Ueber die Dimension der Eigenräume des Laplace-Operators auf Riemannschen Flächen.

Autor(en): **Huber, Heinz**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **55 (1980)**

PDF erstellt am: **17.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-42384

Comment. Math. Helvetici 55 (1980) 390–397 Birkhäuser Verlag, Basel

Ueber die Dimension der Eigenräume des Laplace-Operators auf Riemannschen Flächen

HEINZ HUBER (Basel)

Ernst Specker zum 60. Geburtstag gewidmet

1

Eine kompakte Riemannsche Fläche $\mathcal{F}$ vom Geschlecht $g \geqslant 2$ besitzt genau eine mit der konformen Struktur verträgliche Metrik konstanter Krümmung -1: die Poincarémetrik. Es sei Δ der zugehörige Laplace-Beltrami-Operator und

$$\mathscr{E}_\lambda = \{f \in C^2(\mathcal{F}) \mid -\Delta f = \lambda f\}, \qquad \lambda \geqslant o,$$

wobei nur *reellwertige* Eigenfunktionen zugelassen werden. Es ist bekannt ([1]–3]), dass

$$\sum_{\lambda \leq t} \dim \mathscr{E}_\lambda = (g-1)t + O(t^{1/2}), \qquad t \to +\infty.$$

Daraus ist zu entnehmen, dass jedenfalls $\dim \mathscr{E}_\lambda = O(\lambda^{1/2})$. Diese bloss infinitäre Aussage kann folgendermassen[1] präzisiert werden:

Es sei

$$\delta = \min_{p \in \mathcal{F}} d(p), \qquad d(p) = \operatorname*{Max}_{q \in \mathcal{F}} \operatorname{dist}(p, q).$$

Dann gilt für $\lambda \geqslant 0$:

$$\dim \mathscr{E}_\lambda < e^\delta (\lambda + \tfrac{1}{2})^{1/2} \left(1 + \frac{e(3\delta + 1)}{(2\lambda + 1)^{1/4}}\right) + 1.$$

(Zwischen δ und dem Durchmesser δ^* von $\mathcal{F}$ besteht offenbar die Relation $\delta^*/2 \leqslant \delta \leqslant \delta^*$).

2. Beweis

0. Wir versehen den Einheitskreis $E = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ mit der hyperbolischen Metrik

$$ds^2 = 4 \frac{|dz|^2}{(1 - |z|^2)^2}, \tag{1}$$

[1] Siehe auch [4], [5].

welche die Krümmung -1 besitzt. Es sei $\rho(0, z)$ die hyperbolische Distanz der Punkte $0, z$, und

$$K_r = \{z \in E \mid \rho(0, z) \leq r\}.$$

Führen wir geodätische Polarkoordinaten

$$\rho = \rho(0, z), \qquad \vartheta = \arg z$$

ein, so wird $ds^2 = d\rho^2 + \sinh^2 \rho \, d\vartheta^2$. Daher erhält man für das Flächenelement und die Beltrami-Operatoren der Metrik (1):

$$d\omega = \sinh \rho \, d\rho \, d\vartheta \tag{2}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \operatorname{ctgh} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \sinh^{-2} \rho \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \tag{3}$$

$$\nabla = |\text{grad}|^2 = \left(\frac{\partial}{\partial \rho}\right)^2 + \sinh^{-2} \rho \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta}\right)^2 \tag{4}$$

1. Wir wählen auf $\mathscr{F}$ einen Punkt p mit $d(p) = \delta$. Weil das Geschlecht von $\mathscr{F}$ grösser als eins ist, gibt es eine konforme Ueberlagerungsabbildung $\pi : E \to \mathscr{F}$ mit $\pi(0) = p$. Verpflanzen wir die Metrik (1) mit dieser Abbildung, so erhalten wir gerade die in der Einleitung charakterisierte Poincarémetrik von $\mathscr{F}$. Es sei Γ die zu π gehörige Gruppe der Deckisometrien von E. Dann ist

$$D = \{z \in E \mid \rho(0, z) \leq \rho(T(0), z) \; \forall T \in \Gamma\}$$

ein Fundamentalbereich von Γ, und es gilt für alle $z \in D$:

$$\text{dist}\,(p, \pi(z)) = \rho(0, z).$$

Daher wird $\text{Max}_{z \in D}\, \rho(0, z) = d(p) = \delta$:

$$D \subset K_\delta. \tag{5}$$

2. Wir definieren für $f \in \mathscr{E}_\lambda$

$$\hat{f}(\rho, \vartheta) = (f \circ \pi)(z) \tag{6}$$

und beweisen folgendes

LEMMA. *Zu jeder ganzen Zahl k gibt es ein lineares Funktional $c_k : \mathscr{E}_\lambda \to \mathbf{C}$ derart, dass*

$$\int_0^{2\pi} \hat{f}(\rho, \vartheta) e^{ik\vartheta} \, d\vartheta = c_k(f) F_k(\rho).$$

Dabei ist $y = F_k(\rho)$ die einzige Lösung der Gleichung

$$y'' + (\operatorname{ctgh} \rho) y' + (\lambda - k^2 \sinh^{-2} \rho) \, y = 0 \tag{7}$$

in $(0,\infty)$ *mit* $\lim_{\rho\to 0}\rho^{-|k|}y(\rho)=1$. *Da* $F_k=F_{-k}$ *reellwertig ist, gilt*

$$\overline{c_k(f)}=c_{-k}(f)\quad \forall f\in\mathscr{E}_\lambda\,. \tag{8}$$

Beweis. Wegen (6) und (3) gilt für jedes $f\in\mathscr{E}_\lambda$:

$$\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\hat{f}+\operatorname{ctgh}\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\hat{f}+\sinh^{-2}\rho\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\hat{f}+\lambda\hat{f}=0\,.$$

Daraus ergibt sich sofort, dass

$$G(\rho):=\int_0^{2\pi}\hat{f}(\rho,\vartheta)e^{ik\vartheta}\,d\vartheta,\qquad \rho>0,$$

eine Lösung der Gleichung (7) ist. Diese Gleichung hat an der Stelle $\rho=0$ eine reguläre Singularität mit den Exponenten k und $-k$. Daher besitzt sie genau eine Lösung

$$F_k(\rho)=\rho^{|k|}h_k(\rho),\qquad h_k\in C^2[0,\infty),\qquad h_k(0)=1\,. \tag{9}$$

(F_k ist somit reellwertig und es gilt $F_{-k}=F_k$). Die Wronski-Determinante

$$W=F_kG'-F_k'G \tag{10}$$

ist Lösung der Gleichung $W'+(\operatorname{ctgh}\rho)W=0$. Daher wird

$$W(\rho)=\alpha/\sinh\rho \tag{11}$$

mit einer passenden Konstanten α. Aus (9)–(11) ergibt sich:

$$\rho^{|k|+1}G'(\rho)=|k|\,\rho^{|k|}G+\rho^{|k|+1}Gh_k'/h_k+\alpha\rho/h_k\sinh\rho.$$

Da G beschränkt ist, folgt hieraus

$$\lim_{\rho\to 0}\rho^{|k|+1}G'(\rho)=\alpha.$$

Daraus schliessen wir, dass $\alpha=0$ sein muss, da sonst G nicht beschränkt sein könnte. Somit verschwindet die Wronski-Determinante im ganzen Intervall $(0,\infty)$: G und F_k sind linear abhängig. Damit ist aber das Lemma bewiesen.

3. Da die rechte Seite der zu beweisenden Ungleichung grösser als eins ist, dürfen wir gleich annehmen, dass

$$\dim\mathscr{E}_\lambda=2n \text{ oder } 2n+1,\qquad n\geqslant 1. \tag{12}$$

Wir zeigen nun: Es gibt eine Eigenfunktion $f\in\mathscr{E}_\lambda$ derart, dass

$$\int_D\hat{f}^2\,d\omega=1, \tag{13}$$

$$\int_0^{2\pi}\hat{f}(\rho,\vartheta)e^{ik\vartheta}\,d\vartheta=0\qquad\forall\rho>0,\qquad |k|\leqslant n-1. \tag{14}$$

In der Tat: Es gibt Eigenfunktionen $f_1, \ldots, f_{2n} \in \mathscr{E}_\lambda$ mit

$$\int_D \hat{f}_j \hat{f}_l \, d\omega = \delta_{jl} \qquad 1 \leq j, l \leq 2n.$$

Machen wir für die gesuchte Funktion den Ansatz

$$f = \sum_{j=1}^{2n} \alpha_j f_j, \qquad \alpha_j \in \mathbf{R}, \tag{15}$$

so folgt aus dem Lemma:

$$\int_0^{2\pi} \hat{f}(\rho, \vartheta) e^{ik\vartheta} \, d\vartheta = \left(\sum_{j=1}^{2n} c_k(f_j) \alpha_j \right) F_k(\rho).$$

Das homogene System

$$\sum_{j=1}^{2n} c_k(f_j) \alpha_j = 0, \qquad |k| \leq n-1$$

besteht aus $2n-1$ linearen Gleichungen für die $2n$ Unbekannten α_j. Daher besitzt es eine nicht triviale Lösung $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n} \in \mathbf{C}$, und somit wegen (8) sogar eine reelle Lösung mit $\sum \alpha_j^2 = 1$. Die zugehörige Funktion (15) hat nun die gewünschten Eigenschaften.

4. Für diese Funktion f definieren wir jetzt

$$A(r) = \int_{K_r} \hat{f}^2 \, d\omega, \qquad B(r) = \int_{K_r} \nabla \hat{f} \, d\omega. \tag{16}$$

Dann ist nach (2)

$$A(r) = \int_0^r a(\rho) \sinh \rho \, d\rho, \qquad B(r) = \int_0^r b(\rho) \sinh \rho \, d\rho \tag{17}$$

mit

$$a(\rho) = \int_0^{2\pi} \hat{f}^2(\rho, \vartheta) \, d\vartheta, \qquad b(\rho) = \int_0^{2\pi} (\nabla \hat{f})(\rho, \vartheta) \, d\vartheta, \tag{18}$$

und wegen (4) gilt:

$$b(\rho) \geq \sinh^{-2} \rho \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \hat{f}}{\partial \vartheta} \right)^2 d\vartheta. \tag{19}$$

Aus (14) folgt nun aber, dass

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \hat{f}}{\partial \vartheta} \right)^2 d\vartheta \geq n^2 \int_0^{2\pi} \hat{f}^2 \, d\vartheta.$$

Daher folgt aus (19):

$$b(\rho) \geq n^2 (\sinh \rho)^{-2} a(\rho) \geq n^2 (\sinh r)^{-2} a(\rho) \quad \text{für} \quad 0 < \rho \leq r,$$

und somit

$$B(r) \geqslant n^2(\sin r)^{-2} A(r). \tag{20}$$

Aus

$$\Delta(\hat{f}^2) = 2\hat{f}\Delta\hat{f} + 2\nabla\hat{f}, \qquad \Delta\hat{f} = -\lambda\hat{f}$$

und (3) folgt

$$\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\hat{f}^2 + \operatorname{ctgh}\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\hat{f}^2 + \sinh^{-2}\rho\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\hat{f}^2 + 2\lambda\hat{f}^2 = 2\nabla\hat{f}.$$

Daraus und aus (18) ergibt sich:

$$a''(\rho) + (\operatorname{ctgh}\rho)a'(\rho) + 2\lambda a(\rho) = 2b(\rho),$$

oder, nach Multiplikation dieser Gleichung mit $\sinh\rho$:

$$(a'(\rho)\sinh\rho)' + 2\lambda a(\rho)\sinh\rho = 2b(\rho)\sinh\rho.$$

Hieraus folgt durch Integration:

$$a'(r)\sinh r + 2\lambda A(r) = 2B(r). \tag{21}$$

Nach (17) ist aber

$$A''(r) = a'(r)\sinh r + a(r)\cosh r. \tag{22}$$

Aus (20)–(22) ergibt sich:

$$A''(r) + 2\lambda A(r) \geqslant 2n^2(\sinh r)^{-2} A(r). \tag{23}$$

5. Es sei jetzt

$$R = \delta + y, \tag{24}$$

wobei $y > 0$ später geeignet gewählt werden wird. Dann folgt aus (23):

$$A''(r) - \mu A(r) \geqslant 0 \text{ in } [\delta, R] \tag{25}$$

mit

$$\mu = 2(n^2\sinh^{-2} R - \lambda). \tag{26}$$

Wir nehmen zunächst an, dass $\mu > 0$ und setzen

$$A(r) = F(r)\cosh\sqrt{\mu}(r-\delta). \tag{27}$$

Dann ist

$$F(\delta) = A(\delta), \qquad F'(\delta) = A'(\delta) = a(\delta)\sinh\delta \geqslant 0, \tag{28}$$

und aus (25) ergibt sich:

$$F''(r)\cosh\sqrt{\mu}(r-\delta) + 2\sqrt{\mu}F'(r)\sinh\sqrt{\mu}(r-\delta) \geqslant 0 \text{ in } [\delta, R]. \tag{29}$$

Setzen wir weiter

$$F'(r) = h(r) \cosh^{-2} \sqrt{\mu}(r-\delta), \tag{30}$$

so wird $h(\delta) = F'(\delta) \geq 0$, und aus (29) ergibt sich, dass $h' \geq 0$ in $[\delta, R]$. Folglich ist $h \geq 0$ in $[\delta, R]$. Daraus folgt nach (30), (28) und (27):

$$A(R) \geq A(\delta) \cosh \sqrt{\mu}(R-\delta) = A(\delta) \cosh \sqrt{\mu} y.$$

Nach (5), (13) und (16) ist aber $A(\delta) \geq 1$ und somit

$$A(R) \geq \cosh \sqrt{\mu} y. \tag{31}$$

6. Nun schätzen wir $A(R)$ nach oben ab: Sei

$$\Gamma' = \{T \in \Gamma \mid T(D) \cap K_R \neq \emptyset\}, \qquad m = \operatorname{card} \Gamma'.$$

Dann gilt

$$A(R) \leq m, \tag{32}$$

da die Fundamentalbereiche $T(D)$, $T \in \Gamma'$, die Kreisscheibe K_R überdecken. Weil diese Bereiche paarweise nicht überlappen und wegen (5) in $K_{R+2\delta}$ enthalten sind, so gilt:

$$m \int_D d\omega \leq \int_{K_{R+2\delta}} d\omega = 2\pi(\cosh(R+2\delta) - 1).$$

Daraus folgt wegen

$$\int_D d\omega = 4\pi(g-1), \qquad g \geq 2:$$

$$m < \cosh(R+2\delta) = \cosh(y+3\delta). \tag{33}$$

Aus (31)–(33) schliessen wir nun, dass $\sqrt{\mu} y < y + 3\delta$. Daraus und aus (26) ergibt sich:

$$n^2 \sinh^{-2} R < \lambda + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3\delta}{y}\right)^2, \qquad R = \delta + y. \tag{34}$$

Dabei hatten wir angenommen, dass $\mu > 0$. Wenn aber $\mu \leq 0$, so ist nach (26) sogar $n^2 \sinh^{-2} R \leq \lambda$. Somit gilt die Ungleichung (34) ausnahmslos für jedes $y > 0$.

7. Für $\lambda \geq 0$, $y > 0$ gilt:

$$\lambda + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3\delta}{y}\right)^2 \leq \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{a}{y}\right)^2 \tag{35}$$

mit

$$a=\frac{3\delta}{(2\lambda+1)^{1/2}}\leqslant 3\delta. \tag{36}$$

Aus (34) und (35) folgt nun:

$$2n<e^{\delta}(\lambda+\tfrac{1}{2})^{1/2}e^{y}\left(1+\frac{a}{y}\right), \qquad y>0. \tag{37}$$

Jetzt wird $y>0$ so gewählt, dass die rechte Seite minimal wird. Dieses y ist Lösung der Gleichung

$$1+\frac{a}{y}-\frac{a}{y^2}=0.$$

Hieraus folgt

$$\frac{a}{y}=y+a \tag{38}$$

$$y=\tfrac{1}{2}((a^2+4a)^{1/2}-a) \tag{39}$$

Aus (39) folgt zunächst $y<1$ und somit

$$e^{y}=1+y\left(1+\frac{y}{2!}+\cdots\right)<1+y\left(1+\frac{1}{2!}+\cdots\right)=1+(e-1)y$$

Daher wird wegen (38)

$$e^{y}\left(1+\frac{a}{y}\right)<1+\frac{a}{y}+(e-1)(y+a)=1+e(y+a). \tag{40}$$

Aus (39) und (36) ergibt sich:

$$y+a=\tfrac{1}{2}a^{1/2}((a+4)^{1/2}+a^{1/2})\leqslant\tfrac{1}{2}a^{1/2}((3\delta+4)^{1/2}+(3\delta)^{1/2})<\frac{3\delta+1}{(2\lambda+1)^{1/4}}. \tag{41}$$

Aus (37), (40) und (41) folgt endlich:

$$2n<e^{\delta}(\lambda+\tfrac{1}{2})^{1/2}\left(1+\frac{e(3\delta+1)}{(2\lambda+1)^{1/4}}\right).$$

Damit ist aber wegen (12) unser Satz bewiesen.

LITERATUR

[1] Avakumović, V. G., *über die Eigenfunktionen auf geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeiten*, Math. Zeitschr. *65* (1956) 327–344.

[2] HÖRMANDER, L., *The spectral function of an elliptic operator*, Acta Math *121* (1968), 193–218.
[3] HEJHAL, D. A., *The Selberg Trace Formula for* PSL(2, **R**), vol. 1, Lecture Notes 548 (Springer 1976).
[4] CHENG, S. Y., *Eigenfunctions and nodal sets*, Comment. Math. Helv. *51* (1976), 43–55.
[5] BESSON, G., *Sur la multiplicité de la première valeur propre des surfaces riemanniennes*, Thèse présentée à l'université Paris VII (1979).

Eingegangen den 22. November 1979