Comment. Math. Helvetici **55** (1980) 528–546 Birkhäuser Verlag, Basel

Zerlegung von Distributionen, die unter einer unipotenten Gruppenoperation invariant sind

RAINER FELIX

Einleitung

Im Jahre 1959 hat Dixmier [3] bewiesen, daß die Charaktere irreduzibler Darstellungen einer nilpotenten einfach zusammenhängenden Liegruppe G zentrale temperierte Distributionen sind, die wir mit einigem Recht als die "elementarsten" zentralen temperierten Distributionen auf G verstehen dürfen. Von Rothschild und Wolf [12] wurde im Jahre 1976 die Frage gestellt, inwieweit alle zentralen temperierten Distributionen auf G durch diese elementarsten Distributionen "beschrieben" werden können – eine typische Frage der harmonischen Analyse. Im Hinblick auf die Kirillov-Theorie überträgt sich diese Frage vermöge der Fouriertransformation auf das Problem, inwieweit alle unter der koadjungierten Darstellung invarianten temperierten Distributionen auf dem Dualraum $\mathfrak{g}^*$ der Liealgebra $\mathfrak{g}$ von G durch die invarianten Maße auf den koadjungierten Bahnen ausgedrückt werden können. Rothschild und Wolf haben diese Frage für den Fall der Heisenberg-Gruppe positiv entschieden, indem sie unter Ausnutzung der speziellen geometrischen Lage der koadjungierten Bahnen eine Zerlegung invarianter temperierter Distributionen auf $\mathfrak{g}^*$ über den invarianten Maßen auf den Bahnen explizit angegeben haben ([12], Formel 3.20). Im Fall der koadjungierten Darstellung einer beliebigen nilpotenten einfach zusammenhängenden Liegruppe oder – allgemeiner – im Fall einer beliebigen unipotenten Darstellung einer lokalkompakten zusammenhängenden Gruppe in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum, wo wir eine solche explizite Zerlegung kaum werden erhalten können, soll eine temperierte Distribution *zerlegbar* heißen, wenn sie durch Linearkombinationen invarianter Maße auf den Bahnen approximiert werden kann. Hier hat Dixmier die Frage von Rothschild und Wolf negativ entschieden, indem er ein Beispiel einer unipotenten Darstellung und auch ein Beispiel des Spezialfalls der koadjungierten Darstellung einer einfach zusammenhängenden nilpotenten Liegruppe angegeben hat, bei dem nicht jede invariante temperierte Distribution zerlegbar ist ([4]).

In der vorliegenden Arbeit behandeln wir die Frage, welche invarianten temperierten Distributionen bei einer beliebig vorgegebenen unipotenten Darstellung U einer lokalkompakten zussammenhängenden Gruppe G in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum V zerlegbar sind. Wir konstruieren in §1 ein U-invariantes Polynom Q auf V, so daß alle Bahnen von U in V, auf denen Q nicht verschwindet, Pukanszkys simultaner Parametrisierung ([10], S. 55) unterliegen; überdies wird Pukanszkys rationale Funktion, die diese Parametrisierung leistet, durch Multiplikation mit einer genügend hohen Potenz von Q zu einer Polynomfunktion. (Ein Polynom Q mit solchen "regularisierenden" Eigenschaften wurde bereits von Pukanszky in [11] für den Spezialfall der koadjungierten Darstellung einer nilpotenten einfach zusammenhängenden Liegruppe angegeben.) In §2 zeigen wir dann, daß jede U-invariante temperierte Distribution T durch Multiplikation mit einer hindreichend hohen, von der Ordnung von T abhängigen Potenz von Q zu einer zerlegbaren Distribution wird; wir können sogar eine explizite Zerlegungsformel ähnlich der von Rotschild und Wolf ([12], Formel 3.20) angeben. Daß die Potenz von Q nicht nur aus beweistechnischen Gründen sondern notwendigerweise von der Ordnung von T abhängen muß, zeigt Dixmiers Gegenbeispiel ([4], 1). Schließlich geben wir noch eine Interpretation unseres Ergebnisses für den Spezialfall der koadjungierten Darstellung einer nilpotenten einfach zusammenhängenden Liegruppe.

In einer späteren Arbeit werden wir unter Anwendung unseres hiesigen Ergebnisses neben der Heisenberg-Gruppe weitere nilpotente einfach zusammenhängende Liegruppen angeben, für die die Frage von Rotschild und Wolf eine positive Antwort hat.

§1. Unipotente Darstellungen

1.1. Sei G eine lokalkompakte zusammenhängende Gruppe, V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und U eine stetige unipotente Darstellung von G in V. Dann existiert eine Basis $\{e_1, \ldots, e_N\}$ in V, so daß allen Darstellungsoperatoren hinsichtlich dieser Basis eine untere Dreiecksmatrix entspricht, deren sämtliche Diagonalelemente gleich 1 sind ([1], chap. III, §9, prop. 18, ii); d.h. es ist

$$U(a)e_j \equiv e_j (\mathrm{mod}\ e_{j+1}, \ldots, e_N)$$

für alle $a \in G$, $j = 1, \ldots, N$. Eine solche Basis heißt Jordan-Hölder-Basis für U.

Die Faktorgruppe $G/\mathrm{Kern}\,(U)$ ist eine Liegruppe ([7], S. 88). Somit ist $U(G) \cong G/\mathrm{Kern}\ U$ eine analytische Untergruppe von $GL(V)$, also auch eine analytische Untergruppe der nilpotenten einfach zusammenhängenden Liegruppe, bestehend aus denjenigen Transformationen, denen hinsichtlich der Basis $\{e_1, \ldots, e_N\}$ untere Dreiecksmatrizen mit Einsen in der Diagonale entsprechen. Folglich ist $U(G)$ eine einfach zusammenhängende nilpotente abgeschlossene Lieuntergruppe von $GL(V)$ ([7], S. 137).

1.2. Bekanntlich kann man die Bahnen von U in V durch Polynomfunktionen beschreiben ([10], S. 50). Und zwar existieren zu einer Bahn B Indizes $1 < j_1 < \cdots < j_d \leq N$ und eine Polynomfunktion P^B, definiert auf W^B, dem von den Basisvektoren $e_{j_1}, \ldots, e_{j_d}$ erzeugten Unterraum von V, mit Werten in V, so daß gilt:

(i) $B = P^B(W^B)$.

(ii) $\pi^B(P^B(z)) = z$ für alle $z \in W^B$, wobei π^B die Projektion von V auf W^B bezeichne.

(iii) Die j-te Komponente von $P^B(z)$ bezüglich der Basis $\{e_1, \ldots, e_N\}$ von V hängt nur ab von den ersten k Komponenten von z bezüglich der Basis $\{e_{j_1}, \ldots, e_{j_d}\}$ von W^B, wobei k maximal ist für $j_k \leq j$ $(j = 1, \ldots, N)$.

Nach Vorgabe der Jordan-Hölder-Basis $\{e_1, \ldots, e_N\}$ sind die Indizes $j_1, \ldots, j_d$ und die Polynomfunktion P^B eindeutig bestimmt durch (i), (ii), (iii). Wir nennen W^B den *Parameterraum* und P^B die *parametrisierende Polynomfunktion* von B. Wegen (i) und (ii) ist $B = \{x \in V \mid P^B(\pi^B(x)) = x\}$, also Zariski-abgeschlossen in V. Da P^B einen Homöomorphismus von W^B nach B definiert, induziert das Lebesguemaß auf W^B, normiert gemäß der Basis $\{e_{j_1}, \ldots, e_{j_d}\}$ von W^B, ein Maß λ^B auf B, das invariant ist unter $U(G)$ ([10], S. 54). Mit (ii) folgert man leicht, daß λ^B, als Maß auf ganz V betrachtet, temperiert ist. λ^B heißt *Projektionsmaß* auf B.

1.3. Die in 1.2 gegebene Parametrisierung einer einzigen Bahn von U in V kann auch simultan für "fast alle" Bahnen durchgeführt werden ([10], S. 55), und zwar im folgenden Sinne: Es gibt eine U-invariante Zariski-offene Teilmenge $\mathfrak{X}$ von V, so daß alle in $\mathfrak{X}$ enthaltenen Bahnen denselben Parameterraum haben und daß die Abhängigkeit der parametrisierenden Polynomfunktion von der jeweiligen Bahn in $\mathfrak{X}$ durch eine U-invariante rationale Funktion auf V beschrieben wird.

In [2] wird eine solche Zariski-offene Menge $\mathfrak{X}$ als Komplement der Nullstellenmenge eines durch U bestimmten Polynoms auf V definiert; sodann wird die Invarianz von $\mathfrak{X}$, nicht aber die Invarianz dieses Polynoms selbst bewiesen ([2], Lemma 3.1). Pukanszky dagegen beweist die Invarianz eines solchen die Menge $\mathfrak{X}$ bestimmenden Polynoms, allerdings nur für den Spezialfall der koadjungierten Darstellung einer einfach zusammenhängenden nilpotenten Liegruppe ([11], Remark 2, S. 275). Dieses Polynom hängt eng zusammen mit den parametrisierenden Polynomfunktionen der Bahnen in $\mathfrak{X}$ ([11], Lemma 4, S. 276). Wir wollen nun ein entsprechendes Ergebnis für unsere allgemeinere Situation beweisen.

1.4. Sei $\mathfrak{n}$ die Liealgebra von $U(G)$, verstanden als Liealgebra von V-Endomorphismen. Es ist klar, daß den Elementen aus $\mathfrak{n}$ hinsichtlich der Basis $\{e_1, \ldots, e_N\}$ von V untere Dreiecksmatrizen entsprechen, deren sämtliche Diagonalelemente gleich 0 sind (siehe 1.1). Da $\mathfrak{n}$ nilpotent ist, existiert eine Folge von Idealen $\mathfrak{n}=\mathfrak{n}_0 \supseteq \mathfrak{n}_1 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{n}_m = \{0\}$ mit $\dim \mathfrak{n}_i = m-i$ und $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}_i] \subseteq \mathfrak{n}_{i+1}$, $i = 0, \ldots, m-1$.

Sei $d := \max_{x \in V} \dim \mathfrak{n}x$. Wir können $d > 0$ annehmen; denn für $d = 0$ liegt der triviale Fall vor, daß U die Einsdarstellung ist. Sei $i_k := \min\{i \mid \max_{x \in V} \dim \mathfrak{n}_i x = d-k\}$, $k = 1, \ldots, d$. Dann ist $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_d = m$ und $\max_{x \in V} \dim \mathfrak{n}_{i_k - 1} x = d-k+1$, $k = 1, \ldots, d$. Also ist für $k = 1, \ldots, d$ die Menge $\{x \in V \mid \dim \mathfrak{n}_{i_k-1} x = d-k+1\}$ Zariski-offen in V, wie man mit einem Determinantenargument einsehen kann, und nichtleer; dann ist aber auch die Menge $Z' := \bigcap_{k=1}^d \{x \in V \mid \dim \mathfrak{n}_{i_k-1} x = d-k+1\}$ Zariski-offen und nichtleer.

Für $x \in V$ sei $p_j(x)$ die j-te Komponente von x bezüglich der Basis $\{e_1, \ldots, e_N\}$ und $\bar{p}_j := p_1 e_1 + \cdots + p_j e_j$ die Projektion auf den von den Vektoren $e_1, \ldots, e_j$ erzeugten Unterraum, $j = 1, \ldots, N$. Sei $j_k := \min\{j \mid \max_{x \in V} \dim \bar{p}_j(\mathfrak{n}x) = k\}$, $k = 1, \ldots, d$. Dann ist $1 < j_1 < \cdots < j_d \leq N$ und $\max_{x \in V} \dim \bar{p}_{j_k}(\mathfrak{n}x) = k$, $k = 1, \ldots, d$. Es folgt wiederum, daß die Menge $Z := \bigcap_{k=1}^d \{x \in V \mid \dim \bar{p}_{j_k}(\mathfrak{n}x) = k\}$ Zariski-offen und nichtleer ist.

Wir fixieren nun ein Element $\bar{x} \in Z \cap Z'$. Dann ergibt sich aus $\mathfrak{n}_{i_1-1}\bar{x} = \mathfrak{n}\bar{x}$ die Existenz eines Elementes $X_1 \in \mathfrak{n}_{i_1-1}$ mit $\bar{p}_{j_1}(X_1\bar{x}) \neq 0$. Da $\mathfrak{n}_{i_1-1} \backslash \mathfrak{n}_{i_1}$ in $\mathfrak{n}_{i_1-1}$ dicht liegt, können wir $X_1 \in \mathfrak{n}_{i_1-1} \backslash \mathfrak{n}_{i_1}$ annehmen; dann ist $\mathfrak{n}_{i_1-1} = \mathbf{R}X_1 + \mathfrak{n}_{i_1}$, also $\mathfrak{n}\bar{x} = \mathbf{R}X_1\bar{x} + \mathfrak{n}_{i_2-1}\bar{x}$. Folglich existiert ein $X_2 \in \mathfrak{n}_{i_2-1}$, so daß $\bar{p}_{j_2}(X_1\bar{x})$ und $\bar{p}_{j_2}(X_2\bar{x})$ linear unabhängig sind. Wir können wieder $X_2 \in \mathfrak{n}_{i_2-1} \backslash \mathfrak{n}_{i_2}$ annehmen; dann ist $\mathfrak{n}\bar{x} = \mathbf{R}X_1\bar{x} + \mathbf{R}X_2\bar{x} + \mathfrak{n}_{i_3-1}\bar{x}$. So gewinnen wir sukzessiv Elemente $X_l \in \mathfrak{n}_{i_l-1} \backslash \mathfrak{n}_{i_l}$, $l = 1, \ldots, d$, so daß die Vektoren $\bar{p}_{j_k}(X_1\bar{x}), \ldots, \bar{p}_{j_k}(X_k\bar{x})$ linear unabhängig sind für alle $k = 1, \ldots, d$. Daraus folgert man ohne Schwierigkeiten durch Induktion nach k, daß die Matrix $(p_{j_l}(X_i\bar{x}) \mid 1 \leq l, i \leq k)$ den Rang k hat für alle $k = 1, \ldots, d$. Also ist die Menge $\mathscr{X}'' := \bigcap_{k=1}^d \{x \in V \mid \det(p_{j_l}(X_i x) \mid 1 \leq l,\ i \leq k) \neq 0\}$ Zariski-offen und nichtleer. Insbesondere ist das homogene Polynom $Q(x) := \det(p_{j_l}(X_i x) \mid 1 \leq l, i \leq d)$, $x \in V$, nicht das Nullpolynom, und $\mathscr{X}' := \{x \in V \mid Q(x) \neq 0\}$ ist eine Zariski-offene nichtleere Menge in V.

Für $x \in \mathscr{X}'$ und $1 \leq k \leq d$ hat das Gleichungssystem $\sum_{i=1}^d p_{j_l}(X_i x) y_i = \delta_{k,l}$, $l = 1, \ldots, d$, genau eine Lösung $(y_1, \ldots, y_d) =: (\gamma_1^{(k)}(x), \ldots, \gamma_d^{(k)}(x))$; hierbei sei $\delta_{k,l}$ das Kronecker-Symbol. Nach der Cramerschen Regel sind die Funktionen $Q(x) \cdot \gamma_i^{(k)}(x)$ Polynome auf V für alle $i, k = 1, \ldots, d$. Für $x \in \mathscr{X}'$ und $1 \leq k \leq d$ definieren wir $X_k(x) := \sum_{i=1}^d \gamma_i^{(k)}(x) X_i$; dann sind die Funktionen $Q(x) \cdot X_k(x)$ Polynomfunktionen auf V mit Werten in $\mathfrak{n}$ für alle $k = 1, \ldots, d$. Wir zeigen jetzt: Ist $j < j_k$, $1 \leq k \leq d$, so ist $p_j(X_k(x)x) = 0$ für alle $x \in \mathscr{X}'$. Das ist zunächst klar für alle $j \in \{j_1, \ldots, j_{k-1}\}$ nach Definition von $X_k(x)$. Nehmen wir nun $j < j_k$ minimal an, so daß $p_j(X_k(x)x) \neq 0$ wäre für ein $x \in \mathscr{X}'$, und l minimal mit $j < j_l$. Dann gäbe es aber auch ein $x \in \mathscr{X}''$, mit $p_j(X_k(x)x) \neq 0$; für $x \in \mathscr{X}''$ sind aber die Vektoren $\bar{p}_{j-1}(X_1 x), \ldots, \bar{p}_{j-1}(X_{l-1} x)$ linear unabhängig. Wegen der Minimalität von j wäre nun $\bar{p}_j(X_k(x)x) = p_j(X_k(x)x)e_j$, also $\bar{p}_j(X_k(x)x)$ linear unabhängig von $\bar{p}_j(X_1 x), \ldots, \bar{p}_j(X_{l-1} x)$, da schon $\bar{p}_{j-1}(X_1 x), \ldots, \bar{p}_{j-1}(X_{l-1} x)$ linear unabhängig sind. Damit wäre $\bar{p}_j(\mathfrak{n}x)$ mindestens l-dimensional im Widerspruch zu $j < j_l$. Also muß $p_j(X_k(x)x) = 0$ sein für alle $x \in \mathscr{X}'$ und alle $j < j_k$. Daraus ergibt sich zusammen mit der Definition von $X_k(x)$, daß

$$X_k(x)x \equiv e_{j_k} \qquad (\text{mod } e_{j_k+1}, \ldots, e_N) \tag{*}$$

ist für alle $x \in \mathscr{X}'$ und alle $k = 1, \ldots, d$. Dies hat insbesondere zur Folge, daß $\mathscr{X}' \subseteq Z$ ist.

1.5. LEMMA. *Das Polynom Q ist U-invariant.*

Beweis. Seien $x \in \mathscr{X}''$ und $A \in U(G)$ fest vorgegeben. Für einen Endomorphismus X von V setzen wir $\bar{X} := (p_{j_1}(Xx), \ldots, p_{j_d}(Xx)) \in \mathbf{R}^d$. Wegen $x \in \mathscr{X}''$ ist dann $\{\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_d\}$ eine Basis von $\mathbf{R}^d$. Also wird durch die Vorschrift $\bar{X}_k \mapsto \overline{AX_kA^{-1}}$, $k = 1, \ldots, d$, eine lineare Abbildung f von $\mathbf{R}^d$ in sich definiert. Nun wollen wir einsehen, daß sich die lineare Abbildung $X \mapsto \overline{A^{-1}X}$ von $\mathfrak{n}$ nach $\mathbf{R}^d$ zu einer linearen Abbildung g: $\bar{X} \mapsto \overline{A^{-1}X}$ von $\mathbf{R}^d$ in sich faktorisieren läßt. Dazu genügt es zu zeigen, daß $Xx = 0$ ist, falls $\bar{X} = 0$ ist. Wir argumentieren ähnlich wie am Schluß von 1.4: Wäre $\bar{X} = 0$ und $Xx \neq 0$, so wählen wir j minimal mit $p_j(Xx) \neq 0$ und l minimal mit $j < j_l$; $j \notin \{j_1, \ldots, j_d\}$ wegen $\bar{X} = 0$. Wegen $x \in \mathscr{X}''$ wäre dann $\bar{p}_j(Xx) = p_j(Xx)e_j$ linear unabhängig von $\bar{p}_j(X_1 x), \ldots, \bar{p}_j(X_{l-1} x)$, also $\bar{p}_j(\mathfrak{n}x)$ mindestens l-dimensional im Widerspruch zu $j < j_l$. Die Abbildung g ist also wohldefiniert.

Wegen 1.4 (*) und wegen der Unipotenz von A^{-1} gehört zu der Abbildung g von $\mathbf{R}^d$ in sich hinsichtlich der Basis $\{\overline{X_1(x)}, \ldots, \overline{X_d(x)}\}$ eine untere Dreiecksmatrix mit Einsen in der Diagonale; also hat g die Determinate 1. Zum Nachweis, daß auch f die Determinante 1 hat, zeigen wir, daß die Matrix von f hinsichtlich der Basis $\{\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_d\}$ von $\mathbf{R}^d$ ebenfalls eine untere Dreiecksmatrix mit Einsen in der Diagonale ist. Wir bezeichnen mit Ad die adjungierte Darstellung von $U(G)$ in $\mathfrak{n}$ und sehen zunächst durch Differentiation der Gleichung $A(\operatorname{Exp} tX)A^{-1} = \operatorname{Exp}(t\,Ad(A)X)$, $X \in \mathfrak{n}$, $t \in \mathbf{R}$, nach t im Punkte $t = 0$ ein, daß $AXA^{-1} = Ad(A)X$ ist. Für $k = 1, \ldots, d$ gilt nun $Ad(A)X_k = X_k + Y_k$ mit $Y_k \in \mathfrak{n}_{i_k}$ aufgrund der Wahl der Idealfolge $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_0 \supseteq \mathfrak{n}_1 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{n}_m = \{0\}$. Da wegen $x \in \mathscr{X}''$ die Vektoren $X_{k+1}x, \ldots, X_d x \in \mathfrak{n}_{i_k}x$ linear unabhängig sind, bilden sie nach Definition von i_k aus Dimensionsgründen eine Basis von $\mathfrak{n}_{i_k}x$. Folglich liegt $Y_k x$ im linearen Erzeugnis der Vektoren $X_{k+1}x, \ldots, X_d x$, also $\bar{Y}_k$ im Erzeugnis von $\{\bar{X}_{k+1}, \ldots, \bar{X}_d\}$.

Mit $\det f = \det g = 1$ folgt nun:

$$\begin{aligned} Q(A^{-1}x) &= \det(p_{j_l}(X_k A^{-1}x) \mid l, k = 1, \dots, d) \\ &= \det(\overline{A^{-1}(AX_1A^{-1})}, \dots, \overline{A^{-1}(AX_dA^{-1})}) \\ &= \det(g \circ f(\bar{X}_1), \dots, g \circ f(\bar{X}_d)) \\ &= \det(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_d) = Q(x). \end{aligned}$$

Da $\mathfrak{X}''$ in V dicht liegt, ergibt sich die Gültigkeit der Gleichung $Q(A^{-1}x) = Q(x)$ für alle $x \in V$ durch Stetigkeit. ■

Bemerkung. Die sorgfältige Wahl, die wir in 1.4 für die Elemente $X_1, \dots, X_d$ getroffen haben, war für die Invarianz von Q wesentlich. Es gibt nämlich einfache Beispiele unipotenter Darstellungen, auch Beispiele für den Spezialfall der koadjungierten Darstellung einer einfach zusammenhängenden nilpotenten Liegruppe, in denen Elemente $X_1, \dots, X_d \in \mathfrak{n}$ so gewählt werden können, daß das Polynom $\det(p_{j_l}(X_k)x \mid l, k = 1, \dots, d)$, $x \in V$, nicht U-invariant ist. Es hätte auch nicht genügt, für $k = 1, \dots, d$ das Element X_k beliebig aus $\mathfrak{n}_{i_k - 1} \backslash \mathfrak{n}_{i_k}$ zu wählen, da sonst das Polynom $\det(p_{j_l}(X_k x) \mid l, k = 1, \dots, d)$ das Nullpolynom hätte werden können.

1.6. Wir beweisen nun unter Verwendung der Methoden von Pukanszky ([10], part. II, chap. I, §§3, 5) den folgenden

SATZ. *In V sei eine Jordan-Hölder-Basis $\{e_1, \dots, e_N\}$ für U vorgegeben. Dann existiert ein U-invariantes homogenes Polynom $Q \not\equiv 0$ auf V, so daß gilt:*

(i) *Alle Bahnen von U in V, auf denen Q nicht verschwindet, haben denselben Parameterraum W; die Dimension von W stimmt mit dem Grad von Q überein.*

(ii) *Für $x \in V$ mit $Q(x) \neq 0$ sei $z \mapsto P(z, x)$, $z \in W$, die parametrisierende Polynomfunktion der Bahn von x; dann gibt es eine ganze Zahl $r \geq 0$, so daß die Funktion $(z, x) \mapsto Q(x)^r \cdot P(z, x)$ eine Polynomfunktion auf $W \times V$ mit Werten in V ist.*

Beweis. Ist U die Einsdarstellung, so ist die Aussage des Satzes mit $Q \equiv 1$, $W = \{0\}$ und $P(z, x) = x$ trivialerweise erfüllt. Wir nehmen also an, daß U nichttrivial ist, und zeigen nun, daß unser in 1.4 definiertes Polynom Q die Aussage des Satzes erfüllt.

Wir behalten die Bezeichnungen von 1.4 bei und setzen $Y_k(x) := Q(x) \cdot X_k(x)$, $k = 1, \dots, d$. Da diese Funktionen Polynomfunktionen auf V sind (1.4) und da die Exponentialreihe wegen der Nilpotenz von $\mathfrak{n}$ abbricht, werden durch die Gleichung

$$(\operatorname{Exp} t_1 Y_1(x) \cdot \cdots \cdot \operatorname{Exp} t_d Y_d(x))x =: \sum_{j=1}^{N} Q_j(\bar{t}, x) e_j$$

Polynome $Q_j(\bar{t}, x)$, $\bar{t} = (t_1, \ldots, t_d) \in \mathbf{R}^d$, $x \in V$, definiert.

Wegen $\mathscr{X}' \subseteq Z$ (1.4) ist $\bar{p}_{j_k}(\mathfrak{n}x)$ für $x \in \mathscr{X}'$ und $1 \leq k \leq d$ k-dimensional, also der Kern der Abbildung $X \mapsto \bar{p}_{j_k}(Xx)$, $X \in \mathfrak{n}$, $(m-k)$-dimensional. Dieser bildet eine Lieunteralgebra von $\mathfrak{n}$, die aus Dimensionsgründen von $Y_{k+1}(x), \ldots, Y_d(x)$ und dem $(m-d)$-dimensionalen Annullator $\mathfrak{n}_x$ von x erzeugt wird. Also ist $U(G) = \operatorname{Exp} \mathbf{R} Y_1(x) \cdot \cdots \cdot \operatorname{Exp} \mathbf{R} Y_d(x) \cdot \operatorname{Exp} \mathfrak{n}_x$ (siehe etwa [10], S. 85), und folglich durchläuft $\sum_{j=1}^{N} Q_j(\bar{t}, x) e_j$ mit $\bar{t} \in \mathbf{R}^d$ die ganze Bahn von x.

Sei nun W der von den Vektoren $e_{j_1}, \ldots, e_{j_d}$ erzeugte Unterraum von V. Wegen 1.4 (*) hat $Q_{j_k}(\bar{t}, x)$ die Form $p_{j_k}(x) + Q(x) \cdot (t_k + f_k(t_1, \ldots, t_{k-1}, x))$ für $k = 1, \ldots, d$, wobei die Funktionen f_k Polynome sind. Offenbar läßt sich für $z \in W$, $z = \sum_{k=1}^{d} z_k e_{j_k}$, das Gleichungssystem $t_k + f_k(t_1, \ldots, t_{k-1}, x) = z_k$, $k = 1, \ldots, d$, sukzessiv nach $t_1, \ldots, t_d$ auflösen, also $t_k = F_k(z, x)$, $k = 1, \ldots, d$, oder in Vektorschreibweise $\bar{t} = F(z, x)$ mit einer Polynomfunktion F. Da $F(z, x)$ mit $z \in W$ ganz $\mathbf{R}^d$ durchläuft, durchläuft $P'(z, x) := \sum_{j=1}^{N} Q_j(F(z, x), x) e_j$ mit $z \in W$ die ganze Bahn von x für alle $x \in \mathscr{X}'$. Ferner gilt

$$\begin{aligned}
p_{j_k}(P'(z, x)) &= Q_{j_k}(F(z, x), x) \\
&= p_{j_k}(x) + Q(x) \cdot (F_k(z, x) + f_k(F_1(z, x), \ldots, F_{k-1}(z, x), x)) \\
&= p_{j_k}(x) + Q(x) \cdot (z_k - f_k(F_1(z, x), \ldots, F_k(z, x), x) \\
&\qquad + f_k(F_1(z, x), \ldots, F_{k-1}(z, x), x)) \\
&= p_{j_k}(x) + Q(x) \cdot z_k \quad \text{für} \quad k = 1, \ldots, d.
\end{aligned}$$

Sei $\pi := \sum_{k=1}^{d} p_{j_k} e_{j_k}$ die Projektion von V auf W. Da $P'(z, x)$ eine Polynomfunktion ist, ist der Satz bewiesen, wenn wir zeigen, daß für alle $x \in \mathscr{X}'$ der Unterraum W und die Polynomfunktion $z \mapsto P'((1/Q(x)) \cdot (z - \pi(x)), x)$ die Aussagen (i), (ii), (iii) von 1.2 bezüglich der Bahn von x erfüllen. Da $P'(z, x)$ mit $z \in W$ die Bahn von x durchläuft, folgt (i). Aus der obigen Rechnung ergibt sich (ii). Schließlich hängt $p_j(P'(z, x))$ für festes $x \in \mathscr{X}'$ nur ab von $z_1, \ldots, z_k$ mit maximalem k für $j_k \leq j$, da $Q_j(\bar{t}, x)$ nur von $t_1, \ldots, t_k$ und $F_l(z, x)$ für $1 \leq l \leq d$ nur von $z_1, \ldots, z_l$ abhängt. ■

Bemerkung. Sei $W^{\perp}$ der von den Vektoren e_j, $j \neq j_1, \ldots, j_d$, erzeugte Unterraum von V. Wegen der Invarianz von $\mathscr{X}'$ ist $P(0, x) \in W^{\perp} \cap \mathscr{X}'$ für alle $z \in \mathscr{X}'$; also ist $W^\perp \cap \mathfrak{X}'$ eine nichtleere Zariski-offene Menge in $W^\perp$. Für $z \in W$ und $y \in W^\perp \cap \mathfrak{X}'$ ist $P(Q(y) \cdot z, y) = P'(z, y)$. Demnach ist die Funktion

$$(z, y) \mapsto P(Q(y) \cdot z, y)$$

eine Polynomfunktion auf $W \times W^\perp$.

1.7. Der nach Vorgabe einer Jordan-Hölder-Basis eindeutig bestimmte Unterraum W von V soll *Parameterraum* und die Funktion $P(z, x)$ *parametrisierende rationale Funktion* von U heißen. Ein U-invariantes Polynom $Q \neq 0$ der Form $Q(x) = \det(p_{j_l}(X_i x) \mid 1 \leq l, i \leq d)$, $X_1, \ldots, X_d \in \mathfrak{n}$, nennen wir wegen seiner in Satz 1.6 angeführten Eigenschaften *regularisierendes Polynom* von U. Im allgemeinen sind weder Q noch die Nullstellenmenge von Q eindeutig bestimmt, wohl aber der Durchschnitt der Nullstellenmengen aller solcher Polynome Q; diesen nennen wir den *Singularitätsbereich*, dessen Komplement $\mathfrak{X}$ den *Regularitätsbereich* von U. Offenbar gibt es regularisierende Polynome $Q_1, \ldots, Q_s$ von U, so daß $\mathfrak{X} = \{x \in V \mid Q_1(x)^2 + \cdots + Q_s(x)^2 \neq 0\}$ ist. Es ist klar, daß das Polynom $\bar{Q} := Q_1^2 + \cdots + Q_s^2$ ebenfalls die Aussage von Satz 1.6 erfüllt (natürlich abgesehen von der Aussage über den Grad von $\bar{Q}$). Insbesondere ist die parametrisierende rationale Funktion $P(z, x)$ von U für alle $x \in \mathfrak{X}$ wohldefiniert. Die Funktion σ: $x \mapsto P(0, x)$ von $\mathfrak{X}$ nach $W' := W^\perp \cap \mathfrak{X}$ ist U-invariant, wie man sofort einsieht ([10], S. 58), liefert also einen stetigen Schnitt für die Menge aller Bahnen in $\mathfrak{X}$. Und zwar wird jeder Bahn in $\mathfrak{X}$ ihr Schnittpunkt mit $W^\perp$ zugeordnet. Man kann leicht zeigen, daß diese Abbildung ein Homöomorphismus ist zwischen der Menge aller Bahnen in $\mathfrak{X}$ und der Zariski-offenen Menge W' in $W^\perp$. Ferner ist die Abbildung

$$\begin{aligned} W \times W' &\to \mathfrak{X} \\ (z, y) &\mapsto P(z, y) \end{aligned}$$

ein Homöomorphismus, dessen Umkehrung durch $x \mapsto (\pi(x), \sigma(x))$ gegeben ist. Dieser Homöomorphismus ist im allgemeinen nicht zu einem Homöomorphismus von $W \times W^\perp$ nach V fortsetzbar. Das bringt eine Schwierigkeit mit sich, die uns noch beschäftigen wird.

§2. Zerlegbare Distributionen

2.1. Ist V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, so bezeichnen wir mit $\mathcal{S}(V)$ den Raum der Schwartz-Funktionen auf V und mit $\mathcal{S}'(V)$ seinen Dualraum, den Raum der temperierten Distributionen auf V, versehen mit der starken

Topologie. Ist $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{S}'(V)$ eine beliebige Menge temperierter Distributionen auf V, so nennen wir eine temperierte Distribution T auf V *zerlegbar über* $\mathcal{M}$, wenn jede Funktion $\varphi \in \mathcal{S}(V)$, die von allen Distributionen aus $\mathcal{M}$ annulliert wird, auch von T annulliert wird oder, was dasselbe ist, wenn T in dem von $\mathcal{M}$ erzeugten abgeschlossenen Unterraum von $\mathcal{S}'(V)$ liegt. Der Name "zerlegbar" motiviert sich durch folgende Überlegung:

Definieren wir zu jeder Funktion $\varphi \in \mathcal{S}(V)$ die Funktion $\tilde{\varphi}: \mathcal{M} \to \mathbf{C}$
$$S \mapsto S(\varphi),$$

dann läßt sich T über den Raum $\tilde{\mathcal{S}}(\mathcal{M}) := \{\tilde{\varphi} \mid \varphi \in \mathcal{S}(V)\}$ faktorisieren; d.h. es gibt ein lineares Funktional $\tilde{T}$ auf $\tilde{\mathcal{S}}(\mathcal{M})$ mit $T(\varphi) = \tilde{T}(\tilde{\varphi})$ für alle $\varphi \in \mathcal{S}(V)$. Da $\tilde{T}$ ein lineares Funktional auf einem Funktionenraum ist, ist die symbolische Schreibweise

$$\tilde{T}(f) := \oint_{\mathcal{M}} f(S)\, d\tilde{T}(S), \qquad f \in \tilde{\mathcal{S}}(\mathcal{M}),$$

naheliegend. Dann können wir für alle $\varphi \in \mathcal{S}(V)$ schreiben: $T(\varphi) = \tilde{T}(\tilde{\varphi}) = \oint_{\mathcal{M}} \tilde{\varphi}(S)\, d\tilde{T}(S) = \oint_{\mathcal{M}} S(\varphi)\, d\tilde{T}(S)$; T kann also interpretiert werden als "Schwerpunkt" eines verallgemeinerten Integrals über $\mathcal{M}$.

2.2. Ist U eine stetige unipotente Darstellung einer lokalkompakten zusammenhängenden Gruppe G in V, so ist mit der Menge $\mathcal{M}$ der invarianten Maße auf den Bahnen von U in V (siehe 1.2) auf natürliche Weise eine Klasse U-invarianter temperierter Distributionen auf V ausgezeichnet. Wie man weiß, ist im allgemeinen nicht jede U-invariante temperierte Distribution zerlegbar über $\mathcal{M}$ [4]. Es stellt sich also die Frage, welche Distributionen zerlegbar sind über $\mathcal{M}$ oder, wie wir auch sagen werden, *zerlegbar für* U (oder einfach: zerlegbar). Es wird sich zeigen, daß sich die nichtzerlegbaren U-invarianten temperierten Distributionen im wesentlichen auf den Singularitätsbereich von U "konzentrieren". Wir werden nämlich sehen, daß jede U-invariante temperierte Distribution durch Multiplikation mit einer hindreichend hohen Potenz eines regularisierenden Polynoms von U zu einer zerlegbaren Distribution wird.

2.3. Zunächst müssen wir etwas distributionstheoretische Arbeit leisten:

Sind m und b nichtnegative ganze Zahlen, so bezeichnen wir mit $C^{m,b}(\mathbf{R}^N)$ die Menge aller m-mal stetig differenzierbaren Funktionen f auf $\mathbf{R}^N$, für die die Funktionen $x \mapsto (1+|x|^2)^{b/2}\, \partial f(x)$, $x \in \mathbf{R}^N$, im Unendlichen verschwinden für alle Ableitungen ∂ der Ordnung $\leq m$. Wir versehen $C^{m,b}(\mathbf{R}^N)$ mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz aller dieser Funktionen $(1+|x|^2)^{b/2}\, \partial f(x)$. Für alle m und b liegt der Raum $\mathcal{D}(\mathbf{R}^N)$ der Testfunktionen auf $\mathbf{R}^N$ (und damit "a fortiori" auch der Raum $\mathscr{S}(\mathbf{R}^N)$) dicht in $C^{m,b}(\mathbf{R}^N)$; ferner ergibt sich mit [15], chap. VII, §4, th. VI, daß jede temperierte Distribution auf $\mathbf{R}^N$ eine stetige Linearform auf $C^{m,b}(\mathbf{R}^N)$ definiert, wenn nur m und b genügend groß gewählt werden.

Sei nun R eine rationale Funktion von $\mathbf{R}^N$ nach $\mathbf{R}^N$ und p ein Polynom $\neq 0$ auf $\mathbf{R}^N$, so daß $p \cdot R$ eine Polynomfunktion von $\mathbf{R}^N$ nach $\mathbf{R}^N$ ist. Wir nehmen an, daß für alle $x \in \mathbf{R}^N$ mit $p(x) \neq 0$ der Ausdruck $|p(x)| \cdot |x|$ beschränkt ist durch einen Ausdruck der Form $\varepsilon \cdot (1+|R(x)|^2)^{s/2}$, wobei s eine natürliche Zahl und ε eine positive Zahl sei. Natürlich läßt sich dann durch etwaige Vergrößerung von ε erreichen, daß auch $|p(x)| \leq \varepsilon \cdot (1+|R(x)|^2)^{s/2}$ ist. Dann gilt für alle $m \geq 0$:

LEMMA. *Zu jedem* $c \geq 0$ *existiert ein* $b \geq 0$ *und eine natürliche Zahl* $r \geq 2m+1$, *so daß für* $f \in C^{m,b}(\mathbf{R}^N)$ *die Funktion*
$$g_f^{(r)}: \mathbf{R}^N \to \mathbf{C}, \quad x \mapsto p(x)^r f(R(x))$$
zu $C^{m,c}(\mathbf{R}^N)$ *gehört. Überdies ist die Abbildung*
$$C^{m,b}(\mathbf{R}^N) \to C^{m,c}(\mathbf{R}^N), \quad f \mapsto g_f^{(r)}$$
stetig.

Beweis. Durch Induktion nach n zeigt man, daß für $f \in C^{m,b}(\mathbf{R}^N)$ und für jede Ableitung ∂ der Ordnung $n \leq m$ die Funktion $\partial g_f^{(r)}(x)$ die Form $p(x)^{r-2n} \cdot \sum_j p_j(x) f_j(R(x))$ hat. wobei die Funktionen f_j Ableitungen von f der Ordnung $\leq n$ und die Funktionen $p_j(x)$ Polynome sind, beschränkt durch $\delta \cdot (1+|x|^2)^{k/2}$ mit Zahlen $\delta > 0$ und $k \in \mathbf{N}$, die lediglich von p, R, m und r, nicht aber von f abhängen, während die Anzahl der Summanden durch eine nur von N und m abhängige Zahl beschränkt ist; man beachte dabei, daß für eine Ableitung ∂ erster Ordnung $p(x)^2\, \partial R(x)$ eine Polynomfunktion ist. Nun setzen wir $r = 2m+k+c+1$ und schätzen ab:

$$\begin{aligned}
(1+|x|^2)^{(c+1)/2} \cdot |\partial g_f^{(r)}(x)| &\leq \delta \cdot (1+|x|^2)^{(k+c+1)/2}\, |p(x)|^{r-2n} \cdot \sum_j |f_j(R(x))| \\
&\leq \delta \cdot (1+|x|^2)^{(r-2n)/2} (|p(x)|^2)^{(r-2n)/2} \cdot \sum_j |f_j(R(x))| \\
&= \delta \cdot (|p(x)|^2 + (|p(x)|\,|x|)^2)^{(r-2n)/2} \cdot \sum_j |f_j(R(x))| \\
&\leq \delta \cdot (2\varepsilon^2 (1+|R(x)|^2)^s)^{(r-2n)/2} \cdot \sum_j |f_j(R(x))| \\
&\leq \delta \cdot (\sqrt{2}\varepsilon)^{r-2n} (1+|R(x)|^2)^{sr/2} \cdot \sum_j |f_j(R(x))|, \qquad x \in \mathbf{R}^N \text{ mit } p(x) \neq 0.
\end{aligned}$$

Setzen wir nun $b=sr$, so ist $(1+|x|^2)^{(c+1)/2}\cdot|\partial g_f^{(r)}(x)|$, $x\in\mathbf{R}^N$, für $f\in C^{m,b}(\mathbf{R}^N)$ offensichtlich beschränkt und geht überdies gleichmäßig gegen 0, wenn f in $C^{m,b}(\mathbf{R}^N)$ gegen 0 geht. Folglich verschwindet die Funktion $(1+|x|^2)^{c/2}\,\partial g_f^{(r)}(x)$ für $f\in C^{m,b}(\mathbf{R}^N)$ im Unendlichen und geht gleichmäßig gegen 0, wenn f in $C^{m,b}(\mathbf{R}^N)$ gegen 0 geht. ■

2.4. In der Notation von 1.7 wird durch $x\mapsto(\pi(x),\sigma(x))$ bzw. $(z,y)\mapsto P(z,y)$ eine rationale Funktion von V nach $W\times W^\perp$ bzw. von $W\times W^\perp$ nach V definiert. Nach Satz 1.6 gibt es eine ganze Zahl $r\geq 0$, so daß für das Polynom $p(x):=Q(x)^r=:Q_0(x)$ auf V bzw. $p(z,y):=Q(y)^r=Q_0(y)$ auf $W\times W^\perp$ die Funktion $p(x)\cdot(\pi(x),\sigma(x))$ bzw. $p(z,y)P(z,y)$ eine Polynomfunktion von V nach $W\times W^\perp$ bzw. von $W\times W^\perp$ nach V ist. Nun gilt für $x\in V$ mit $p(x)\neq 0$ die Gleichung

$$p(x)\cdot x=Q_0(x)\cdot P(\pi(x),\sigma(x))=Q_0(\sigma(x))\cdot P(\pi(x),\sigma(x)).$$

Der letzte Ausdruck ist aber eine Polynomfunktion in $(\pi(x),\sigma(x))$, und folglich erhalten wir eine Abschätzung der Form $|p(x)|\cdot|x|\leq\varepsilon\cdot(1+|(\pi(x),\sigma(x))|^2)^{s/2}$. Ebenso gilt für alle $(z,y)\in W\times W^\perp$ mit $p(z,y)\neq 0$ die Gleichung

$$\begin{aligned}p(z,y)\cdot(z,y)&=Q_0(y)\cdot(\pi(P(z,y)),\sigma(P(z,y)))\\&=Q_0(P(z,y))\cdot(\pi(P(z,y)),\sigma(P(z,y))).\end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist eine Polynomfunktion in $P(z,y)$, und wir erhalten wiederum eine Abschätzung der Form $|p(z,y)|\cdot|(z,y)|\leq\varepsilon\cdot(1+|P(z,y)|^2)^{s/2}$. Somit sind für unsere beiden rationalen Funktionen die Voraussetzungen von Lemma 2.3 erfüllt, und wir erhalten für alle $m\geq 0$ die folgenden Aussagen:

(a) Zu jedem $c\geq 0$ existiert ein $b\geq 0$ und eine ganze Zahl $s\geq 0$, so daß für $f\in C^{m,b}(V)$ die Funktion

$$g_f^{(s)}: W\times W^\perp\to\mathbf{C}, \quad (z,y)\mapsto Q(y)^s f(P(z,y))$$

zu $C^{m,c}(W\times W^\perp)$ gehört. Die Abbildung $f\mapsto g_f^{(s)}$ ist stetig.

(b) Zu jedem $c\geq 0$ existiert ein $b\geq 0$ und eine ganze Zahl $r\geq 0$, so daß für $g\in C^{m,b}(W\times W^\perp)$ die Funktion

$$f_g^{(r)}: V\to\mathbf{C}, \quad x\mapsto Q(x)^r g(\pi(x),\sigma(x))$$

zu $C^{m,c}(V)$ gehört. Die Abbildung $g\mapsto f_g^{(r)}$ ist stetig.

Bemerkung. Ist die parametrisierende rationale Funktion $P(z,x)$ von U eine

Polynomfunktion, so kann $Q_0 \equiv 1$ gewählt werden (siehe Satz 1.6); d.h. die Aussagen (a) und (b) sind mit $s=0$ bzw. $r=0$ erfüllt.

2.5. Sei jetzt T eine U-invariante temperierte Distribution auf V. Wie bereits erwähnt, existieren natürliche Zahlen m und c, so daß T eine stetige Linearform auf $C^{m-1,c-1}(V)$ definiert. Nach 2.4 (b) existieren dann nichtnegative ganze Zahlen b und r, so daß die Abbildung $g \mapsto f_g^{(r)}$ von $C^{m,b}(W \times W^\perp)$ nach $C^{m,c}(V)$ stetig ist. Also wird durch $S(g) := T(f_g^{(r)})$ eine stetige Linearform auf $C^{m,b}(W \times W^\perp)$ und damit eine temperierte Distribution auf $W \times W^\perp$ definiert.

Ist $\mathfrak{n}$ die Liealgebra von $U(G)$, verstanden als Liealgebra von V-Endomorphismen, so können wir die U-Invarianz von T infinitesimal formulieren, indem wir die Gleichung $\langle T_x, f((\operatorname{Exp} tX)x)\rangle = \langle T, f\rangle$, $f \in \mathcal{S}(V)$, $X \in \mathfrak{n}$, $t \in \mathbf{R}$, nach t im Punkte $t=0$ differenzieren; wir erhalten $\langle T_x, df(x)(Xx)\rangle = 0$, wobei df das Differential von f bezeichne. Beachten wir nun, daß die Funktion $x \mapsto df(x)(Xx)$ für $f \in C^{m,c}(V)$ zu $C^{m-1,c-1}(V)$ gehört und stetig von f abhängt, so ergibt sich die Gültigkeit der Gleichung $\langle T_x, df(x)(Xx)\rangle = 0$ für alle $f \in C^{m,c}(V)$. Nun identifizieren wir V mit $\mathbf{R}^N$, W mit $\mathbf{R}^d$ und $W^\perp$ mit $\mathbf{R}^{N-d}$ vermöge der Vektoren $e_1, \ldots, e_N$ und setzen $\pi_k := p_{j_k}$, $k = 1, \ldots, d$ (siehe 1.6); d.h. $\pi_k(x)$ ist die k-te Komponente von $\pi(x)$ in $W \triangleq \mathbf{R}^d$. Für $y \in W^\perp$ mit $Q(y) \neq 0$ hängen nach 1.2 (iii) die ersten $j_k - 1$ Komponenten von $P(z, y)$ nur von $z_1, \ldots, z_{k-1}$, nicht aber von z_k ab, $1 \leq k \leq d$; also ist $\pi_k(X(Q_0(y)P(z, y)))$ unabhängig von z_k für alle $y \in W^\perp$ und alle $X \in \mathfrak{n}$. Für $g \in \mathcal{S}(W \times W^\perp)$ und $X \in \mathfrak{n}$ erhalten wir dann mit $h(z, y) := Q_0(y)g(z, y)$ unter Beachtung der U-Invarianz von Q, Q_0 und σ:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{d} \left\langle \frac{\partial S}{\partial z_k}, \pi_k(X(Q_0(y)P(z, y)))g(z, y) \right\rangle \\
&= -\left\langle S, \sum_{k=1}^{d} \pi_k(X(Q_0(y)P(z, y))) \frac{\partial g}{\partial z_k}(z, y) \right\rangle \\
&= -\left\langle T_x, Q(x)^r \sum_{k=1}^{d} \pi_k(X(Q_0(x)x)) \frac{\partial g}{\partial z_k}(\pi(x), \sigma(x)) \right\rangle \\
&= -\left\langle T_x, Q(x)^r \sum_{k=1}^{d} \pi_k(Xx) \frac{\partial h}{\partial z_k}(\pi(x), \sigma(x)) \right\rangle \\
&= -\left\langle T_x, \frac{d}{dt} Q(x)^r h(\pi((\operatorname{Exp} tX)x), \sigma(x))|_{t=0} \right\rangle \\
&= -\left\langle T_x, \frac{d}{dt} f_h^{(r)}((\operatorname{Exp} tX)x)|_{t=0} \right\rangle \\
&= -\langle T_x, df_h^{(r)}(x)(Xx)\rangle = 0.
\end{aligned}
$$

Nun seien $X_1, \ldots, X_d$ die das Polynom Q bestimmenden Elemente von $\mathfrak{n}$ (siehe 1.7), und für $x \in V$ bezeichnen wir mit $A_{l,i}(x)$, $1 \leq l, i \leq d$, die Adjunkte von $\pi_l(X_i x)$ bezüglich der Matrix $(\pi_l(X_i x) \mid l, i = 1, \ldots, d)$. Nach Definition von Q gilt dann $\sum_{i=1}^d \pi_k(X_i x) A_{l,i}(x) = \delta_{k,l} \cdot Q(x)$, $1 \leq k, l \leq d$. Da $A_{l,i}(Q_0(y)P(z, y))$, $1 \leq l, i \leq d$, ein Polynom auf $W \times W^\perp$ ist, folgt für alle $g \in \mathscr{S}(W \times W^\perp)$ und für alle $l = 1, \ldots, d$ unter Anwendung der obigen Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^d \left\langle \frac{\partial S}{\partial z_k}, \sum_{i=1}^d \pi_k(X_i(Q_0(y)P(z, y))) A_{l,i}(Q_0(y)P(z, y)) g(z, y) \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^d \left\langle \frac{\partial S}{\partial z_k}, \delta_{k,l} \cdot Q(Q_0(y)P(z, y)) g(z, y) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial S}{\partial z_l}, Q_0(y)^d Q(y) g(z, y) \right\rangle. \end{aligned}$$

Da Q_0 eine Potenz von Q ist, ergibt sich das folgende

LEMMA. *Es existiert eine (von T unabhängige) natürliche Zahl n, so daß*

$$Q(y)^n \cdot \frac{\partial S}{\partial z_k} = 0$$

ist für alle $k = 1, \ldots, d$.

Bemerkung. Ist die parametrisierende rationale Funktion $P(z, x)$ von U eine Polynomfunktion, so kann im Lemma $n = 1$ gewählt werden.

2.6. Durch Routineüberlegungen beweist man die beiden folgenden Aussagen:

(a) Ist b' hinreichend groß, so liegt für eine Funktion $g \in C^{m,b'}(W \times W^\perp)$ die Funktion $Q(y)^n g(z, y)$ in $C^{m,b}(W \times W^\perp)$ und hängt stetig von g ab.

(b) Ist $\gamma \in \mathscr{S}(W)$ mit $\int_W \gamma(z)\, dz = 1$ und ist b' hinreichend groß, so liegt für eine Funktion $g \in C^{m,b'}(W \times W^\perp)$ die Funktion $\bar{g}(z, y) := \gamma(z) \cdot \int_W g(w, y)\, dw$ in $C^{m,b}(W \times W^\perp)$ und hängt stetig von g ab.

LEMMA. *Ist b' hinreichend groß, so liegen für eine Funktion $g \in C^{m,b'}(W \times W^\perp)$ die Funktionen $Q(y)^n g(z, y)$ und $Q(y)^n \bar{g}(z, y)$ in $C^{m,b}(W \times W^\perp)$, und es gilt: $\langle S, Q(y)^n g(z, y)\rangle = \langle S, Q(y)^n \bar{g}(z, y)\rangle$.*

Beweis. Aus Stetigkeitsgründen genügt es, die Gleichung für $g \in \mathscr{D}(W \times W^\perp)$ zu beweisen. Da $\int_W (g - \bar{g})(z, y)\, dz = 0$ ist für alle $y \in W^\perp$, existieren Funktionen

$\psi_1, \ldots, \psi_d \in \mathcal{D}(W \times W^\perp)$ mit

$$(g-\bar{g})(z,y) = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial \psi_k}{\partial z_k}(z,y),$$

wie man durch Induktion nach d leicht zeigt. Mit Lemma 2.5 ist also

$$\langle S, Q(y)^n (g-\bar{g})(z,y)\rangle = -\sum_{k=1}^{d} \left\langle Q(y)^n \frac{\partial S}{\partial z_k}, \quad \psi_k(z,y)\right\rangle = 0. \quad \blacksquare$$

2.7. SATZ. *Sei U eine stetige unipotente Darstellung einer lokalkompakten zusammenhängenden Gruppe G in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum V. Sei Q regularisierendes Polynom von U und π die kanonische Projektion von V auf den Parameterraum W von U. Für $x \in V$ sei λ_x das Projektionsmaß auf der Bahn von x.*

Ist T eine U-univariante temperierte Distribution auf V, dann existiert eine natürliche Zahl R (abhängig von der Ordnung von T), so daß für alle Funktionen $\varphi \in \mathcal{S}(V)$ der Ausdruck $\langle T_x, Q(x)^R \gamma(\pi(x))\lambda_x(\varphi)\rangle$ wohldefiniert ist, wobei $\gamma \in \mathcal{S}(W)$ sei mit $\int_W \gamma(z)\,dz = 1$, und es gilt: $Q^R \cdot T(\varphi) = \langle T_x, Q(x)^R \gamma(\pi(x))\lambda_x(\varphi)\rangle$.

Beweis. Wir wählen m, c, b, r, S und n gemäß 2.5. Nach 2.4 (a) existiert eine ganze Zahl $s \geq 0$, so daß für $\varphi \in \mathcal{S}(V)$ die Funktion $g_\varphi^{(s)} \in C^{m,b'}(W \times W^\perp)$ ist, wobei b' gemäß Lemma 2.6 gewählt sei. Die Funktion $h(z,y) := Q(y)^n \overline{g_\varphi^{(s)}}(z,y)$, $(z,y) \in W \times W^\perp$, liegt nach Lemma 2.6 in $C^{m,b}(W \times W^\perp)$, die Funktion $f_h^{(r)}$ folglich in $C^{m,c}(V)$, so daß $\langle T_x, f_h^{(r)}(x)\rangle$ wohldefiniert ist. Unter Beachtung der U-Invarianz von Q berechnen wir für $x \in V$ mit $Q(x) \neq 0$:

$$\begin{aligned} f_h^{(r)}(x) &= Q(x)^r Q(x)^n \overline{g_\varphi^{(s)}}(\pi(x), \sigma(x)) \\ &= Q(x)^{r+n} \gamma(\pi(x)) \cdot \int_W g_\varphi^{(s)}(w, \sigma(x))\,dw \\ &= Q(x)^{r+n} Q(x)^s \gamma(\pi(x)) \cdot \int_W \varphi(P(w, \sigma(x)))\,dw \\ &= Q(x)^R \gamma(\pi(x))\lambda_x(\varphi) \quad \text{mit} \quad R := r+n+s \in \mathbf{N}; \end{aligned}$$

für $x \in V$ mit $Q(x) = 0$ gilt die Gleichung $f_h^{(r)}(x) = Q(x)^R \gamma(\pi(x))\lambda_x(\varphi)$ trivialerweise, da beide Seiten verschwinden. Also ist $\langle T_x, Q(x)^R \gamma(\pi(x))\lambda_x(\varphi)\rangle$ wohldefiniert. Nun betrachten wir die Funktion $g(z,y) := Q(y)^n g_\varphi^{(s)}(z,y)$, $(z,y) \in W \times W^\perp$, aus $C^{m,b}(W \times W^\perp)$, bilden die Funktion $f_g^{(r)} \in C^{m,c}(V)$ und rechnen aus, daß $f_g^{(r)} = Q^R \cdot \varphi$ ist. Mit Lemma 2.6 erhalten wir jetzt

$$\begin{aligned} Q^R \cdot T(\varphi) &= T(f_g^{(r)}) = S(g) = \langle S, Q(y)^n g_\varphi^{(s)}(z, y)\rangle \\ &= \langle S, Q(y)^n \overline{g_\varphi^{(s)}}(z, y)\rangle = S(h) = T(f_h^{(r)}) \\ &= \langle T_x, Q(x)^R \gamma(\pi(x))\lambda_x(\varphi)\rangle. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Bemerkung. (a) Die Aussage des Satzes gilt auch für das in 1.7 betrachtete Polynom $\bar{Q}$.

(b) Ist die parametrisierende rationale Funktion $P(z, x)$ von U eine Polynomfunktion, so gehört die Funktion $Q(x)\gamma(\pi(x))\lambda_x(\varphi)$ zu $\mathscr{S}(V)$, und die Aussage des Satzes gilt wegen Bemerkung 2.4 und Bemerkung 2.5 sogar mit $R = 1$.

2.8. KOROLLAR. *Ist Q regularisierendes Polynom von U, so existiert zu jeder U-invarianten temperierten Distribution T auf V eine natürliche Zahl R (abhängig von der Ordnung von T), so daß die Distribution $Q^R \cdot T$ zerlegbar ist für U.*

Bemerkung. Nach Satz 2.7 sind die U-invarianten temperierten Distributionen der Form $Q^R \cdot T$ nicht nur zerlegbar für U, sondern sogar zerlegbar über der Menge der invarianten Maße auf den *regulären* (d.h. auf den im Regularitätsbereich $\mathscr{X}$ enthaltenen) Bahnen von U in V. Überdies liefert Satz 2.7 eine explizite Zerlegungsformel, also eine Formel, mit deren Hilfe sich diese Distributionen durch die invarianten Maße auf den (regulären) Bahnen von U in V ausdrücken lassen, gerade in dem Sinne, wie es von Rothschild und Wolf im Spezialfall der koadjungierten Darstellung einer Heisenberg-Gruppe für beliebige invariante temperierte Distributionen durchgeführt wurde.

2.9. BEISPIEL. Sei U die von Dixmier in [4], 1, angegebene unipotente Darstellung von $\mathbf{R}$ in $V = \mathbf{R}^3$. Wie man leicht sieht, ist $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1$ regularisierendes Polynom von U. Aus Dixmiers Beweis von prop. 1 in [4] geht hervor, daß für die dort definierten invarianten temperierten Distributionen T_n, $n \in \mathbf{N}$, auf V die Distributionen $Q^{n-1} \cdot T_n$ nicht zerlegbar sind. Damit ist klar, daß die Abhängigkeit des Exponenten R von der Ordnung von T in Satz 2.7 und Korollar 2.8 nicht nur beweistechnische Gründe hat, sondern sich notwendig aus dem Problem selbst ergibt.

Der Begriff "zerlegbar" ist nicht nur für *numerische* temperierte Distributionen sinnvoll, sondern offenbar auch für temperierte Distributionen mit Werten in einem beliebigen vollständigen lokalkonvexen Vektorraum E, also für stetige lineare Abbildungen von $\mathscr{S}(V)$ nach E. Aber die Aussage von Korollar 2.8 ist für eine E-wertige invariante temperierte Distribution T im allgemeinen falsch, da T jetzt nicht mehr endliche Ordnung zu haben braucht. Ist nämlich E das kartesische Produkt $\prod_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{C}_n$, $\mathbf{C}_n = \mathbf{C}$ für alle $n \in \mathbf{N}$, versehen mit der Produkttopologie, so wird durch $T(\varphi) := (T_n(\varphi) \mid n \in \mathbf{N})$, $\varphi \in \mathcal{S}(V)$, eine E-wertige temperierte Distribution auf V definiert, für die die Aussage von Korollar 2.8 nicht gilt.

2.10. *Bemerkung. Jede invariante temperierte Distribution T auf V, für die eine positive Zahl ε existiert, so daß $|\bar{Q}(x)| > \varepsilon$ ist für alle Elemente x des Trägers von T, ist zerlegbar; insbesondere ist T zerlegbar, wenn der Träger von T im Regularitätsbereich $\mathcal{X}$ von U enthalten und modulo $U(G)$ kompakt ist.*

Zum Beweis wählen wir eine unendlich oft differenzierbare Funktion α_ε auf $\mathbf{R}$, die auf einer Nullumgebung identisch verschwindet und außerhalb der ε-Umgebung des Nullpunktes identisch gleich 1 ist. Durch $x \mapsto \bar{Q}(x)^{-R}\alpha_\varepsilon(\bar{Q}(x))$, $x \in V$, sind dann für alle ganzen Zahlen $R \geq 0$ unendlich oft differenzierbare Funktionen langsamen Wachstums auf V definiert; denn die Ableitungen dieser Funktionen von der Ordnung n haben die Form $\bar{Q}(x)^{-R-n} \sum_{j=0}^n P_j(x)\alpha_\varepsilon^{(j)}(\bar{Q}(x))$ mit Polynomen $P_j(x)$ auf V, werden also majorisiert durch ein von n abhängiges Vielfaches von $\varepsilon^{-R-n} \sum_{j=0}^n |P_j(x)|$, da $\alpha_\varepsilon^{(j)}$ für $j > 0$ kompakten Träger hat und demnach beschränkt ist. Aufgrund unserer Voraussetzung ist $\alpha_\varepsilon(\bar{Q}(x)) \cdot T_x = T$, und wegen der Invarianz von $\bar{Q}$ wird mit der Funktion $\varphi(x) \in \mathcal{S}(V)$ auch die Funktion $\bar{Q}(x)^{-R}\alpha_\varepsilon(\bar{Q}(x))\varphi(x) \in \mathcal{S}(V)$ von den invarianten Maßen auf den Bahnen von U in V annulliert; mit Korollar 2.8 folgt

$$T(\varphi) = \langle T_x, \alpha_\varepsilon(\bar{Q}(x))\varphi(x)\rangle = \langle \bar{Q}(x)^R \cdot T_x, \bar{Q}(x)^{-R}\alpha_\varepsilon(\bar{Q}(x))\varphi(x)\rangle = 0.$$

Mittels einer einfachen Modifikation der Überlegungen von 2.5, 2.6 und 2.7 (man ersetzt im wesentlichen $Q(x)$ durch $\alpha_\varepsilon(\bar{Q}(x))$) kann man auch zeigen, daß jede invariante, *nicht notwendig temperierte Distribution* T (also $T \in \mathcal{D}'(V)$, dem Dualraum von $\mathcal{D}(V)$), auf deren Träger $\bar{Q} > \varepsilon$ ist für ein $\varepsilon > 0$, und folglich dann auch jede invariante Distribution $T \in \mathcal{D}'(V)$, deren Träger in $\mathcal{X}$ enthalten ist, jede Funktion $\varphi \in \mathcal{D}(V)$ annulliert, die von den invarianten Maßen auf den Bahnen von U in V annulliert wird.

Ist nun φ eine Funktion aus $\mathcal{D}(V)$, deren Träger enthalten ist in $\mathcal{X}$ (wir schreiben einfach: $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{X})$), so wird durch $\tilde{\varphi}$: $W' \to \mathbf{C}$

$$y \mapsto \lambda_y(\varphi) = \int_W \varphi(P(z, y))\, dz$$

eine Funktion aus $\mathcal{D}(W')$ definiert. Die Abbildung $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ von $\mathcal{D}(\mathcal{X})$ nach $\mathcal{D}(W')$

ist offenbar stetig. Sie ist aber auch surjektiv, da die Funktion $\psi \in \mathscr{D}(W')$ Bild der Funktion $\varphi \in \mathscr{D}(\mathscr{X})$ ist, definiert durch $\varphi(x) := \gamma(\pi(x))\psi(\sigma(x))$, $x \in \mathscr{X}$, wobei $\gamma \in \mathscr{D}(W)$ mit $\int_W \gamma(z)\, dz = 1$ gewählt sei. Nach dem Satz von der offenen Abbildung (siehe z.B. [13], Ch. III, 2.2) ist demnach $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ offen. Offenbar existiert zu jeder Funktion $\varphi \in \mathscr{D}(\mathscr{X})$ ein $\varepsilon > 0$ mit $\varphi(x) = \alpha_\varepsilon(\bar{Q}(x)) \cdot \varphi(x)$; für jede invariante, nicht notwendig temperierte Distribution T auf V ist also aufgrund der obigen Bemerkung $T(\varphi) = 0$, falls $\tilde{\varphi} = 0$ ist. *Folglich existiert zu jeder invarianten Distribution* $T \in \mathscr{D}'(V)$ (*sogar zu* $T \in \mathscr{D}'(\mathscr{X})$) *genau eine Distribution* $T' \in \mathscr{D}'(W')$ *mit* $T(\varphi) = T'(\tilde{\varphi}) = \langle T'_y, \lambda_y(\varphi)\rangle$ *für alle* $\varphi \in \mathscr{D}(\mathscr{X})$. (Vgl. [9], §4; vgl. auch [5], Th. 2, und [6], Part V, §3.)

2.11. Abschließend wollen wir uns noch überlegen, was Korollar 2.8 im Spezialfall der koadjungierten Darstellung einer einfach zusammenhängenden nilpotenten Liegruppe G besagt. Eine temperierte Distribution auf dem Dualraum $\mathfrak{g}^*$ der Liealgebra $\mathfrak{g}$ von G ist genau dann invariant unter der koadjungierten Darstellung von G in $\mathfrak{g}^*$, wenn ihre Fouriertransformierte als temperierte Distribution auf $\mathfrak{g}$ invariant ist unter der adjungierten Darstellung von G in $\mathfrak{g}$. Dabei sei für eine Funktion $f \in \mathscr{S}(\mathfrak{g})$ die Fouriertransformierte $\mathscr{F}f \in \mathscr{S}(\mathfrak{g}^*)$ definiert durch $\mathscr{F}f(\xi) := \int_\mathfrak{g} f(X) e^{i\xi(X)}\, dX$, $\xi \in \mathfrak{g}^*$, und die Fouriertransformation von $\mathscr{S}'(\mathfrak{g}^*)$ nach $\mathscr{S}'(\mathfrak{g})$ sei die zu $\mathscr{F}$ adjungierte Abbildung und werde ebenfalls mit $\mathscr{F}$ bezeichnet. Identifizieren wir G mit $\mathfrak{g}$ vermöge der Exponentialabbildung, so ist eine temperierte Distribution auf $\mathfrak{g}$ genau dann invariant unter der adjungierten Darstellung, wenn sie als Distribution auf G zentral ist, d.h. invariant unter den inneren Automorphismen.

Nach [11], Lemma 4 und Prop. 3, ist das Quadrat desjenigen (invarianten) Polynoms auf $\mathfrak{g}^*$, welches das Plancherelmaß bestimmt, ein regularisierendes Polynom Q für die koadjungierte Darstellung. Die Fouriertransformierte C von Q ist eine homogene Distribution auf $\mathfrak{g} \mathrel{\hat{=}} G$. Wegen $Q \geq 0$ ist C als Distribution auf $\mathfrak{g}$ positiv definit und folglich nach dem Satz von Schiffmann ([14]) auch als Distribution auf G. Ist $\{X_1, \ldots, X_N\}$ eine Basis von $\mathfrak{g}$ und $\{X_1^*, \ldots, X_N^*\}$ die dazu duale Basis von $\mathfrak{g}^*$, so gilt für den Differentialoperator

$$D_j : f \mapsto i\frac{\partial f}{\partial x_j}, \qquad i = \sqrt{-1},\ f\left(\sum_{j=1}^N x_j X_j\right) \in \mathscr{S}(\mathfrak{g}),$$

die Formel

$$\mathscr{F}(D_j f)(\xi) = \xi_j \mathscr{F}(f)(\xi), \qquad \xi = \sum_{j=1}^N \xi_j X_j^* \in \mathfrak{g}^*;$$

also folgt $\mathscr{F}(P(D)f)(\xi) = P(\xi)\mathscr{F}(f)(\xi)$, $D = (D_1, \ldots, D_N)$, für jedes Polynom P auf

$\mathfrak{g}^*$, wobei

$$P(D) := \sum_{p_1,\ldots,p_N} a_{p_1,\ldots,p_N} D_1^{p_1} \cdots D_N^{p_N}$$

definiert sei für

$$P(\xi) = \sum_{p_1,\ldots,p_N} a_{p_1,\ldots,p_N} \xi_1^{p_1} \cdots \xi_N^{p_N};$$

unsere Gleichung zeigt, daß $P(D)$ nicht von den speziell gewählten Koordinaten abhängt. Beachten wir noch, daß die maximale Dimension der koadjungierten Bahnen geradzahlig ist und demnach das homogene Polynom Q einen geradzahligen Grad hat, so erhalten wir

$$C = Q(D)\delta,$$

wobei δ das Diracmaß im Ursprung bezeichne. Denken wir uns die universelle einhüllende Algebra $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ von $\mathfrak{g}$ durch die Algebra der vom Ursprung getragenen Distributionen auf G realisiert, so liegt C als zentrale Distribution im Zentrum von $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$.

Nun ist eine zentrale temperierte Distribution T auf G Fouriertransformierte einer temperierten Distribution S auf $\mathfrak{g}^*$, die invariant ist unter der koadjungierten Darstellung. Nach Korollar 2.8 ist die Distribution $Q^R \cdot S$ für genügend großes R zerlegbar für die koadjungierte Darstellung. Also ist deren Fouriertransformierte zerlegbar über der Menge der Fouriertransformierten der invarianten Maße auf den koadjungierten Bahnen in $\mathfrak{g}^*$. Das ist aber bei geeigneter Normierung dieser Maße aufgrund von Kirillovs Charakterformel genau die Menge der Charaktere irreduzibler Darstellungen von G, und die Fouriertransformierte von $Q^R \cdot S$ ist die Distribution $C^{(R)} * T = Q(D)^R T$ mit $C^{(R)} := C * \cdots * C$ (R Faktoren), wobei die Faltung $*$ als additive Faltung auf der Liealgebra $\mathfrak{g} \mathrel{\hat{=}} G$ zu verstehen ist. Damit haben wir bewiesen:

KOROLLAR. *Ist G eine einfach zusammenhängende nilpotente Liegruppe und ist Q regularisierendes Polynom der koadjungierten Darstellung von G, so existiert zu jeder zentralen temperierten Distribution T auf G eine natürliche Zahl R, so daß die Distribution $Q(D)^R T$ zerlegbar ist über der Menge der Charaktere irreduzibler Darstellungen von G.*

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Bourbaki, N. *Groupes et algèbres de Lie.* Chap. III. Paris: Hermann 1972.
[2] Carlton, E. *A Plancherel formula for idyllic nilpotent Lie groups.* Trans. Amer. Math. Soc. *224*, (1976) 1–42.
[3] Dixmier, J. *Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents.* V. Bull. Soc. Math. France *87* (1959), 65–79.
[4] Dixmier, J. *Sur les distributions invariantes par un groupe nilpotent.* C.R. Acad. Sci., Paris, Ser. A *285* (1977), 7–10.
[5] Harish-Chandra. *Invariant distributions on Lie algebras.* Amer. J. Math. *86* (1964), 271–309.
[6] ——, *Harmonic Analysis on Reductive p-adic Groups.* (Notes by G. van Dijk), Lecture Notes in Mathematics 162. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag 1970.
[7] Hochschild, G. *The Structure of Lie Groups.* San Francisco, London, Amsterdam: Holden-Day, Inc. 1965.
[8] Kirillov, A. A. *Unitäre Darstellungen nilpotenter Liegruppen,* Usp. Mat. Nauk. *17* (Russisch) (1962), 57–110.
[9] Methée, P. D. *Sur les distributions invariantes dans le groupe des rotations de Lorentz.* Comment. Math. Helv. *28* (1954), 224–269.
[10] Pukanszky, L. *Leçons sur les représentations des groupes.* Paris: Dunod 1967.
[11] ——, *On the Characters and the Plancherel Formula of Nilpotent Groups.* J. functional Analysis *1* (1967), 255–280.
[12] Rothschild, L. P., Wolf, J. A. *Eigendistribution Expansions on Heisenberg Groups.* Indiana Univ. Math. J. *25* (1976), 753–762.
[13] Schaefer, H. H. *Topological Vector Spaces.* Third Printing Corrected. New York – Heidelberg – Berlin: Springer-Verlag 1971.
[14] Schiffmann, G. *Distributions centrales de type positif sur un groupe de Lie nilpotent.* Bull. Soc. Math. France *96* (1968), 347–355.
[15] Schwartz, L. *Théorie des distributions.* Paris: Hermann 1966.

Eingegangen den 28. November 1979