...-Structure en K-théorie algébrique.

Autor(en): **Kratzer, CH.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **55 (1980)**

PDF erstellt am: **16.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-42373

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helvetici **55** (1980) 233–254 Birkhäuser Verlag, Basel

λ-Structure en K-théorie algébrique

CH. KRATZER

Au congrès de Nice (1970), D. Quillen [15] a annoncé l'existence d'une structure naturelle de λ-anneau sur le groupe $K(X; A)$ des classes d'homotopie pointée $[X, BGL(A)^+]$ pour tout anneau commutatif A. La structure de H-espace de $BGL(A)^+$ a été rapidement éclaircie, entre autres par D. Quillen [15] et J. Wagoner [21]. Quelques années plus tard, J.-L. Loday [13] a explicité la structure multiplicative, et ce travail consiste en une présentation de la structure de λ-anneau, ou plus précisément de $K_0(A)$-λ-algèbre, car $K(X; A\}$ est un anneau sans unité.

Au moyen d'un homomorphisme entre l'anneau de représentation $R_A(G)$ du groupe G et $K(BG; A)$, on réduit l'existence d'une structure de "$K_0(A)$-λ-algèbre à homotopie près" sur $BGL(A)^+$, à celle d'une structure naturelle de λ-anneau sur $R_A(G)$. Ce dernier point, dû à R. Swan [20], est aussi présenté dans le cadre de la géométrie algébrique, notamment [3] et [14].

On peut remarquer que la λ-structure obtenue est parente de la construction habituelle en K-théorie topologique. Plus précisément, elle passe au cas d'un anneau topologique et coïncide avec la structure classique de λ-algèbre sur les classes d'homotopie $[X, BU]$.

Par la théorie générale des λ-anneaux [1], on définit des opérations d'Adams ψ^k sur $K(X; A)$, $k \neq 0$ qui sont des homomorphismes de λ-anneaux. On montrera que ces opérations sont aussi multiplicatives par rapport au produit gradué de la K-théorie de A. Puis on déduira comme exemple d'application que les groupes de K-théorie algébrique d'un anneau parfait de caractéristique $p > 0$ sont p-divisibles et sans p-torsion. Enfin, on déterminera à titre d'exemple les opérations d'Adams ψ^k sur la K-théorie des corps finis à partir du calcul de D. Quillen [16] de cette dernière.
Il faut remarquer que parallèlement H. Hiller [8] a étudié la même question et a obtenu des résultats analogues. D'autre part, certains résultats de ce travail ont été annoncés dans [11].

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à tous ceux dont les conseils et la collaboration m'ont permis d'achever ce travail: J. Boéchat, M. Karoubi, M. Kervaire, C. Soulé et spécialement S. Maumary qui a bien voulu me guider tout au long de ce travail.

Sauf mention du contraire, tous les espaces, applications, homotopies, . . . , sont pointés.

1. Rappels de *K*-théorie

Soit A un anneau commutatif avec unité. On désigne par $GL(A) = \varinjlim_n GL_n(A)$ le groupe général linéaire, et par $E(A) = \varinjlim_n E_n(A)$ son sous-groupe distingué, parfait, engendré par les matrices élémentaires; on notera encore BG l'espace classifiant du groupe G, c'est-à-dire l'espace d'Eilenberg–Mac Lane $K(G; 1)$. La construction "+" [15], [13], [7] appliquée à $BGL(A)$ relativement à $E(A)$ définit une application continue $f: BGL(A) \to BGL(A)^+$ induisant un isomorphisme $H_*(f): H_*(BGL(A); f^*\mathscr{L}) \xrightarrow{\sim} H_*(BGL(A)^+; \mathscr{L})$ pour tout système de coefficients locaux $\mathscr{L}$ sur $BGL(A)^+$, et un épimorphisme:

$$\pi_1(f): GL(A) = \pi_1(BGL(A)) \twoheadrightarrow \pi_1(BGL(A)^+) = GL(A)/E(A).$$

Ces propriétés caractérisent $BGL(A)^+$ à homotopie près. On définit les *groupes de K-théorie algébrique* par

$$K_n(A) = \pi_n(BGL(A)^+) \text{ pour } n \geq 1.$$

La somme directe des matrices $\oplus: GL(A) \times GL(A) \to GL(A)$ définie par:

$$(\alpha \oplus \beta)_{ij} = \begin{cases} \alpha_{te} & \text{si} \quad i = 2t-1, \quad j = 2e-1 \\ \beta_{te} & \text{si} \quad i = 2t, \quad j = 2e \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

induit une structure de H-espace associatif et commutatif à homotopie près sur $BGL(A)^+$ [15], [21]. Le produit de Kronecker (ou tensoriel) des matrices:

$$\otimes: GL_p(A) \times GL_q(A) \to GL_{pq}(A); \qquad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \otimes \beta$$

définit des applications

$$\Phi_{pq}: BGL_p(A) \times BGL_q(A) \to BGL(A)^+; (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \otimes \beta - \alpha \otimes 1_q - 1_p \otimes \beta$$

(où le signe "−" s'entend au sens de la structure de H-espace de $BGL(A)^+$). Comme ces applications sont compatibles à homotopie près avec les inclusions

$i_n : BGL_n(A) \to BGL_{n+1}(A)$, elles induisent par passage à la limite une application

$$\tilde{\otimes} : BGL(A)^+ \times BGL(A)^+ \to BGL(A)^+,$$

dont la restriction à tout compact, même à tout "squelette" $BGL_n(A)^+ \times BGL_m(A)^+$ est bien définie à homotopie près (noter que $BGL_n(A)^+$ peut être compris soit comme l'image de $BGL_n(A)$ dans $BGL(A)^+$, soit comme le résultat de la construction"+" appliquée à $BGL_n(A)$ relativement au sous-groupe distingué parfait $E_n(A)$ si $n \geqslant 3$). Nous dirons que deux applications continues $f, g : X \to X'$ sont *faiblement homotopes* si, pour tout compact K de X, les restrictions $f|_K$ et $g|_K$ sont homotopes. On notera $[X, X']$ l'ensemble des *classes d'homotopie faible* d'applications $f : X \to X'$. On vérifie ensuite que l'application $\tilde{\otimes} : BGL(A)^+ \times BGL(A)^+ \to BGL(A)^+$ est distributive (à homotopie faible près) par rapport à la structure de H-espace de $BGL(A)^+$, et par conséquent induit une structure *d'anneau commutatif* (sans unité) sur le groupe

$$K(X; A) = [X; BGL(A)^+].$$

On a enfin une structure de $K_0(A)-$*algèbre* sur $K(X; A)$: on définit une action à homotopie près:

$$K_0(A) \times BGL_n(A) \to BGL(A)^+; \qquad ([P], \alpha) \mapsto \mathrm{id}_p \otimes \alpha.$$

Cette action passe à la limite et définit une action à homotopie faible près

$$K_0(A) \times BGL(A)^+ \to BGL(A)^+$$

c'est-à-dire une structure de $K_0(A)$-*module* sur l'anneau $[BGL(A)^+, BGL(A)^+]$ [13].

2. L'Anneau $R_A(G)$

Soient A un anneau commutatif avec unité et G un groupe quelconque (non nécessairement fini). On désigne par AG *l'algèbre du groupe* G, c'est-à-dire le A-module libre de base G muni de la multiplication induite par celle de G. On considère la sous-catégorie pleine $\underline{\underline{P}}_A(G)$ de la catégorie abélienne des AG-modules formée des AG-modules qui sont *projectifs de type fini en tant que A-modules*. On notera $R_A(G)$ le *groupe de Grothendieck* de $\underline{\underline{P}}_A(G)$, défini comme le quotient du groupe abélien libre L sur les classes d'isomorphisme $\{V\}$ d'objets de $\underline{\underline{P}}_A(G)$ par les relations $\{V\}=\{V'\}+\{V''\}$ associées aux suites exactes $O\to V'\to V\to V''\to O$. On remarque que le produit tensoriel sur $A:(V, V')\mapsto V\otimes_A V'$ muni de l'action diagonale du groupe G préserve les suites exactes de A-modules projectifs et induit par conséquent une *structure d'anneau commutatif avec unité* sur $R_A(G)$.

Si $\rho: G\to G'$ est un homomorphisme de groupes, ρ s'étend en un homomorphisme d'algèbres $\rho: AG\to AG'$, et tout AG'-module V devient un AG-module par $\lambda\cdot v=\rho(\lambda)\cdot v$. On en déduit un homomorphisme d'anneaux

$$\rho^*: R_A(G')\to R_A(G)$$

dit de *restriction*. De même, si $f: A\to A'$ est un homomorphisme d'anneaux, tout AG-module V fournit un $A'G$-module $A'\otimes_A V$. On obtient ainsi un homomorphisme d'anneaux

$$f_*: R_A(G)\to R_{A'}(G)$$

dit d'*extension des scalaires*. Ainsi, $R_A(G)$ devient un foncteur contravariant en G et covariant en A.

On définit encore $IR_A(G)$, l'idéal d'augmentation de $R_A(G)$, comme le noyau de l'homomorphisme de restriction $R_A(G)\to R_A(1)=K_0(A)$ (scindé par l'homomorphisme de restriction $\varepsilon': R_A(1)\to R_A(G)$). $IR_A(G)$ est muni d'une structure de $K_0(A)$-*algèbre* via ε'.

3. L'Homomorphisme $r: IR_A(G)\to K(BG; A)$

Soit V un objet de $\underline{\underline{P}}_A(G)$. On associe à V une application unique à homotopie près $r(V): BG\to BGL(A)^+$ comme suit: l'action du groupe G sur V définit un homomorphisme $G\to \mathrm{Aut}(V)$, donc un homomorphisme unique à conjugaison près:

$$G\to GL(A)$$

et par suite une application continue unique à homotopie (pointée) près

$$r(V): BG\to BGL(A)^+$$

(Le fait que deux homomorphismes conjugués induisent des applications librement homotopes est classique. Quitte à remplacer la matrice α réalisant la conjugaison par $\alpha \oplus \alpha^{-1}$, on peut supposer la matrice élémentaire. Le chemin décrit par le point base au cours de l'homotopie devient homotope à O dans $BGL(A)^+$ et on peut remplacer l'homotopie libre par une homotopie pointée). Définissons $r: R_A(G) \to K(BG; A)$ sur les générateurs par $[V] \mapsto r(V)$. Cette application r est bien définie en vertu du

THEOREME 3.1 [18]. *Les homomorphismes canoniques*

$$GL\begin{pmatrix} AO \\ OA \end{pmatrix} \underset{s}{\overset{p}{\leftrightarrows}} GL\begin{pmatrix} AA \\ OA \end{pmatrix}$$

induisent une équivalence d'homotopie

$$BGL\begin{pmatrix} AO \\ OA \end{pmatrix}^+ \underset{s}{\overset{p}{\leftrightarrows}} BGL\begin{pmatrix} AA \\ OA \end{pmatrix}^+$$

Preuve. D. Quillen [18] a montré que les applications canoniques s et p induisent un isomorphisme

$$H_*\left(GL\begin{pmatrix} AO \\ OA \end{pmatrix}; \mathbf{Z}\right) \underset{s_*}{\overset{p_*}{\leftrightarrows}} H_*\left(GL\begin{pmatrix} AA \\ OA \end{pmatrix}; \mathbf{Z}\right)$$

donc un isomorphisme

$$H_*\left(BGL\begin{pmatrix} AO \\ OA \end{pmatrix}^+\right) \underset{s_*}{\overset{p_*}{\leftrightarrows}} H_*\left(BGL\begin{pmatrix} AA \\ OA \end{pmatrix}^+\right)$$

pour tous coefficients constants puisque la construction "+" respecte l'homologie. D'autre part, tant

$$BGL\begin{pmatrix} AO \\ OA \end{pmatrix}^+ \quad \text{que} \quad BGL\begin{pmatrix} AA \\ OA \end{pmatrix}^+$$

sont des H-espaces pour la somme directe des matrices. Il résulte alors du théorème de Whitehead pour les H-espaces [5] que s et p induisent une équivalence d'homotopie.

COROLLAIRE 3.2. *L'application $r: R_A(G) \to K(BG; A)$ est bien définie et induit par passage au quotient un homomorphisme de $K_0(A)$-algèbres*

$$r: IR_A(G) \to K(BG; A)$$

naturel vis à vis des homomorphismes de restriction et d'extension des scalaires.

Preuve. Il s'agit de vérifier que si $O \to V' \to V \to V'' \to O$ est exacte dans $\underline{\underline{P}}_A(G)$, alors $r(V') \oplus r(V'') = r(V)$ dans $K(BG; A)$. La suite exacte de A-modules $O \to V' \to V \to V'' \to O$ étant scindée,

$$r(V): G \to GL\begin{pmatrix} A & A \\ O & A \end{pmatrix}.$$

La première assertion résulte de la commutativité des deux triangles du diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
 & BGL\begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix}^+ \arrow[dr, "\oplus"] \arrow[dd, shift left, "s"] & \\
BG \arrow[ur, "{(r(V'), r(V''))}"] \arrow[dr, "r(V)"'] & & BGL(A)^+ \\
 & BGL\begin{pmatrix} A & A \\ O & A \end{pmatrix}^+ \arrow[ur, "\mathrm{can}"'] \arrow[uu, shift left, "p"] &
\end{tikzcd}$$

En effet, on a

$$[\oplus \circ (r(V'), r(V''))] = [\oplus \circ (p \circ r(V))] = [(\mathrm{can} \circ s) \circ (p \circ r(V))] = [\mathrm{can} \circ r(V)]$$

Il est clair que r se factorise à travers $IR_A(G)$ et c'est alors un homomorphisme de $K_0(A)$-algèbres car:

$$r((V - \varepsilon(V)) \otimes (W - \varepsilon(W))) = r(V \otimes W) - r(\varepsilon(V) \otimes W) - r(V \otimes \varepsilon(W)) =$$
$$= r(V) \tilde{\otimes} r(W) \quad \text{et} \quad r(P \otimes V) = [P] \otimes r(V).$$

4. Le λ-Anneau $R_A(G)$

DEFINITION 4.1 [1], [2]. *Un pré-λ-anneau (λ-ring) R est un anneau commutatif avec unité, muni d'une suite d'opérations $\{\lambda^n\}_{n \geq 0}$ vérifiant les propriétés* *suivantes*:

(i) $\lambda^0(x) = 1$ et $\lambda^1(x) = x$
(ii) $\lambda^k(x+y) = \sum_{i=0}^{k} \lambda^i(x) \cdot \lambda^{k-i}(y)$.

En introduisant les séries formelles

$$\lambda_t(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i(x) t^i, \quad \text{et} \quad \psi_{-t}(x) = -t \frac{d}{dt}(\log \lambda_t(x)),$$

on définit une suite d'opérations $\psi^k : R \to R$, $k > 0$ (*opérations d'Adams*) par $\psi_{-t}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \psi^i(x) t^i$. On vérifie immédiatement que les opérations ψ^k sont des endomorphismes de groupe et que $\psi^1(x) = x$. D'autre part, on tire de la définition la formule [1]

$$\psi^k - \psi^{k-1} \cdot \lambda^1 + \cdots + (-1)^{k-1} \psi^1 \cdot \lambda^{k-1} + (-1)^k k \lambda^k = 0 \qquad (*)$$

qui peut servir de définition par récurrence des opérations d'Adams. Si x est de *rang* 1, c'est-à-dire $\lambda_t(x) = 1 + xt$, on vérifie par induction sur k à l'aide de la formule (*) que $\psi^k(x) = x^k$.

Un pré-λ-anneau R est un λ-*anneau* (*special* λ-*ring*) si les λ-opérations vérifient les propriétés supplémentaires [1], trivialement vérifiées sur les éléments de rang 1:

(i) $\lambda_t(1) = 1 + t$
(ii) $\lambda^n(xy) = P_n(\lambda^1(x), \ldots, \lambda^n(x); \lambda^1(y), \ldots, \lambda^n(y))$
(iii) $\lambda^m(\lambda^n(x)) = P_{m,n}(\lambda^1(x), \ldots, \lambda^{nm}(x))$

où P_n et $P_{m,n}$ sont des polynômes à coefficients entiers (donc définis par leur valeur sur les sommes d'éléments de rang 1).

Une forme faible (équivalente, si R est sans torsion en tant que groupe abélien) de ces conditions s'exprime aisément en termes d'opérations d'Adams [1], [2]:

(1) $\psi^k : R \to R$ est un endomorphisme d'anneau (et même de λ-anneau)
(2) $\psi^k \circ \psi^e = \psi^e \circ \psi^k = \psi^{ke}$.

Désignons par $\lambda^k : R_A(G) \to R_A(G)$ la k-*ième puissance extérieure* sur A munie de l'action diagonale canonique du groupe G. On vérifie facilement que les opérations λ^k munissent l'anneau $R_A(G)$ d'une structure de pré-λ-anneau naturelle vis à vis des homomorphismes de restriction et d'extension des scalaires. Le point crucial pour la suite est le résultat de R. Swan [20], [3], [14]:

THEOREME 4.2. *Le pré-λ-anneau $R_A(G)$ est un λ-anneau.*

La preuve est un "splitting principle" pour se réduire au case des modules de rang 1.

Soit V un objet de $\underline{\underline{P}}_A(G)$. Le *dual* $V^* = \mathrm{Hom}_A\,(V, A)$ muni de l'action de G définie par $(g \cdot f) = f(g^{-1} \cdot v)$ induit une *involution de λ-anneau* sur $R_A(G)$. On en déduit des *opérations d'Adams d'indice négatif*:

$$\psi^{-k}(x) = \psi^k(x^*) = (\psi^k(x))^*, \qquad k > 0.$$

Ces opérations vérifient aussi les conditions (1) et (2) ci-dessus, ainsi que la condition $\psi^{-k}[P] = [P]^{-k}$, $k > 0$ sur les éléments de rang 1 (pour autant que la notation $[P]^{-1}$ ait un sens. c'est-à-dire $[P]$ inversible), ce qui justifie leur appellation.

5. La $K_0(A)$-λ-Algèbre $K(X; A)$

Si K est un λ-anneau, nous dirons qu'une K-algèbre commutative R (pas nécessairement avec unité) est une *K-λ-algèbre* si R est muni d'une suite d'opérations $\{\lambda^k\}_{k>0}$ telles que $K \times R$, muni des lois de compositions suivantes est un λ-anneau que nous noterons $K + R$:

$$(a, x) + (a', x') = (a + a', x + x').$$

$$(a, x) \cdot (a', x') = (aa', a \cdot x' + a' \cdot x + x \cdot x').$$

$$\lambda^k(a, x) = \Big(\lambda^k(a), \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^i(a) \cdot \lambda^{k-i}(x)\Big).$$

Par exemple, $IR_A(G)$ est une $K_0(A)$-λ-algèbre car $R_A(G) = K_0(A) + IR_A(G)$. Si $G = GL_n(A)$, le λ-anneau $R_A(G)$ possède un élément privilégié $[A^n_{\mathrm{id}}]$ qui est la classe de la représentation $\mathrm{id}: G \to GL_n(A)$. La différence $[A^n_{\mathrm{id}}] - n \cdot 1$ est un élément de $IR_A(G)$ qui sera noté $[A^n_{\mathrm{id}}]\tilde{}$. L'intérêt de travailler avec l'idéal d'augmentation est que les classes $[A^n_{\mathrm{id}}]\tilde{}$ sont compatibles avec les inclusions $i_n : GL_n(A) \to GL_{n+1}(A)$, c'est-à-dire que $i_n^*([A^{n+1}_{\mathrm{id}}]\tilde{}) = [A^n_{\mathrm{id}}]\tilde{}$. Comme i_n^* est un homomorphisme de λ-anneaux, on a aussi: $i_n^*(\lambda^k([A^{n+1}_{\mathrm{id}}]\tilde{})) = \lambda^k([A^n_{\mathrm{id}}]\tilde{})$, et par conséquent $i_n^*(\psi^k[A^{n+1}_{\mathrm{id}}]\tilde{}) = \psi^k([A^n_{\mathrm{id}}]\tilde{})$. Comme $r: IR_A(G) \to K(BG; A)$ est naturel vis à vis des homomorphismes de restriction,

$$r(\lambda^k([A^{n+1}_{\mathrm{id}}]\tilde{}))\,|_{BGL_n(A)} = r(\lambda^k([A^n_{\mathrm{id}}]\tilde{})).$$

En d'autres termes, si pour tout couple d'entiers, $k, n \geq 1$, on choisit une application continue λ_n^k dans la classe d'homotopie $r(\lambda^k([A_{\mathrm{id}}^n]^{\sim}))$, alors les diagrammes suivants

$$\begin{tikzcd} BGL_{n+1}(A) \arrow[r, "\lambda_{n+1}^k"] & BGL(A)^+ \\ BGL_n(A) \arrow[u, "i_n"] \arrow[ur, "\lambda_n^k"'] & \end{tikzcd} \qquad (*)_n$$

sont homotopiquement commutatifs. Puisque $i_n: BGL_n(A) \to BGL_{n+1}(A)$ est une cofibration fermée, il est possible de rendre tous les diagrammes $(*)_n$ strictement commutatifs sans changer la classe d'homotopie de λ_n^k. En passant à la limite sur n, on détermine une application continue $\lambda_\infty^k: BGL(A) \to BGL(A)^+$, et même

$$\lambda^k: BGL(A)^+ \to BGL(A)^+$$

car $\pi_1(\lambda_\infty^k)$ envoie forcément $E(A) = [GL(A), GL(A)]$ sur 0 dans $K_1(A)$ puisque ce dernier est abélien. Comme pour la structure multiplicative, la classe d'homotopie de la restriction de λ^k à $BGL_n(A)^+$ est bien définie, c'est-à-dire que λ^k est bien définie à homotopie faible près.

THEOREME 5.1. *Pour tout anneau commutatif avec unité A et tout espace topologique X, les opérations λ^k sur $BGL(A)^+$ définies ci-dessus, induisent une structure de $K_0(A)$-λ-algèbre sur $K(X; A)$ naturelle en A et en X.*

Preuve. On définit λ^k sur $K(X; A) = [X, BGL(A)^+]$ par $\lambda^k[g] = [\lambda^k \circ g]$. La structure d'algèbre de $K(X; A)$ étant aussi définie par composition, il suffit, de montrer que $K(BGL(A)^+; A) = [BGL(A)^+, BGL(A)^+]$ est une $K_0(A)$-λ-algèbre. Via l'homomorphisme r, on se réduit à faire les vérifications sur les anneaux $R_A(GL_n(A))$ (resp. $R_A(GL_n(A) \times GL_m(A))$) car

$$\varprojlim_n R_A(GL_n(A)) \xrightarrow{r} \varprojlim_n [BGL_n(A), BGL(A)^+] = [BGL(A)^+, BGL(A)^+].$$

Par exemple, pour vérifier la formule $\lambda^k(x+y) = \sum_{i=0}^k \lambda^i(x) \cdot \lambda^{k-i}(y)$ sur $K_0(A) + K(X; A)$, il suffit de montrer que $\lambda^k \circ \oplus = \sum_{i=0}^k \lambda^i \otimes \lambda^{k-i}$ dans $[BGL(A)^+ \times BGL(A)^+, BGL(A)^+]$, ce qui suit directement du fait que cette formule est vraie dans $R_A(GL_n(A) \times GL_m(A))$.

Soit X un espace topologique. Une *comultiplication* sur X est une application continue $c: X \to X \vee X$. Celle-ci admet une *co-unité* à homotopie près si le diagramme ci-dessous est commutatif à homotopie près, où $\Delta : X \to X \times X$ est la diagonale et $i : X \vee X \to X \times X$ l'inclusion canonique du bouquet dans le produit.

$$\begin{tikzcd} & X \times X \\ X \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[dr, "c"'] & \\ & X \vee X \arrow[uu, hook, "i"'] \end{tikzcd}$$

On dit alors que X est un *H'-espace* ou *co-H-espace*. Par exemple, on vérifie facilement que toute suspension est un H'-espace.

LEMME 5.2 *Si X est un H'-espace, alors la structure multiplicative de $K(X; A)$ est triviale, c'est-à-dire tous les produits sont nuls.*

Preuve. Soient $\alpha, \beta : X \to BGL(A)^+$ représentant des éléments a et b de $K(X; A)$. On considère le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} & X \times X \arrow[r, "\alpha\times\beta"] & BGL(A)^+ \times BGL(A)^+ \arrow[dd] \arrow[dr, "\sim"] & \\ X \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[dr, "c"'] & (1) \quad (2) & (3) & BGL(A)^+ \\ & X \vee X \arrow[uu, hook, "i"'] \arrow[r, "0"] & BGL(A)^+ \wedge BGL(A)^+ \arrow[ur, "\sim"'] & \end{tikzcd}$$

Le triangle (1) est commutatif à homotopie près (X est un H'-espace) et les diagrammes (2) et (3) sont strictement commutatifs par définition. Le composé supérieur représente $a \cdot b$ et est donc homotope au composé inférieur qui représente 0.

PROPOSITION 5.3. *Si la structure multiplicative de $K(X; A)$ est triviale, alors*

(i) $\psi^k = (-1)^{k-1} k\lambda^k : K(X; A) \to K(X; A)$.

(ii) $\lambda^k : K(X; A) \to K(X; A)$ *est un endomorphisme de groupe.*

Preuve. Suit directement des formules:

$$\psi^k - \psi^{k-1} \cdot \lambda^1 + \cdots + (-1)^{k-1}\psi^1 \cdot \lambda^{k-1} + (-1)^k k\lambda^k = 0$$

et

$$\lambda^k(x+y) = \lambda^k(x) + \lambda^k(y) + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda^i(x) \cdot \lambda^{k-i}(y).$$

PROPOSITION 5.4. *Si A est un anneau de caractéristique $p>0$, alors*

$$\psi^P = \mathrm{Frob}_* : IR_A(G) \to IR_A(G)$$

où Frob_* *désigne l'extension des scalaires par l'homomorphisme de Frobenius* $x \mapsto x^P$.

Idée de la Preuve [12]. Par naturalité vis à vis des homomorphismes de restriction de ψ^P et Frob_*, il suffit de montrer l'assertion pour $G = GL_n(A)$. Si A est un corps fini, $GL_n(A)$ est un groupe fini et l'égalité résulte de [10]. Le cas général s'obtient en remarquant que $\lambda^k, k \leq p$ (donc ψ^P) et Frob_* sont des représentations polynomiales de degré $\leq p$ (leur forme matricielle est définie par des fonctions polynomiales de degré $\leq p$) et que l'égalité $\psi^P = \mathrm{Frob}_*$ sur le groupe de Grothendieck des représentations polynomiales sur tout corps fini entraîne la proposition.

On dit qu'un anneau A de caractéristique $p>0$ est *parfait* si $\mathrm{Frob}: A \to A; x \mapsto x^P$ est un automorphisme.

COROLLAIRE 5.5. *Si A est parfait de caractéristique $p>0$, et si la structure multiplicative sur $K(X; A)$ est triviale, alors $x \mapsto p \cdot x = x + \cdots + \times$ est un automorphisme de $K(X; A)$. En d'autres termes, $K(X; A)$ est p-divisible et sans p-torsion.*

Preuve. $(-1)^{p-1} p \cdot \lambda^P = \psi^P = \mathrm{Frob}_*$ est un automorphisme de $K(X; A)$, donc $x \mapsto p \cdot x$ aussi.

Exemples (1) *La K-théorie de A.*

Comme toute sphère $S^n, n \geq 1$ est un H'-espace, les groupes de K-théorie algébrique $K_n(A)$ sont munis d'une structure de $K_0(A)$-λ-algèbre dont tous les produits sont nuls. En particulier, si A est parfait de caractéristique $p>0$, l'application $x \mapsto p \cdot x$ est un automorphisme de $K_n(A)$.

(2) *La-théorie à coefficients* [6]

On introduit les *espaces de Moore* $M^n(\mathbf{Z}/m)$ (représenté par le cône d'une application de degré $m : S^{n-1} \to S^{n-1}$) caractérisés (au type d'homotopie près) par le fait que leur homologie entière réduite est concentrée en dimension $n-1$ et $H_{n-1}(M^n(\mathbf{Z}/m)) = \mathbf{Z}/m$, et qu'ils sont simplement connexes si $n \geq 3$. On définit ensuite l'*homotopie à coefficients* d'un espace topologique X par:

$$\pi_n(X; \mathbf{Z}/m) = [M^n(\mathbf{Z}/\mathrm{m}), X] \qquad n \geq 2$$

En appliquant cette définition à $BGL(A)^+$, on obtient les groupes de K-théorie à coefficients $\mathbf{Z}/m$ définis par:

$$K_n(A;\mathbf{Z}/m)=\pi_n(BGL(A)^+;\mathbf{Z}/m) \qquad n\geq 2.$$

Remarquez que ce sont bien des groupes abéliens puisque $BGL(A)^+$ est un espace de lacets infini [21]; ces groupes sont munis d'une structure de $K_0(A)$-λ-algèbre si $n\geq 2$, dont la structure multiplicative est triviale si $n\geq 3$. En particulier, si A est parfait de caractéristique $p>0$, l'application $x\mapsto p\cdot x$ est un automorphisme de $K_n(A;\mathbf{Z}/m)$ si $n\geq 3$.

Structure multiplicative graduée

La structure multiplicative $\tilde{\otimes}: BGL(A)^+\wedge BGL(A)^+\to BGL(A)^+$ induit des produits bilinéaires [13]:

$$K_p(A)\times K_q(A)\xrightarrow{\cup} K_{p+q}(A)$$

via l'homéomorphisme $S^{n+m}\xrightarrow{\sim} S^n\wedge S^m$. De même, on a des produits bilinéaires [6]:

$$K_p(A;\mathbf{Z}/m)\times K_q(A;\mathbf{Z}/m)\xrightarrow{\cup} K_{p+q}(A;\mathbf{Z}/m)$$

au moyen d'une application $M^{p+q}(\mathbf{Z}/m)\to M^p(\mathbf{Z}/m)\wedge M^q(\mathbf{Z}/m)$ si $m\not\equiv 2 \pmod 4$.

COROLLAIRE 5.6. *Les opérations d'Adams ψ^k sont compatibles avec les produits gradués*

$$K_p(A)\times K_q(A)\xrightarrow{\cup} K_{p+q}(A)$$

$$\text{(resp. } K_p(A;\mathbf{Z}/m)\times K_q(A;\mathbf{Z}/m)\xrightarrow{\cup} K_{p+q}(A;\mathbf{Z}/m))$$

Preuve. La question se résume à vérifier la commutativité à homotopie faible près du diagramme

$$\begin{array}{ccc} BGL(A)^+\wedge BGL(A)^+ & \xrightarrow{\tilde{\otimes}} & BGL(A)^+ \\ \downarrow{\scriptstyle \psi^k\wedge\psi^k} & & \downarrow{\scriptstyle \psi^k} \\ BGL(A)^+\wedge BGL(A)^+ & \xrightarrow{\tilde{\otimes}} & BGL(A)^+ \end{array}$$

Via l'homomorphisme r, cela suit du fait que $R_A(GL_n(A)\times GL_m(A))$ est un λ-anneau.

6. γ-Opérations

Si R est une K-λ-algèbre, on introduit des opérations $\{\gamma^k\}_{k>0}$ définies par [1], [2]

$$\gamma_t(x)=1+\sum_{i=1}^{\infty}\gamma^i(x)t^i=\lambda_{t/1-t}(x)=1+\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^i(x)t^i/(1-t)^i$$

On déduit de cette formule d'une part

$$\gamma^n(x)=\lambda^n(x+n-1)$$

et d'autre part

$$\gamma^k(x+y)=\gamma^k(x)+\gamma^k(y)+\sum_{i=1}^{k-1}\gamma^i(x)\cdot\gamma^{k-i}(y)$$

Si K est un λ-anneau *augmenté* (c'est-à-dire muni d'un homomorphisme de λ-anneau $\varepsilon: K\to\mathbf{Z}$), les γ-opérations permettent de définir une filtration de R:

F^nR est le groupe abélien engendré par les monômes

$$\gamma^{i_1}a_1\cdot\;\cdots\;\cdot\gamma^{i_k}a_k\cdot\gamma^{j_1}x_1\cdot\;\cdots\;\cdot\gamma^{j_p}x_p \quad \text{où} \quad a_i\in K, \qquad \varepsilon(a_i)=0, \qquad x_j\in R$$

et

$$i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_p\geqslant n.$$

La filtration $\{F^nR\}_{n\geqslant 0}$ jouit des propriétés suivantes [1], [2]:

(i) $F^nR\cdot F^mR\subset F^{n+m}R$.
(ii) $F^0R=F^1R=R$.
(iii) F^nR est un λ-idéal de R.

Comme F^nR est un λ-idéal, les opérations λ^k, γ^k et ψ^k induisent des opérations sur le gradué associé à la γ-filtration:

$$G^nR=F^nR/F^{n+1}R$$

et on a les propriétés suivantes sur G^nR [1], [2]

(i) $\psi^k(x) = k^n x$
(ii) $\psi^k(x) = (-1)^{k-1} k\lambda^k(x)$
(iii) $\lambda^k(x) = (-1)^{k-1} k^{n-1} x$
(iv) $\gamma^n(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!x$

Les propriétés (i), (ii) et (iii) sont démontrées dans [1]. On peut obtenir (iv) comme corollaire de (iii) à l'aide de la formule combinatoire suivante [4]:

LEMME 6.1. *Soit pour tout couple d'entiers k, $n \geq 0$ l'expression*:

$$F_{k,n} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j j^n \binom{k}{j}.$$

Alors, $F_{k,n} = 0$ *si* $k > n$ *et* $F_{n,n} = (-1)^n n!$

Preuve. On va procéder par induction sur n et k.

$$F_{k,0} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} = (1-1)^k = 0.$$

$$F_{k+1,n+1} = \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j j^{n+1} \binom{k+1}{j} = \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j j^{n+1} \binom{k+1}{j}$$

can $n+1 \geq 1$. Maintenant

$$\sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j j^{n+1} \binom{k+1}{j} = \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j j^{n+1} \frac{k+1}{j} \binom{k}{j-1} =$$

$$= -(k+1) \sum_{j=0}^{k} (-1)^j (j+1)^n \binom{k}{j} = -(k+1) \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \sum_{e=0}^{n} \binom{n}{e} j^e \binom{k}{j}$$

$$= -(k+1) \sum_{e=0}^{n} \binom{n}{e} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j j^e \binom{k}{j} = -(k+1) \sum_{e=0}^{n} \binom{n}{e} F_{k,e}.$$

Si $k+1 > n+1$, alors le lemme pour $F_{k,e}$

$0 \leq e \leq n$ livre $F_{k+1,n+1} = 0$.

Si $k+1 = n+1$, alors $F_{k+1,n+1} = -(n+1)F_{n,n} = (-1)^{n+1}(n+1)!$

De

$$\gamma^n(x) = \lambda^n(x+n-1) = \sum_{j=0}^{n} \lambda^j(x) \binom{n-1}{n-j},$$

et de la propriété (iii), on tire

$$\gamma^n(x) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{j-1} j^{n-1} \binom{n-1}{n-j} x \quad \text{sur} \quad G^n R.$$

La propriété (iv) suit de l'égalité:

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{j-1} j^{n-1} \binom{n-1}{n-j} = -\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j j^n \binom{n}{j}$$

et du Lemme 6.1.

Nous dirons que x est de *γ-filtration finie* s'il existe un entier N_x tel que

$$i_1 + \cdots + i_k > N_x \Rightarrow \gamma^{i_1} x \cdots \gamma^{i_k} x = 0.$$

On vérifie que si R est engendré par un nombre fini d'éléments de γ-filtration finie en tant que Z-λ-algèbre, alors la γ-filtration de K est finie, c'est-à-dire $F^n R = 0$ si n est assez grand.

Nous supposerons désormais que $K_0(A)$ est un λ-anneau augmenté par le rang des modules projectifs (par exemple si A est intègre). On a encore la formule supplémentaire sur $G^n R_A(G)$ qui se démontre par "splitting principle"

$$x^* = (-1)^n x$$

donc aussi

$$\psi^k(x) = k^n x \qquad k < 0.$$

LEMME 6.2. *Si X est compact (plus généralement si toute application $X \to BGL(A)^+$ se factorise à travers un "squelette" $BGL_n(A)^+$), alors tout $x \in K(X; A)$ est de γ-filtration finie.*

Preuve. Soit $x \in K(X; A)$. Par hypothèse x est représenté par $X \to BGL_n(A)^+$ et les opérations $\gamma^m : BGL_n(A)^+ \to BGL(A)^+$ sont induites par $\gamma^m([A^n_{\mathrm{id}}]^{\sim}) = \gamma^m([A^n_{\mathrm{id}}] - n)$. Si $m > n$, $\gamma^m([A^n_{\mathrm{id}}] - n) = 0$ [1], donc $\gamma_t(x)$ est un polynôme inversible dans l'anneau des polynômes $(K_0(A) + K(X; A))[t]$ $(\gamma_t(x) \cdot \gamma_t(-x) = 1)$, donc tous ses coefficients de degré > 0 sont nilpotents et x est de γ-filtration finie.

Remarques. (1) Si A est un anneau d'entiers de corps de nombres, les groupes $K_n(A)$ sont de type fini [17], et par conséquent la γ-filtration de $K_n(A)$

est finie. Mais en général, les groupes de K-théorie algébrique ne sont pas de type fini.

(2) Par induction nilpotente à l'aide du Lemme 6.1 et du Corollaire 5.5, on peut généraliser l'affirmation du Corollaire 5.5 à tout espace X satisfaisant la condition du Lemme 6.2. En particulier, on retrouve un résultat de H. Hiller [8] pour les X compacts.

(3) Comme tout $a \in \tilde{K_0}(A)$ est de la forme $[P]-\varepsilon[P]$, la preuve du Lemme 6.2 montre que a est de γ-filtration finie.

Dans le cas des groupes de K-théorie algébrique (avec ou sans coefficients), nous allons introduire une nouvelle γ-filtration tenant compte de la structure multiplicative graduée. La définition qui suit est issue d'une discussion avec C. Soulé.

DEFINITION 6.3. *$F'^n K_P(A)$ est le groupe abélien engendré par les éléments de la forme*:

$$a \cdot \gamma^{i_1} x_1 \cup \cdots \cup \gamma^{i_k} x_k \quad \text{où} \quad x_i \in K_{s_i}(A) \qquad \text{avec} \quad s_1 + \cdots + s_k = p,$$
$$a \in F^{i_0} K_0(A) \quad \text{et} \quad i_0 + \cdots + i_k \geqslant n.$$

En particulier:

$$F'^n K_p(A) \supset F^n K_p(A).$$

(On écrit formellement la même définition pour la K-théorie à coefficients). On démontre les mêmes propriétés pour le gradué associé à la filtration F' que pour celui associé à la filtration F: De (1) $\psi^k(x \cup y) = \psi^k(x) \cup \psi^k(y)$ on tire

$$(-1)^{k-1} k \lambda^k (x \cup y) = (-1)^{k-1} k \lambda^k(x) \cup (-1)^{k-1} k \lambda^k(y)$$

car $\psi^k(x) = (-1)^{k-1} k \lambda^k(x)$, d'où en raisonnant sur des λ-anneaux libres [2] dont le gradué est sans torsion, on a (2)

$$\lambda^k(x \cup y) = (-1)^{k-1} k \lambda^k(x) \cup \lambda^k(y).$$

A partir de ces formules (1) et (2), des propriétés de la filtration F et de la définition de F', on tire si $x \in F'^n$:

(i) $\psi^k(x) \equiv k^n x \pmod{F'^{n+1}}$
(ii) $\lambda^k(x) \equiv (-1)^{k-1} k^{n-1} x \pmod{F'^{n+1}}$
(iii) $\gamma^n(x) \equiv (-1)^{n-1}(n-1)! x \pmod{F'^{n+1}}$

PROPOSITION 6.4. *Les filtrations F et F' coïncident à torsion près.*

Preuve. Soit $x=\gamma^{i_1}y_1\cup\cdots\cup\gamma^{i_k}y_k\in F'^nK_p(A)$, où $y_j\in K_{s_j}(A)$ avec $s_1+\cdots+s_k=p$ et $i_1+\cdots+i_k=n$. On pose $x_0=x$ et on définit par récurrence sur i:

$$x_{i+1}=\gamma^{n+i}(x_i)-(-1)^{n+i-1}(n+i-1)!x_i\in F'^{n+i+1}K_p(A).$$

Comme les y_j sont de γ-filtration finie (Lemme 6.2), et que les x_i sont des polynômes en les $\gamma^e(y_j)$ de degré $\geqslant n+i$, il s'ensuit que tôt ou tard $x_i=0$ et est donc un élément de F^n. On achève en remarquant que $x_{i+1}\in F^n$ est équivalent à $(-1)^{n+i-1}(n+i-1)!x_i\in F^n$.

Etudions maintenant le premier quotient de la γ-filtration de $K(X;A)$. La composition

$$GL_n(A)\xrightarrow{\det}GL_1(A)\longrightarrow GL(A)$$

détermine à homotopie faible près une application

$$\det: BGL(A)^+\to BGL(A)^+$$

qui se factorise à travers $BGL_1(A)^+\sim BGL_1(A)$

($GL_1(A)$ est un groupe abélien).

LEMME 6.5. *Soient X compact (ou vérifiant la condition du Lemme 6.2) et $x\in K(X;A)$. Alors*

$$x\equiv\det(x)(\mathrm{mod}\ F^2K(X;A)).$$

Preuve. Via l'homomorphisme r, le résultat suit de la formule [14]

$$[A^n_{\mathrm{id}}]^{\sim}-(\lambda^n[A^n_{\mathrm{id}}]-[1])\in F^2R_A(GL_n(A)).$$

Cette dernière résulte de la comparaison: $\gamma^n([A^n_{\mathrm{id}}]^{\sim}+[1])=\lambda^n[A^n_{\mathrm{id}}]$ et

$$\begin{aligned}\gamma^n([A^n_{\mathrm{id}}]^{\sim}+[1])&=\sum_{i=0}^{n}\gamma^i([A^n_{\mathrm{id}}]^{\sim})\gamma^{n-i}[1]\\&=\sum_{i=0}^{n}\gamma^i([A^n_{\mathrm{id}}]^{\sim})\cdot\lambda^{n-i}[n-i]\\&=1+[A^n_{\mathrm{id}}]^{\sim}+\sum_{i=2}^{n}\gamma^i([A^n_{\mathrm{id}}]^{\sim}).\end{aligned}$$

PROPOSITION 6.6 *Soit X compact (ou vérifiant la condition du lemme* 6.2). *Alors*

$$F^2K(X; A) = SK(X; A) = \ker(\det : K(X; A) \to K(X; A)).$$

Preuve. Il suffit de montrer $F^2K(X; A) \subset SK(X; A)$ (Lemme 6.5).

On introduit $\det : R_A(GL_n(A)) \to \mathrm{Pic}_A\,(GL_n(A))$ (sous-groupe multiplicatif de $R_A(GL_n(A))$ engendré par les éléments de rang 1) définie sur les générateurs de rang k par $\det[V] = [\lambda^k V]$. Si $O \to V' \to V \to V'' \to O$ est exacte, la formule

$$\lambda^m[V] = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i[V'] \cdot \lambda^{m-i}[V'']$$

livre que det est bien défini. Il est clair que $\det : BGL(A)^+ \to BGL(A)^+$ est induite par $r[\det([A^n_{\mathrm{id}}]^\sim)) = r(\det[A^n_{\mathrm{id}}])$. Maintenant

$$\gamma^n(x) \in SK(X; A), \qquad n > 1$$

suit, via l'homomorphisme r, du calcul classique [14] qui s'obtient par "splitting principle."

$$\det(\gamma^n([A^n_{\mathrm{id}}]^\sim) = [1] \quad \text{dans} \quad \mathrm{Pic}_A\,(GL_n(A)) \quad \text{si} \quad n > 1.$$

Si $a[P] - \varepsilon[P] \in \tilde{K_0}(A)$, $a \cdot K(X; A) \subset SK(X; A)$ suit de la formule classique [14] qui s'obtient par "splitting principle"

$$\det([P] \cdot [Q]) = (\det[P])^{\varepsilon[Q]} \cdot (\det[Q])^{\varepsilon[P]} \quad \text{dans} \quad \mathrm{Pic}_A\,(GL_n(A)) \tag{*}$$

car alors $\det(([P] - \varepsilon[P]) \cdot [A^n_{\mathrm{id}}]^\sim) = [1]$. De même, (*) livre que

$$\det([A^n_{\mathrm{id}}]^\sim \cdot [A^m_{\mathrm{id}}]^\sim) = [1] \quad \text{dans}\ \mathrm{Pic}_A\,(GL_n(A) \times GL_m(A)),$$

et via l'homomorphisme r, $x \cdot y \in SK(X; A)$ si $x, y \in K(X; A)$.

COROLLAIRE 6.7. *Si X est compact, alors* det *induit un isomorphisme*

$$K(X; A)/F^2K(X; A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_z\,(\pi_1(X), GL_1(A)).$$

Preuve. L'image de $\det : K(X; A) \to K(X; A)$ est représentée par

$[X, BGL_1(A)]$ et comme $BGL_1(A) = K(GL_1(A), 1)$,

$$[X, BGL_1(A)] = \mathrm{Hom}_Z\,(\pi_1(X), GL_1(A))$$

par la théorie des obstructions.

COROLLAIRE 6.8. (i) $F^2K_1(A) = F'^2K_1(A) = SK_1(A)$
(ii) *det induit un isomorphisme* $K_1(A)/F'^2K_1(A) \xrightarrow{\sim} GL_1(A)$
(iii) $F'^1K_n(A) = F'^2K_n(A) = F^2K_n(A) = K_n(A)$ si $n > 1$.

Nous terminerons par une proposition reliant la divisibilité des opérations d'Adams à la longueur de la γ-filtration.

PROPOSITION 6.9. *Soit X compact (ou vérifiant la condition du Lemme 6.2). Si $F_n(X; A) \neq 0$, alors il existe $x \in K(X; A)$, $x \neq 0$ et $m \geq n$ tels que*

$$\psi^k x = k^m x \quad \textit{pour tout} \quad k \neq 0.$$

Preuve. Soit $0 \neq y = \gamma^{i_1}a_1 \cdot \cdots \cdot \gamma^{i_s}a_s \cdot \gamma^{i_{s+1}}x_{s+1} \cdot \cdots \cdot \gamma^{i_r}x_r$ avec

$$a_i \in \tilde{K_0}(A), \qquad x_j \in K(X; A) \quad \text{et} \quad i_1 + \cdots + i_r \geq n.$$

Comme chaque a_i et chaque x_j sont de γ-filtration finie (Lemme 6.2), on choisit

$$x = \gamma^{j_{1,1}}a_1 \cdot \cdots \cdot \gamma^{j_{1,k_1}}\, a_1 \cdot \cdots \cdot \gamma^{j_{r,1}}x_r \cdot \cdots \cdot \gamma^{j_{r,k_r}}\, x_r$$

avec

$$m = j_{1,1} + \cdots + j_{1,k_1} + \cdots + j_{r,1} + \cdots + j_{r,k_r}$$

maximal sous la condition $x \neq 0$. La proposition suit du fait que $\psi^k x - k^m x$ est un polynôme de degré $> m$ en les γ-opérations [1], donc nul.

Remarque. On a évidemment un analogue sur les groupes de K-théorie algébrique en termes de la filtration F'.

7. Un exemple: La K-théorie des corps finis

Soient F un corps fini et G un groupe fini. Choisissons un homomorphisme $\rho : \hat{F}^* \to \mathbf{C}^*$ où $\hat{F}$ est une clôture algébrique de F. Le *relèvement de Brauer*

μ: $R_F(G) \to R_C(G)$ associé à ρ [19] est un homomorphisme de λ-anneaux ($R_C(G)$ est sans torsion en tant que groupe abélien, il suffit donc de vérifier $\psi^k \circ \mu = \mu \circ \psi^k$, ce qui suit d'un rapide calcul de caractères). Si $G = GL_n(F)$, on en déduit une application continue

$$\mu : BGL(F)^+ \to BGL(\mathbf{C})^+$$

unique à homotopie faible près. D'autre part l'espace BU s'identifie au classifiant $BGL(\mathbf{C})^{\text{top}}$ où $GL(\mathbf{C})^{\text{top}}$ est le groupe topologique $\varinjlim_n GL_n(\mathbf{C})^{\text{top}}$, et comme $\pi_1(BU) = 0$, $\mathrm{id}: GL(\mathbf{C}) \to GL(\mathbf{C})^{\text{top}}$ induit $BGL(\mathbf{C})^+ \to \mathrm{BU}$. En résumé, le relèvement de Brauer induit

$$\mu : BGL(F)^+ \to BU$$

La construction effectuée au paragraphe 5 passe au cas d'un anneau topologique et permet de retrouver la structure de $\mathbf{Z}$-λ-algèbre de la K-théorie topologique sur les classes d'homotopie $[X, BU]$ (toutes les opérations λ^k, ψ^k, γ^k s'écrivent à l'aide de polynômes en les coefficients des matrices et sont donc continues par rapport à la topologie de l'anneau). On en déduit que

$$\mu : K(X; F) \to [X, BU]$$

est un homomorphisme de $\mathbf{Z}$-λ-algèbres.

PROPOSITION 7.1. *Soit $\mathbf{F}_q$ le corps fini à q éléments. Alors le relèvement de Brauer induit un isomorphisme de $\mathbf{Z}$-λ-algèbres*

$$\mu : K_{2i}(\mathbf{F}_q; \mathbf{Z}/q^i - 1) \xrightarrow{\sim} \pi_{2i}(BU; \mathbf{Z}/q^i - 1)$$

Preuve. Le calcul des groupes d'homotopie $\pi_{2i}(BU) = \mathbf{Z}$ et $\pi_{2i+1}(BU) = 0$ livre grâce à la suite exacte reliant l'homotopie à l'homotopie à coefficients

$$\pi_{2i}(BU; \mathbf{Z}/q^i - 1) \simeq \mathbf{Z}/q^i - 1$$
$$\pi_{2i+1}(BU; \mathbf{Z}/q^i - 1) \simeq 0$$

Soit $\mathcal{F}\psi^q$ la fibre homotopique de $\psi^q - \mathrm{id}: BU \to BU$. La suite exacte pour l'homotopie à coefficients de la fibration $\mathcal{F}\psi^q \to BU \xrightarrow{\psi^q - \mathrm{id}} BU$ livre:

$$\pi_{2i}(\mathcal{F}\psi^q; \mathbf{Z}/q^i - 1) \xrightarrow{\sim} \pi_{2i}(BU; \mathbf{Z}/q^i - 1)$$

car $\pi_{2i+1}(BU; \mathbf{Z}/q^i - 1) = 0$ et $\psi^q - \mathrm{id}$ agit par $(q^i - 1)$ sur $\pi_{2i}(BU)$ [9]. Enfin, on considère le diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
K_{2i}(\mathbf{F}_q; \mathbf{Z}/q^i - 1) \arrow[rr, "\sim", "j"'] \arrow[dr, "\mu"'] & & \pi_{2i}(\mathscr{F}\psi^q; \mathbf{Z}/q^i - 1) \arrow[dl, "\sim"] \\
& \pi_{2i}(BU; \mathbf{Z}/q^i - 1) &
\end{tikzcd}$$

où j est l'isomorphisme induit par l'équivalence d'homotopie [16]

$$BGL(\mathbf{F}_q^+) \sim \mathscr{F}\psi^q$$

COROLLAIRE 7.2. *$\psi^k = k^i \cdot \mathrm{id}$ sur $K_{2i-1}(\mathbf{F}_q)$.*

Preuve. La suite exacte reliant l'homotopie à l'homotopie à coefficients livre:

$$K_{2i}(\mathbf{F}_q; \mathbf{Z}/q^i - 1) \xrightarrow{\sim} K_{2i-1}(\mathbf{F}_q)$$

car $K_{2i}(\mathbf{F}_q) = 0$ et $K_{2i-1}(\mathbf{F}_q) = \mathbf{Z}/q^i - 1$ [16], donc $(q^i - 1) \cdot \mathrm{id} : K_{2i-1}(\mathbf{F}_q) \to K_{2i-1}(\mathbf{F}_q)$ est l'application nulle. Le corollaire suit alors de la proposition 7.1 et du calcul $\psi^k = k^i \cdot \mathrm{id}$ sur $\pi_{2i}(BU)$ [9].

BIBLIOGRAPHIE

[1] ATIYAH, M. et TALL, D. *Group representations, λ-rings and the J-homomorphism.* Topology *8* (1969) 253–297.

[2] BERTHELOT, P., *Généralités sur les λ-anneaux. Exposé V de SGA* 6. Springer Lecture Notes in Math. *225* (1971), 297–364.

[3] BERTHELOT, P., *Le K˙ d'un fibré projectif: calculs et conséquences.* Exposé VI de SGA 6. Springer Lecture Notes in Math. *225* (1971), 365–415.

[4] BOECHAT, J., Communication privée.

[5] BROWDER, W., *Higher torsion in H-space.* Trans. Amer. Math. Soc. *108* (1963), 353–375.

[6] BROWDER, W., *Algebraic K-theory with coefficients* **Z**/*p*. Springer Lecture Notes in Math. *657* (1978), 40–84.

[7] HAUSMANN, J.-C. et HUSEMOLLER, D. *Acyclic maps.* Ens. Math *25* (1979), 53–75.

[8] HILLER, H., *λ-rings and algebraic K-theory.* Preprint.

[9] HUSEMOLLER, D., *Fibre bundles.* Springer GTM *20* (1975).

[10] KERVAIRE, M., *Opérations d'Adams en théorie de la représentation linéaire des groupes finis.* Ens. Math. *22* (1976), 1–28.

[11] KRATZER, C., *Opérations d'Adams en K-théorie algébrique.* C. R. Acad. Sc. Paris *287* (1978), Série A, 297–298.

[12] KRATZER, C., *Opérations d'Adams et représentations de groupes.* Preprint.

[13] LODAY, J.-L., *K-théorie algébrique et représentation de groupes.* Ann. Sci. Ec. Norm. Sup 4e série *9* (1976), no 3, 309–377.

[14] MANIN, Y., *Lectures on the K-functor in algebraic geometry*. Russ. Math. Surveys *24* (1969), no 5, 1–89.

[15] QUILLEN, D., *Cohomology of groups*. Actes Congr. Intern. Math. (1970) tome 2, 47–51.

[16] QUILLEN, D., *On the cohomology and K-theory of the general linear group over finite field*. Ann. of Math. *96* (1972). 552–586.

[17] QUILLEN, D., *Finite generation of the group K_i of rings of algebraic integers*. Springer Lecture Notes in Math. *341* (1972), 179–198.

[18] QUILLEN, D., *Characteristic classes of representations*. Springer Lecture Notes in Math. *551* (1976), 189–216.

[19] SERRE, J.-P., *Représentations linéaires des groupes finis*. Hermann (1971).

[20] SWAN, R., *A splitting principle in algebraic K-theory*. Proc. Symp. in Pure Math. *21* (1971), 155–159.

[21] WAGONER, J., *Delooping classifying spaces in algebraic K-theory*. Topology *11* (1972), 349–370.

Université de Lausanne
Institut de Mathématiques
CH-1015 *Lausanne-Dorigny*

Reçn le 2 juillet/23 octobre 1979