über k und $\mathrm{mod}\,k\,(\mathbf{Z}B)$ die Kategorie der Darstellungen des gebundenen Köchers $\mathbf{Z}B$ mit den Relationen $\sum_{d_1\alpha = x} (\sigma^{-1}\alpha)\alpha = 0$, $\forall x \in (\mathbf{Z}B)_0$. Wir fassen eine Darstellung $W \in \mathrm{mod}\,k\,(\mathbf{Z}B)$ (bzw. $W \in \mathrm{mod}\,k\,(B)$) auf als k-linearen Funktor $k\,(\mathbf{Z}B) \to \mathrm{mod}\,k$ (bzw. $k\,(B) \to \mathrm{mod}\,k$, wobei $k\,(B)$ die volle Unterkategorie von $k\,(\mathbf{Z}B)$ mit der Objektmenge B_0 ist). Als Beispiele haben wir die darstellbaren Funktoren $x_{\mathbf{Z}B} = \mathrm{Hom}_{k\,(\mathbf{Z}B)}(x, ?)$ und $x_B = \mathrm{Hom}_{k\,(B)}(x, ?)$ mit $x \in B_0$.

Diese sind projektiv und geben bekanntlich Anlass zu kanonischen Isomorphismen

$$\operatorname{Hom}(x_{\mathbf{Z}B}, W) \xrightarrow{\sim} W(x) \xleftarrow{\sim} \operatorname{Hom}(x_B, W \mid k(B)), \qquad W \in \operatorname{mod} k(\mathbf{Z}B),$$

die wir folgendermassen deuten: Sei $\mathcal{R}: \operatorname{mod} k(\mathbf{Z}B) \to \operatorname{mod} k(B)$, $W \mapsto W \mid k(B)$ die *Restriktion und* $\mathcal{L}: \operatorname{mod} k(B) \to \operatorname{mod} k(\mathbf{Z}B)$ der zu $\mathcal{R}$ linksadjungierte Funktor. Für jedes $V \in \operatorname{mod} k(B)$ ist $\mathcal{L}V$ bis auf Isomorphie durch die Existenz eines in W funktoriellen Isomorphismus gekennzeichnet:

$$\operatorname{Hom}(\mathcal{L}V, W) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(V, W \mid k(B)).$$

Folglich ist $x_{\mathbf{Z}B} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}x_B$.

2.6 Wir haben zu untersuchen, bei welchen Ecken $y \in (\mathbf{Z}B)_0$ der Funktor $x_{\mathbf{Z}B} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}x_B$ den Wert 0 annimmt. Mit diesem Ziel im Auge wählen wir unter vielen möglichen Konstruktionen des Funktors $\mathcal{L}$ die folgende aus: Wir versehen B_0 mit der minimalen Halbordnung, derart dass $d_1\alpha < d_0\alpha$ für alle $\alpha \in B_1$. Wir wählen eine Aufzählung $x_1, \ldots, x_r$ von B_0, derart dass $i < j$ die Relation $x_i \not\geq x_j$ impliziert. Zur Kategorie $K_0 = k(B)$ fügen wir dann schrittweise die Objekte

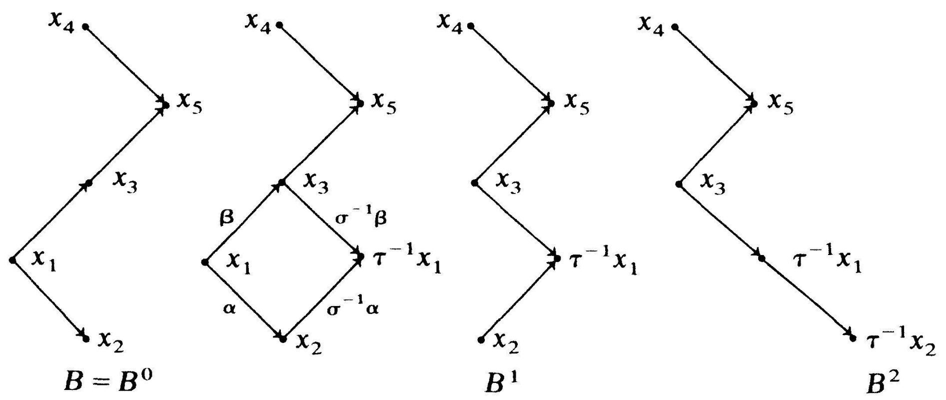
$$\tau^{-1}x_1, \tau^{-1}x_2, \ldots, \tau^{-1}x_r, \tau^{-2}x_1, \ldots, \tau^{-2}x_r, \tau^{-3}x_1, \ldots$$

hinzu. Somit erhalten wir eine aufsteigende Folge

$$K_0 = k(B) \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_r \subset K_{r+1} \subset \cdots \subset K_{2r} \subset K_{2r+1} \subset \cdots$$

bestehend aus vollen Unterkategorien von $k(\mathbf{Z}B)$. Die Restriktion $\mathcal{R}$ ist die Komposition der Restriktionen $\operatorname{mod} k(\mathbf{Z}B) \xrightarrow{\mathcal{R}'_n} \operatorname{mod} K_n \xrightarrow{\mathcal{R}_n} \operatorname{mod} K_0$. Folglich ist $\mathcal{L}$ eine Komposition linksadjungierter Funktoren $\operatorname{mod} K_0 \xrightarrow{\mathcal{L}_n} \operatorname{mod} K_n \xrightarrow{\mathcal{L}'_n} \operatorname{mod} k(\mathbf{Z}B)$, und es gilt offensichtlich $\mathcal{L}_n \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}'_n\mathcal{L}$ (da K_n eine volle Unterkategorie von $k(\mathbf{Z}B)$ ist, gilt nämlich $\mathcal{R}'_n\mathcal{L}'_n \xrightarrow{\sim} \mathbf{1}$: Deute $\mathcal{L}'_n$ als Kanerweiterung, [11] Kap. X). Ferner verschwindet $\mathcal{L}V$ für jedes $V \in \operatorname{mod} K_0$ an den Stellen $\tau^s x$ mit $x \in B_0$ und $s > 0$. Mit anderen Worten: Wir können $\mathcal{L}V$ konstruieren, indem wir V schrittweise auf $K_1, K_2, \ldots$ erweitern.

Wir geben die Konstruktion von $\mathcal{L}_1 V$ (Beweis klar!): Es ist $(\mathcal{L}_1 V)(x) = V(x)$ für $x \in B_0$, und $(\mathcal{L}_1 V)(\tau^{-1}x_1)$ ist der Cokern der Abbildung $[(V(\alpha)]: V(x_1) \to \bigoplus_\alpha V(d_0\alpha)$, wobei α die Pfeile von B mit $d_1\alpha = x_1$ durchläuft. Die Morphismen $(\mathcal{L}_1 V)(\sigma^{-1}\alpha): V(d_0\alpha) \to (\mathcal{L}_1 V)(\tau^{-1}x_1)$ sind die Komponenten der Cokernprojek-



Figur 7

tion. Nach Konstruktion haben wir also eine exakte Sequenz

$$V(x_1) \xrightarrow{[V(\alpha)]} \bigoplus_{d_1\alpha = x_1} V(d_0\alpha) \xrightarrow{[(\mathscr{L}_1 V)(\sigma^{-1}\alpha)]} (\mathscr{L}_1 V)(\tau^{-1}x_1) \to 0$$

Durch Iterieren dieser Konstruktion erhalten wir das folgende Ergebnis (Fig. 7): Es seien $B^0 = B$, B^1, $B^2, \ldots, B^r, B^{r+1}, \ldots$ die vollen Unterköcher von $\mathbf{Z}B$ mit den Eckenmengen

$$\begin{aligned}
&B_0^0 = B_0,\\
&B_0^1 = (B_0^0 \backslash \{x_1\}) \cup \{\tau^{-1}x_1\},\\
&B_0^2 = (B_0^1 \backslash \{x_2\}) \cup \{\tau^{-1}x_2\}, \ldots,\\
&B_0^r = (B_0^{r-1} \backslash \{x_r\}) \cup \{\tau^{-1}x_r\} = \tau^{-1}B_0,\\
&B_0^{r+1} = (B_0^r \backslash \{\tau^{-1}x_1\}) \cup \{\tau^{-2}x_1\}, \ldots
\end{aligned}$$

Die Verschiebung τ liefert Isomorphismen $B^{i+r} = \tau^{-1}B^i \xrightarrow{\sim} B^i$, und B^{i+1} ergibt sich aus B^i durch die Bernstein–Gelfand–Ponomarjow-Transformation einer "Quelle" in eine "Senke" [2]. Der Funktor $V \mapsto \mathscr{L}V \mid B^1$ stimmt überein mit dem Funktor $F_{x_1}^-$ in der Notation von [7], 1.5, und $V \mapsto \mathscr{L}V \mid B^r$ identifiziert sich mit dem Coxeter-Funktor Φ^- im Sinne von Berstein–Gelfand–Ponomarjow.

Nun ist für $x = x_1$ die Darstellung $x_B \in \operatorname{mod} k\,(B)$ projektiv unzerlegbar. Im Fall $\bar{B} = \tilde{D}_n$, $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$, $\tilde{E}_8$ ist nach Dlab–Ringel [6] (siehe auch [7], Theorem 1.8a)) $x_{\mathbf{Z}B} \mid B^{pr} \xrightarrow{\sim} \mathscr{L}x_B \mid B^{pr} \xrightarrow{\sim} \Phi^{-p}(x_B)$ unzerlegbar für jedes p. Insbesondere verschwindet $x_{\mathbf{Z}B} = \operatorname{Hom}_{k(\mathbf{Z}B)}(x, ?)$ nicht auf $B^{pr} = \tau^{-p}B$. Dies beendet den Beweis von 2.1, Satz 2.

3. Anhang 1: Auslander–Reiten-Sequenzen

Sei Λ eine endlichdimensionale Algebra über k, wobei wir k zur Vereinfachung als *algebraisch abgeschlossen* voraussetzen. Mit $\operatorname{mod}\Lambda$ bezeichnen wir die Kategorie der endlichdimensionalen Λ-Linksmoduln, mit $\mathcal{T}$ eine feste Menge von Isomorphieklassen unzerlegbarer Moduln aus $\operatorname{mod}\Lambda$. Wir nennen $M\in\operatorname{mod}\Lambda$ einen *$\mathcal{T}$-Modul*, wenn die Isomorphieklassen aller unzerlegbaren direkten Summanden von M zu $\mathcal{T}$ gehören. Für $M, N\in\operatorname{mod}\Lambda$ bezeichnen wir mit $\mathcal{T}(M, N)$ den Unterraum von $\operatorname{Hom}_\Lambda(M, N)$ bestehend aus den Morphismen, die sich durch einen $\mathcal{T}$-Modul faktorisieren lassen. Die Unterräume $\mathcal{T}(M, N)$ liefern ein Ideal $\langle\mathcal{T}\rangle$ der Kategorie $\operatorname{mod}\Lambda$. Die zu $\langle\mathcal{T}\rangle$ gehörige Restklassenkategorie $\operatorname{mod}\Lambda/\langle\mathcal{T}\rangle$ mit den Morphismenmengen $\underline{\operatorname{Hom}}_\Lambda(M, N)=\operatorname{Hom}_\Lambda(M, N)/\mathcal{T}(M, N)$ bezeichnen wir mit $\underline{\operatorname{mod}}\,\Lambda$. Unsere Notation stimmt mit derjenigen von §2 überein, wenn $\mathcal{T}$ die Menge der transjektiven Isomorphieklassen ist.

3.1 DEFINITION. Es sei X ein unzerlegbares Objekt von $\underline{\operatorname{mod}}\,\Lambda$. Ein Morphismus $f\in\underline{\operatorname{Hom}}_\Lambda(X, Y)$ heisst q-irreduzibel, wenn f kein Schnitt ist und wenn für jede Faktorisierung $X\xrightarrow{f_1} Z\xrightarrow{f_2} Y$ von f in $\underline{\operatorname{mod}}\,\Lambda$ entweder f_1 ein Schnitt ist oder f_2 eine Retraktion.

Wir können die q-irreduziblen Morphismen leicht mit Hilfe des "Radikals" der Kategorie $\underline{\operatorname{mod}}\,\Lambda$ charakterisieren. Für $X, Y\in\underline{\operatorname{mod}}\,\Lambda$ setzen wir $\underline{\mathcal{R}}_\Lambda(X, Y)=\left\{f\in\underline{\operatorname{Hom}}_\Lambda(X, Y): \begin{bmatrix}0 & 0\\ f & 0\end{bmatrix} \text{ liegt im Radikal von } \underline{\operatorname{End}}_\Lambda(X\oplus Y)\right\}$. Die an f gestellte Bedingung ist bekanntlich dazu äquivalent, dass f keinen unzerlegbaren direkten Summanden von X isomorph auf einen direkten Summanden von Y abbildet. Die Vektorräume $\underline{\mathcal{R}}_\Lambda(X, Y)$ bilden ein *Ideal* $\underline{\mathcal{R}}_\Lambda$ von $\underline{\operatorname{mod}}\,\Lambda$: Wir nennen es *Radikal* von $\underline{\operatorname{mod}}\,\Lambda$. Das Quadrat $\underline{\mathcal{R}}_\Lambda^2$ des Radikals definieren wir vermöge

$$\underline{\mathcal{R}}_\Lambda^2(X, Y)=\sum_{Z\in\underline{\operatorname{mod}}\,\Lambda}\underline{\mathcal{R}}_\Lambda(Z, Y)\circ\underline{\mathcal{R}}_\Lambda(X, Z).$$

SATZ. *Es sei $Y_1,\ldots, Y_r$ eine Folge paarweise nichtisomorpher unzerlegbarer Objekte in $\underline{\operatorname{mod}}\,\Lambda$. Ist $X\in\underline{\operatorname{mod}}\,\Lambda$ unzerlegbar, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *Der Morphismus $f=[f_1\cdots f_r]^T: X\to Y_1^{n_1}\oplus\cdots\oplus Y_r^{n_r}$ ist q-irreduzibel in $\underline{\operatorname{mod}}\,\Lambda$.*

(ii) *Für jedes $i=1,\ldots, r$ liegen die Komponenten $f_{i1},\ldots, f_{in_i}$ von f_i in $\underline{\mathcal{R}}_\Lambda(X, Y_i)$, und ihre Restklassen $\bar{f}_{i1},\ldots, \bar{f}_{in_i}\in\underline{\mathcal{R}}_\Lambda(X, Y_i)/\underline{\mathcal{R}}_\Lambda^2(X, Y_i)$ sind k-linear unabhängig.*

Beweis. (i)$\Rightarrow$(ii): Da f keine Retraktion zulässt, sind die Komponenten f_{ij} nicht invertierbar. Folglich liegen sie im Radikal. Bestünde eine Abhängigkeit zwischen $\bar{f}_{i1}, \ldots, \bar{f}_{in_i}$, zum Beispiel $\bar{f}_{i1} = \lambda_2 \bar{f}_{i2} + \cdots + \lambda_{n_i} \bar{f}_{in_i}$ mit $\lambda_j \in k$, so gäbe es eine Relation $f_{i1} = \lambda_2 f_{i2} + \cdots + \lambda_{n_i} f_{in_i} + gh$ mit $h \in \mathcal{R}_\Lambda(X, Z)$ und $g \in \mathcal{R}_\Lambda(Z, Y_i)$. Wir hätten dann die Faktorisierung

$$f_i = \begin{bmatrix} f_{i1} \\ f_{i2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{in_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{n_i} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ f_{i2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{in_i} \end{bmatrix}$$

und eine entsprechende Faktorisierung für f: Widerspruch.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Nehmen wir an, f sei q-reduzibel, d.h. eine Komposition $X \xrightarrow{h} Z \xrightarrow{g} Y_1^{n_1} \oplus \cdots \oplus Y_r^{n_r}$, wobei h kein Schnitt und $g = [g_1 \cdots g_r]^T$ keine Retraktion ist. Gibt es zu jedem g_i einen Schnitt $s_i : Y_i^{n_i} \to Z$, so sind in der Komposition $[g_i s_j] : Y \to Y$ mit $Y = Y_1^{n_1} \oplus \cdots \oplus Y_r^{n_r}$ die Diagonalkomponenten $g_i s_i$ identische Morphismen, während $g_i s_j$ für $i \neq j$ in $\mathcal{R}_\Lambda$ liegt. Folglich ist $[g_i s_j]$ invertierbar: Widerspruch. Wir schliessen daraus, dass g_i für ein geeignetes i keine Retraktion ist.

Es sei dann $Z = Y_i^m \oplus T$, wobei T keinen zu Y_i isomorphen direkten Summanden enthält. Es sei ferner $h = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ und $g_i = [c\ d]$ mit $f_i = ca + db$. Da h kein Schnitt ist, gilt $a \in \mathcal{R}_\Lambda(X, Y_i^m)$ und $b \in \mathcal{R}_\Lambda(X, T)$. Wegen $d \in \mathcal{R}_\Lambda(T, Y_i^{n_i})$ erhalten wir schliesslich $\bar{f}_i = [\bar{f}_{i1} \cdots \bar{f}_{in_i}]^T = \bar{c}\bar{a} \in \mathcal{R}_\Lambda(X, Y_i)^{n_i} / \mathcal{R}_\Lambda^2(X, Y_i)^{n_i}$ mit $\bar{a} \in \mathcal{R}_\Lambda(X, Y_i)^m / \mathcal{R}_\Lambda^2(X, Y_i)^m$ und $\bar{c} \in \underline{\mathrm{Hom}}_\Lambda(Y_i^m, Y_i^{n_i}) / \mathcal{R}_\Lambda(Y_i^m, Y_i^{n_i}) \xrightarrow{\sim} k^{n_i \times m}$. Da $\bar{c}$ keine Retraktion ist, gilt $\mathrm{Rang}(\bar{c}) < n_i$, und es gibt eine Zeile $0 \neq \lambda = [\lambda_1 \cdots \lambda_{n_i}] \in k^{1 \times n_i}$ mit $\lambda \bar{c} = 0$ Daraus folgt schliesslich $\lambda_1 \bar{f}_{i1} + \cdots + \lambda_{n_i} \bar{f}_{in_i} = \lambda \bar{f} = \lambda \bar{c} \bar{a} = 0$: Widerspruch. OK.

3.2 DEFINITION. Es sei $X \in \underline{\mathrm{mod}}\, \Lambda$ unzerlegbar. Ein Morphismus $f \in \underline{\mathrm{Hom}}_\Lambda(X, Y)$ heisst maximal q-irreduzibel, wenn f q-irreduzibel ist und $[f\ g]^T : X \to Y \oplus Z$ q-reduzibel für jedes $Z \neq 0$.

SATZ. *Es sei $X \in \underline{\mathrm{mod}}\, \Lambda$ unzerlegbar:*

(a) *Es gibt einen maximalen q-irreduziblen Morphismus $f : X \to Y$ in $\underline{\mathrm{mod}}\, \Lambda$.*

(b) *Ist $f : X \to Y$ maximal q-irreduzibel und $g : X \to Z$ kein Schnitt, so existiert ein $h : Y \to Z$ in $\underline{\mathrm{mod}}\, \Lambda$ mit $g = hf$. Ist auch g maximal q-irreduzibel, so ist jedes solche h invertierbar.*

Nach Satz 3.1 bedeutet die Existenz eines maximalen q-irreduziblen Morphismus $f:X\to Y$, dass es bis auf Isomorphie nur endlich viele unzerlegbare $Z\in \underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda$ mit $\mathcal{R}_\Lambda(X,Z)\neq\mathcal{R}_\Lambda^2(X,Z)$ gibt.

Beweis. Nach Voraussetzung hat der Λ-Modul X die Gestalt $X=X_0\oplus T$ mit unzerlegbarem X_0, wobei T ein $\mathcal{T}$-Modul ist und X_0 nicht. Wir können ohne Beschränkung annehmen, dass $X=X_0$. Dann existiert nach [1] ein maximaler q-irreduzibler Morphismus $e:X\to Y$ in mod Λ. Die Restklasse $\bar{e}\in\underline{\mathrm{Hom}}_\Lambda(X,Y)$ ist dann offensichtlich maximal q-irreduzibel in $\underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda$ und erfüllt die erste Aussage von (b) für $f=\bar{e}$. Ist g q-irreduzibel, so ist h eine Retraktion, und $\bar{e}$ ist isomorph zu einem Morphismus $[g\ l]^T:X\to Z\oplus\mathrm{Ker}h$. Ist g sogar maximal q-irreduzibel, so ist $\mathrm{Ker}h=0$. Folglich ist jeder maximal q-irreduzible Morphismus f mit Quelle X isomorph zu $\bar{e}$, und (b) ist erfüllt. OK.

3.3 DEFINITION. Es sei Z ein unzerlegbares Objekt von $\underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda$. Ein Morphismus $g\in\underline{\mathrm{Hom}}_\Lambda(Y,Z)$ heisst z-irreduzibel, wenn g keine Retraktion ist und wenn für jede Faktorisierung $Y\xrightarrow{g_2}X\xrightarrow{g_1}Z$ von g in $\underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda$ entweder g_1 eine Retraktion oder g_2 ein Schnitt ist.

Sind Y und Z beide unzerlegbar, so stimmen die Definitionen der z-Irreduzibilität und der q-Irreduzibilität von g überein. Wir sagen dann einfach, dass g *irreduzibel* ist. Für z-irreduzible Morphismen gelten die dualen Sätze zu 3.1 und 3.2.

SATZ. *Für unzerlegbare Objekte $Y,Z\in\underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda$ sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:*

(*i*) *Der Morphismus $[g_1\cdots g_n]:Y^n\to Z$ ist z-irreduzibel.*

(ii) *Der Morphismus $[g_1\cdots g_n]^T:Y\to Z^n$ ist q-irreduzibel.*

Beweis. Nach Satz 3.1 und der dazu dualen Behauptung bedeuten beide Aussagen, dass die Restklassen $\bar{g}_1,\ldots,\bar{g}_n\in\mathcal{R}_\Lambda(Y,Z)/\mathcal{R}_\Lambda^2(Y,Z)$ linear unabhängig sind. OK.

3.4 DEFINITION. Eine Auslander–Reiten-Sequenz von mod Λ ist ein Diagramm der Gestalt

$$X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z$$

mit $gf=0$, wobei $X,Z\in\underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda$ unzerlegbar sind, $Y\neq 0$, f maximal q-irreduzibel und g maximal z-irreduzibel.

Im Fall $\mathcal{T} = \emptyset$ sind die Auslander-Reiten-Sequenzen die "almost split sequences" von [1].

SATZ. *Es seien X unzerlegbar und $f: X \to Y$ maximal q-irreduzibel in $\underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda$.*

(a) *Entweder ist f epimorph in $\underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda$, oder es existiert eine Auslander–Reiten-Sequenz der Gestalt $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} TrDX$* ([1]).

(b) *Sei $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ eine Auslander–Reiten-Sequenz in $\underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda$. Zu jedem $h \in \underline{\mathrm{Hom}}_\Lambda(Y, M)$ mit $hf = 0$ gibt es ein $l \in \underline{\mathrm{Hom}}_\Lambda(Z, M)$ mit $h = lg$; zu jedem $p \in \underline{\mathrm{Hom}}_\Lambda(N, Y)$ mit $gp = 0$ gibt es ein $q \in \underline{\mathrm{Hom}}_\Lambda(N, X)$ mit $p = fq$.*

(c) *Sind $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ und $X \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z'$ Auslander–Reiten-Sequenzen zu X, so existieren Isomorphismen $y: Y \xrightarrow{\sim} Y'$ und $z: Z \xrightarrow{\sim} Z'$ mit $f' = yf$ und $gy = zg'$.*

Beweis. Wir nehmen ohne Beschränkung an, dass X ein unzerlegbarer Λ-Modul ist. Ist X injektiv in mod Λ mit Sockel S, so ist die kanonische Projektion $p: X \to X/S$ bekanntlich maximal q-irreduzibel in mod Λ. Folglich ist $\bar{p} \in \underline{\mathrm{Hom}}_\Lambda(X, X/S)$ maximal q-irreduzibel in $\underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda$. Wir zeigen, dass $\bar{p}$ epimorph ist: Sei $q \in \mathrm{Hom}_\Lambda(X/S, M)$ mit $\bar{q}\bar{p} = 0$. Dann ist qp eine Komposition $X \xrightarrow{r} T \xrightarrow{s} M$, wobei T ein $\mathcal{T}$-Modul ist. Da X in $\underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda$ nicht null ist, ist r nicht injektiv und hat deshalb die Form $r = tp$. Aus $qp = sr = stp$ folgt nun $(q - st)p = 0$, $q - st = 0$ und $\bar{q} = 0$.

Ist X nicht injektiv in mod Λ, so existiert in mod Λ nach [1] eine Auslander–Reiten-Sequenz

$$X \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} TrDX$$

mit injektivem u und surjektivem v. Wir zeigen, dass die induzierte Sequenz $X \xrightarrow{\bar{u}} E \xrightarrow{\bar{v}} TrDX$ die Bedingung (b) erfüllt: Es sei nämlich $w \in \mathrm{Hom}_\Lambda(E, M)$ mit $\bar{w}\bar{u} = 0$. Dann ist wu eine Komposition $X \xrightarrow{r} T \xrightarrow{s} M$, wobei T ein $\mathcal{T}$-Modul ist. r ist kein Schnitt und hat deshalb die Form $r = tu$. Aus $wu = sr = stu$ folgt $(w - st)u = 0$. Da Auslander–Reiten-Sequenzen in mod Λ exakt sind, faktorisiert $w - st$ durch $v: w - st = mv$. Es folgt $\bar{w} = \bar{m}\bar{v}$. Duale Argumente liefern den 2. Teil von (b).

Ist X nicht injektiv und $TrDX$ ein $\mathcal{T}$-Modul, so ist $\bar{u}$ also epimorph. Die Folgerung gilt selbstverständlich auch, wenn $\bar{u} = 0$, d.h. wenn E ein $\mathcal{T}$-Modul ist.

Bleibt der Fall, wo E, $TrDX$ keine $\mathcal{T}$-Moduln sind und X nicht injektiv. In diesem Fall ist $X \xrightarrow{\bar{u}} E \xrightarrow{\bar{v}} TrDX$ nach Konstruktion eine Auslander–Reiten-Sequenz in $\underline{\mathrm{mod}}\ \Lambda$. Da $\bar{u}$ und f beide maximal q-irreduzibel sind, gibt es nach Satz 3.2 einen Isomorphismus $h: E \xrightarrow{\sim} Y$ mit $f = h\bar{u}$. Wir setzen $g = \bar{v}h^{-1}$. *Damit ist* (a) *bewiesen.*

Wir beweisen (b): Sei $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ eine Auslander–Reiten-Sequenz. Da $\bar{u}$ und f beide maximal q-irreduzibel sind, gibt es nach 3.2 einen Isomorphismus $h: E \xrightarrow{\sim} Y$ mit $f = h\bar{u}$. Da $X \xrightarrow{\bar{u}} E \xrightarrow{\bar{v}} TrDX$ die Bedingung (b) erfüllt, existiert ein $l: TrDX \to Z$ mit $l\bar{v} = gh$. Da gh z-irreduzibel ist und $\bar{v}$ kein Schnitt, ist l eine Retraktion zwischen unzerlegbaren Objekten und folglich ein Isomorphismus. Mit der einen genügt nun auch die andere Sequenz der Aussage (b).

Zu (c): Nach dem Beweis von (b) ist jede Auslander–Reiten-Sequenz zu X isomorph zu $X \xrightarrow{\bar{u}} E \xrightarrow{\bar{v}} TrDX$. OK.

3.5 In dieser Arbeit betrachten wir hauptsächlich darstellungsendliche Algebren. Für diese gilt der folgende Satz, den wir K. Bongartz verdanken.[1]

SATZ. *Sind X, Y unzerlegbare Moduln über der darstellungsendlichen Algebra Λ, und ist $\mathcal{R}_\Lambda$ das Radikal von* mod Λ, *so gilt* $[\mathcal{R}_\Lambda(X, Y)/\mathcal{R}_\Lambda^2(X, Y): k] \leq 1$. *Mit anderen Worten: Ist der Morphismus $f: X \to Y^n$ q-irreduzibel, so gilt $n \leq 1$.*

Beweis. Da die Komponenten $f_1, \ldots, f_n$ von f q-irreduzibel sind, gilt $[X:k] \neq [Y:k]$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

(a) *Fall* $[X:k] < [Y:k]$: Aus Dimensionsgründen ist f injektiv und X nicht! Betrachten wir die Auslander–Reiten-Sequenz

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\ g\ } Y^n \oplus Z \xrightarrow{\ h\ } TrDX \longrightarrow 0$$

zu X in mod Λ. Aus $n \geq 2$ folgt $[Y:k] < [TrDX:k]$, und $h \mid Y^n: Y^n \to TrDX$ ist z-irreduzibel. Nach 3.3 existiert ein q-irreduzibler Morphismus $Y \to (TrDX)^n$. Induktiv erhalten wir

$$[X:k] < [Y:k] < [TrDX:k] < [TrDY:k] < \cdots < [(TrD)^r X:k] < [(TRD)^r Y:k]$$

für jedes $r \in \mathbf{N}$. Da $(TrD)^r X$ unzerlegbar ist, kann Λ nicht darstellungsendlich sein.

(b) *Fall* $[X:k] > [Y:k]$: dualer Beweis! OK.

---

[1]Wie wir inzwischen erfahren haben, ist dieser Satz seit längerer Zeit in der Schule von M. Auslander als unveröffentlichtes Ergebnis von R. Bautista bekannt.

4. Anhang 2: Zulässige Automorphismengruppen

Es sei B ein gerichteter Baum, so dass $\bar{B}$ den Graphen $\bar{\mathbf{N}}$ nicht enthält. (Der gerichtete Baum $\mathbf{N}$ hat $\mathbf{N}$ als Eckenmenge und enthält zu jedem $i \in \mathbf{N}$ einen Pfeil $i \to i+1$).

4.1 Wir bezeichnen mit $(\operatorname{Aut} \bar{B})_0$ die Teilmenge $\{f \in \operatorname{Aut} \bar{B} : \exists x \in B_0 \text{ mit } fx = x\}$ von $\operatorname{Aut} \bar{B}$. Bekanntlich ist $(\operatorname{Aut} \bar{B})_0$ eine Gruppe, und es gibt mindestens eine Ecke $x \in B_0$, die fest bleibt unter $(\operatorname{Aut} \bar{B})_0$. Ist $(\operatorname{Aut} \bar{B})_0 \neq \operatorname{Aut} \bar{B}$, so gibt es genau eine Kante von B, die fest bleibt unter $\operatorname{Aut} \bar{B}$. Dann ist $\operatorname{Aut} \bar{B}/(\operatorname{Aut} \bar{B})_0 \xrightarrow{\sim} \bar{\rho}^{\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}}$, $\rho \notin (\operatorname{Aut} \bar{B})_0$.

4.2 Mit p bezeichnen wir den in 1.3 definierten Morphismus $p : \operatorname{Aut} \mathbf{Z}B \to \operatorname{Aut} \bar{B}$.

SATZ. *Die Verschiebung τ ist zentral in* $\operatorname{Aut} \mathbf{Z}B$, *und die Sequenz*

$$1 \to \tau^{\mathbf{Z}} \to \operatorname{Aut} \mathbf{Z}B \xrightarrow{p} \operatorname{Aut} \bar{B} \to 1$$

ist exakt.

Beweis. Klar nach 1.3. OK.

Wir bezeichnen $p^{-1}((\operatorname{Aut} \bar{B})_0)$ mit $(\operatorname{Aut} \mathbf{Z}B)_0$ und die Projektion $(\operatorname{Aut} \mathbf{Z}B)_0 \to (\operatorname{Aut} \bar{B})_0$ mit p_0.

KOROLLAR. $(\operatorname{Aut} \mathbf{Z}B)_0 \xrightarrow{\sim} \tau^{\mathbf{Z}} \times (\operatorname{Aut} \bar{B})_0$.

Beweis. Es sei $x \in B_0$ fix unter $(\operatorname{Aut} \bar{B})_0$. Die Untergruppe $\tau^{\mathbf{Z}} \subset (\operatorname{Aut} \mathbf{Z}B)_0$ hat als Supplement S die Gruppe der Automorphismen mit Fixpunkt $(0, x)$.

KOROLLAR. *Jede nichttriviale zulässige Automorphismengruppe $G \subset$* $\operatorname{Aut} \mathbf{Z}B$ *ist zyklisch unendlicher Ordnung.*

Beweis. Die Gruppe $G_0 = G \cap (\operatorname{Aut} \mathbf{Z}B)_0$ ist zulässig. Darum gilt $G_0 \cap S = \{1\}$, S wie oben, die Projektion $G_0 \to \tau^{\mathbf{Z}}$ längs S ist injektiv, und es ist $G_0 \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}$ oder $G_0 \xrightarrow{\sim} \{1\}$. Ist $G = G_0$, so ist G_0 nicht trivial, und wir sind fertig. Ist $G \neq G_0$, so ist G eine Erweiterung von G_0 mit $\bar{\rho}^{\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}}$ (4.1). Eine solche Erweiterung ist trivial oder zyklisch. Nehmen wir an, sie sei trivial, was insbesondere den Fall $G_0 \xrightarrow{\sim} \{1\}$ einschliesst: Sei x—y fest unter $\bar{\rho}$ und B' der volle Unterköcher von B mit $(B')_0 = \{x, y\}$. Unter einem Repräsentanten $\rho \in G$ von $\bar{\rho}$ mit $\rho^2 = 1$ bleibt der

Darstellungsköcher $\mathbf{Z}B' \subset \mathbf{Z}B$ stabil. Nun gilt offensichtlich Aut $\mathbf{Z}B' \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}$. Wegen $\rho^2 = 1$ operiert ρ trivial auf $\mathbf{Z}B'$, und $\bar{\rho}$ hat die Fixpunkte x, y: Widerspruch. OK.

4.3 Wir wollen für $\bar{B} = A_n$, D_n, E_6, E_7 und E_8 bis auf Konjugation alle zulässigen nichttrivialen Automorphismengruppen bestimmen:

$\bar{B} = A_n$, n ungerade:

Es gilt Aut $\bar{B} = (\text{Aut } \bar{B})_0 = \bar{\phi}^{\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}}$ mit $\bar{\phi} i = n+1-i$ und folglich Aut $\mathbf{Z}B = \tau^{\mathbf{Z}} \times \phi^{\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}}$ mit $\phi(0, (n+1)/2) = (0, (n+1)/2)$ und $p\phi = \bar{\phi}$. Die zulässigen nichttrivialen Automorphismengruppen sind $(\tau^r)^{\mathbf{Z}}$ und $(\tau^r \phi)^{\mathbf{Z}}$ mit $r > 0$.

$\bar{B} = A_n$, n gerade:

Es ist Aut $\bar{B} = \bar{\rho}^{\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}}$ mit $\bar{\rho} i = n+1-i$ und $(\text{Aut } \bar{B})_0 = \{1\}$. Somit gilt Aut $\mathbf{Z}B = \rho^{\mathbf{Z}}$ mit $\tau = \rho^2$ und $p\rho = \bar{\rho}$. Die zulässigen nichttrivialen Automorphismengruppen sind die Gruppen $(\rho^r)^{\mathbf{Z}}$ mit $r > 1$.

$\bar{B} = D_n = 1 - 2 - \cdots - n-2 <\begin{smallmatrix} n-1 \\ n \end{smallmatrix}$, $n \geq 5$:

Es gilt Aut $\bar{B} = (\text{Aut } \bar{B})_0 = \bar{\phi}^{\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}}$ mit $\bar{\phi} i = i$, $i = 1, \ldots, n-2$, $\bar{\phi}(n-1) = n$, $\bar{\phi} n = n-1$. Somit ist Aut $\mathbf{Z}B = \tau^{\mathbf{Z}} \times \phi^{\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}}$ mit $\phi(0, 1) = (0, 1)$ und $p\phi = \bar{\phi}$. Also sind die zulässigen nichttrivialen Automorphismengruppen $(\tau^r)^{\mathbf{Z}}$ und $(\tau^r \phi)^{\mathbf{Z}}$ mit $r > 0$.

$\bar{B} = D_4 = 1 - 2 <\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix}$:

Die Gruppe Aut $\bar{B} = (\text{Aut } \bar{B})_0$ ist die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_3$. Somit gilt Aut $\mathbf{Z}B = \tau^{\mathbf{Z}} \times S$, S wie in 4.2. Bis auf Konjugation sind $\{1\}$, $(3\,4)^{\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}}$ und $(1\,3\,4)^{\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}}$ die einzigen zyklischen Untergruppen von $\mathfrak{S}_3$. Eine zulässige nichttriviale Automorphismengruppe ist konjugiert zu $(\tau^r)^{\mathbf{Z}}$, $(\tau^r \phi)^{\mathbf{Z}}$ oder $(\tau^r \psi)^{\mathbf{Z}}$ mit $r > 0$, $\phi, \psi \in S$, $p\phi = (3\,4)$ und $p\psi = (1\,3\,4)$.

$$\bar{B} = E_6 = \begin{array}{c} 1-2-3-5-6 \\ \quad\quad\;\; | \\ \quad\quad\;\; 4 \end{array}:$$

In diesem Fall gilt Aut $\bar{B} = (\text{Aut } \bar{B})_0 = \bar{\phi}^{\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}}$ mit $\bar{\phi} = (16)(25)$ und Aut $\mathbf{Z}B = \tau^{\mathbf{Z}} \times \phi^{\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}}$ mit $\phi(0, 3) = (0, 3)$ und $p\phi = \bar{\phi}$. Die zulässigen nichttrivialen Automorphismengruppen sind $(\tau^r)^{\mathbf{Z}}$ und $(\tau^r \phi)^{\mathbf{Z}}$ mit $r > 0$.

$$\bar{B} = E_n = \begin{array}{c} 1-2-3-5 \cdots - n \\ \quad\quad\;\; | \\ \quad\quad\;\; 4 \end{array}, \; n = 7, 8:$$

Es ist Aut $\bar{B}=\{1\}$ und Aut $\mathbf{Z}B=\tau^{\mathbf{Z}}$. Die zulässigen nichttrivialen Untergruppen sind die Gruppen $(\tau^r)^{\mathbf{Z}}$ mit $r>0$.

4.4 *Schlussbemerkung: Die geometrische Realisierung eines Darstellungsköchers.* Es befriedigt uns zu wissen, dass die Fundamentalgruppe und die universelle Ueberlagerung eines Darstellungsköchers Γ eine geometrische Interpretation zulassen. Jedem Γ können wir nämlich einen Flächenkomplex (= simpliziale Menge der Dimension ≤ 2 in der Terminologie von [9]) $K\Gamma$ zuordnen: Die 0-Simplizes von $K\Gamma$ sind die Ecken von Γ. Die Menge der nichtentarteten 1-Simplizes ist die disjunkte Vereinigung der Pfeilmenge Γ_1 mit dem Graph $\{(x, \tau x)\}$ der Verschiebung τ; auf Γ_1 fallen die Randabbildungen mit den Abbildungen d_0 und d_1 von 1.1 zusammen; auf dem Graph sind sie definiert durch $d_0(x, \tau x)=x$, $d_1(x, \tau x)=\tau x$. Die nicht-entarteten 2-Simplizes schliesslich sind die Wege δ von Γ der Gestalt $\tau x \xrightarrow{\sigma\alpha} y \xrightarrow{\alpha} x$; wir setzen $d_0\delta=\alpha$, $d_1\delta=(x, \tau x)$, $d_2\delta=\sigma\alpha$.

Die Ueberlagerungen Δ von Γ entsprechen den Ueberlagerungen des Flächenkomplexes $K\Gamma$ vermöge $\Delta \mapsto K\Delta$. Wie wir wissen, entsprechen diese den (topologischen) Ueberlagerungen der geometrischen Realisierung $|K\Gamma|$ von $K\Gamma$ (siehe Figuren).

Die Figuren 1b, 2, 3 und 5 zeigen eine Ueberlagerung (1.6) des entsprechenden Auslander-Reiten-Köchers. Punkte bzw. Pfeile, die denselben Modul bzw. Morphismus repräsentieren, sind zu identifizieren. Vergessen wir im 1. Beispiel zusätzlich die projektiven Darstellungen, d.h. betrachten wir den stabilen Teil ${}_s\Gamma_A$ (1.4), so entsteht Figur 1a.

Die Verschiebung τ ist als unterbrochene Linie eingetragen. In Figur 2 haben wir auf diese Angabe verzichtet; es ist klar, für welche Moduln τ definiert ist.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] M. Auslander and I. Reiten, *Representation Theory of Algebras III, Almost split sequences*, Comm. in Algebra, *3* (3), 1975, 239–294.
—, *Representation Theory of Algebras IV, Invariants given by almost split sequences*, *5* (5), 1977, 443–518.

[2] I. N. Bernstein, I. M. Gelfand, and V. A. Ponomarjow, *Coxeter functors and Gabriel's theorem*, Uspechi Mat. Nauk *28*, 1973, 19–33; translated in Russian Math. Surveys 28, 1973, 17–32.

[3] K. Bongartz, *Moduln mit Unterräumen*, Diplomarbeit, Universität Bonn, 1974, 1–31.

[4] ——, *Zykellose Algebren sind nicht zügellos*, in Bearbeitung.

[5] N. Bourbaki, *Groupes et Algèbres de Lie*, chap. IV, Annexe, Hermann, Paris 1968.

[6] V. Dlab and C. M. Ringel, *Indecomposable representations of graphs and algebras*. Memoirs of the Amer. Math. Soc., *6* (173), 1976, 1–57.

[7] P. Gabriel, *Représentations indécomposables*, Séminaire Bourbaki, 26e année, no 444, 1973/74, 1–27.

[8] —— and Chr. Riedtmann, *Group representations without groups*, Comment. Math. Helvetici 1979, 1–48.

[9] —— and M. ZISMAN, *Calculus of fractions and homotopy theory*, Ergebnisse der Math. Band 35, Springer-Verlag 1967, 1–168.

[10] H. KUPISCH, *Basisalgebren symmetrischer Algebren und eine Vermutung von Gabriel*, to appear in Math. Zeitschrift.

[11] S. MAC LANE, Kategorien, Springer-Verlag 1972, 1–295.

Mathematisches Institut der
Universität Basel
und
Mathematisches Institut der
Universität Zürich

Eingegangen den 19. Juni 1979.