Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 57 (1982)

Artikel: Eine Verschärfung des Satzes von Dirichlet über diophantische Approximation.

Autor: Thurnheer, Peter

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-43874

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helvetici **57** (1982) 60–78 0010–2571/82/000160–19$01.50+0.20/0
© 1982 Birkhäuser Verlag, Basel

Eine Verschärfung des Satzes von Dirichlet über diophantische Approximation

PETER THURNHEER

I. Einleitung, Resultat

Nach Dirichlet können zwei reelle Zahlen α, β von der Ordnung 2 diophantisch approximiert werden in dem Sinne, dass unendlich viele Gitterpunkte $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, $ab \neq 0$, existieren, sodass mit einem positiven $k_0 = k_0(\alpha, \beta)$ gilt

$$[\![\alpha a + \beta b]\!] \leq k_0 \{\max(|a|, |b|)\}^{-2},$$

wobei $[\![\ \ ]\!]$ den Abstand von der nächsten ganzen Zahl bezeichnet. In dieser Arbeit sollen folgende Fragen untersucht werden:

(A) Wie gut lassen sich α und β diophantisch approximieren, wenn man dazu nur Gitterpunkte aus einem gewissen vorgegebenen Teilgebiet von $\mathbf{R}^2$ verwendet?

(B) Lässt sich der Satz von Dirichlet verschärfen, indem gezeigt wird, dass es nichttriviale Teilmengen Φ von $\mathbf{R}^2$ gibt, sodass α und β schon von der Ordnung 2 diophantisch approximiert werden können durch Gitterpunkte ausschliesslich aus Φ?

Bei gegebenem reellem η bezeichne $\omega(\eta)$ die grösste reelle Nullstelle des Polynoms dritten Grades

$$f(x; \eta) := x^3\eta - 2x^2(\eta - 1) - x(\eta + 1) - 1,$$

und sei

$$\tau = \tau(\eta) := \begin{cases} 2, & \text{für } \eta \geq 2.5. \\ \omega(\eta), & \text{für } 1 \leq \eta \leq 2.5. \\ \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4\eta}), & \text{für } 0 < \eta \leq 1. \end{cases} \tag{1}$$

Ist θ reell und $tg\theta$ rational (siehe unten, Bemerkung (iv)), so setzt man

$$u(\xi_1, \xi_2) := \xi_1 \cos\theta + \xi_2 \sin\theta, \qquad v(\xi_1, \xi_2) := -\xi_1 \sin\theta + \xi_2 \cos\theta.$$

Mit positiven ν, ν_1 und η, $0<\nu<\nu_1$, definiert man

$$\Phi=\Phi(\nu,\eta,\theta):=\{(\xi_1,\xi_2)\in\mathbf{R}^2 \mid |v(\xi_1,\xi_2)|\leq\nu\,|u(\xi_1,\xi_2)|^\eta\},$$

$$\Phi_1=\Phi_1(\nu,\nu_1,\eta,\theta):=\begin{cases}\Phi(\nu,\eta,\theta)\cup\Phi^c(\nu_1,\eta,\theta), & \text{für } 1<\eta\leq 2.\\ \Phi(\nu,\eta,\theta)\cup\Phi^c(\nu_1,(4-\eta)/(5-2\eta),\theta), & \text{für } 2\leq\eta<2.5.\end{cases}$$

Dabei stehe Φ^c für das Komplement der Menge $\Phi\subset\mathbf{R}^2$.

SATZ. *Seien die reellen Zahlen* 1, α, β *linear unabhängig über den rationalen Zahlen* $\mathbf{Q}$ *und die Parameter* ν, ν_1 *sowie* ε *beliebig positiv,* $0<\nu<\nu_1$. *Zu gegebenem* $\eta>0$ *existieren unendlich viele Paare* a, b *ganzer Zahlen,* $ab\neq 0$, *sodass im Fall*

(A) $0<\eta<2.5$ *gilt:* $(a,b)\in\Phi(\nu,\eta,\theta)$ *und* $[\![\alpha a+\beta b]\!]\leq\varepsilon\{\max(|a|,|b|)\}^{-\tau(\eta)}$.

(B) $\eta\geq 2.5$ *gilt:* $(a,b)\in\Phi(\nu,\eta,\theta)$ *und* $[\![\alpha a+\beta b]\!]\leq k_1\{\max(|a|,|b|)\}^{-2}$.

(B_1) $1<\eta<2.5$ *gilt:* $(a,b)\in\Phi_1(\nu,\nu_1,\eta,\theta)$ *und* $[\![\alpha a+\beta b]\!]\leq k_1\{\max(|a|,|b|)\}^{-2}$.

Dabei hängt die positive Schranke k_1 *höchstens von* α, β, ν, ν_1, η *und* θ *ab.*

Bemerkungen. (i) Für $1<\eta\leq 2$ kann $k_1=k_0[(\nu_1/\nu)^{1/(\eta-1)}+1]^3$ gewählt werden (siehe Kapitel IV, Fall 1), wobei $[r]$ den Ganzteil der reellen Zahl r bezeichnet. Mit Hilfe der nachfolgenden Ueberlegungen könnten auch in den anderen Fällen mögliche Abhängigkeiten der Grösse k_1 von den Parametern ν, ν_1, η und θ angegeben werden.

(ii) Auf dem Intervall $1<\eta<2.5$ ist $\omega(\eta)$ monoton wachsend und konkav. Man beweist dies, indem man sich überlegt, dass für $(1+\sqrt{5})/2\leq x\leq 2$ die Umkehrfunktion $\omega^{[-1]}(x)$ von ω existiert und gegeben ist durch $\omega^{[-1]}(x)=(-2x^2+x+1)/x(x^2-2x-1)$. Damit lässt sich zeigen, dass die ersten beiden Ableitungen von $\omega^{[-1]}(x)$ positiv sind für $(1+\sqrt{5})/2\leq x\leq 2$, sodass $\omega^{[-1]}(x)$ auf diesem Intervall monoton wachsend und konvex ist, was die entsprechenden Eigenschaften von ω impliziert. Es ist $\omega(1)=(1+\sqrt{5})/2=1.618\ldots$ und $\omega(2.5)=2$.

(iii) Die Aussage im Fall (B_1) kann auch wie folgt formuliert werden: *Unter den Voraussetzungen des Satzes, lassen sich* α *und* β *diophantisch approximieren von der Ordnung* 2 *entweder durch Gitterpunkte ausschliesslich aus*

$$\Phi(\nu,\eta,\theta),\ \textit{oder durch solche aus}\ \begin{cases}\Phi^c(\nu_1,\eta,\theta),\ \textit{für } 1<\eta\leq 2.\\ \Phi^c(\nu_1,(4-\eta)/(5-2\eta),\theta),\ \textit{für } 2\leq\eta<2.5.\end{cases}$$

(iv) Die Voraussetzung, dass $tg\theta$ rational ist, wird nur beim Beweis des Satzes in den Fällen A, B für $\eta > 1$ gebraucht. Sie wäre nicht nötig, wenn man anstelle von Φ für beliebiges positives δ Gebiete

$$\tilde{\Phi}(\nu, \eta, \delta, \theta) := \Phi(\nu, \eta, \theta) \cup \{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbf{R}^2 \mid |u(\xi_1, \xi_2)| < \delta\}$$ betrachten würde.

(v) Für $\eta = 1$ wurde der obige Satz von W. M. Schmidt [1] hergeleitet. Im nachfolgenden Beweis wird die von ihm dabei eingeführte Methode verwendet. Insbesondere dient Kapitel II im wesentlichen dazu, die in [1] bewiesenen Hilfssätze der hier betrachteten Situation anzupassen.

(vi) Der im Satz angegebene Exponent $\tau(\eta)$ ist sicher nicht für alle $\eta \in (0, 5/2)$ bestmöglich. Es lässt sich nämlich folgende Aussage herleiten:

BEHAUPTUNG C. *Seien die Zahlen* $\lambda(1)$, η *und* $\lambda(\eta)$ *gegeben,* $\lambda(1) < 2$, $\eta > 1, \lambda(\eta) < 2$, *wobei gelte*

$$\begin{aligned} &\text{(i)}\ \ \eta/\lambda(1)\{\lambda(\eta) - 1\} > 1, \\ &\text{(ii)}\ \ \eta\lambda^2(\eta)\lambda(1) - 2\lambda(\eta)\lambda(1)\{\eta - 1\} - \eta\lambda(\eta) - \lambda(1) - 1 \leq 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Unter den Voraussetzungen des Satzes ist dann die Aussage

$$\text{“Es gibt unendlich viele Paare } a, b \text{ ganzer Zahlen, } ab \neq 0, \text{ mit } (a, b) \in \Phi(\nu, x, \theta) \text{ und } [\![\alpha a + \beta b]\!] \leq \varepsilon\{\max(|a|, |b|)\}^{-\lambda(x)}\text{”} \tag{3}$$

erfüllt für mindestens einen der Werte $x = 1$ *und* $x = \eta$.

Dabei können für $\eta \in (1, 5/2)$ beide der Grössen $\lambda(1)$ und $\lambda(\eta)$ so gewählt werden, dass sowohl (2) gilt, als auch

$$\lambda(x) > \tau(x) \quad \text{für} \quad x = 1 \quad \text{und} \quad x = \eta.$$

Auch für $\eta \in (0, 1]$ kann man eine zu Behauptung C analoge Aussage beweisen:

BEHAUPTUNG D. *Sei* λ *eine Funktion, welche für alle* $\eta \in (0, 1]$ *den folgenden Bedingungen genügt*:

$$\left.\begin{aligned} &\text{(i)}\ \ 1 < \lambda(\eta) < 2, \quad \text{(ii)}\ \ \eta\lambda(\eta)/\{\lambda(\eta) - 1\} > 1 + \eta, \\ &\text{(iii)}\ \ \eta^*(\eta) := \{\lambda^2(\eta) - \lambda(\eta) - \eta\}\lambda(\eta)/\eta \in [0, 1], \\ &\text{(iv)}\ \ \eta/\{\lambda(\eta) - 1\} \geq \lambda(\eta^*(\eta)). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Unter den Voraussetzungen des Satzes (mit beliebigem reellem θ), sowie für irgend ein $\eta \in (0, 1]$ ist dann die Aussage (3) erfüllt für mindestens einen der Werte $x = \eta$ und $x = \eta^*(\eta)$.

Dabei existieren Funktionen λ mit den Eigenschaften (4), die grösser sind als τ. Um eine relativ einfache solche anzugeben – durch entsprechenden Aufwand, liesse sich die Konstruktion von λ in Kapitel V an verschiedenen Stellen verbessern – setzt man mit

$$z_1 := 3 - \sqrt{5} = 0.7639\ldots, \quad z_2 := (1 + 2x - \sqrt{1+4x})/x^2 \,|_{x=0.201} = 1.4571\ldots:$$

$$w(\eta) := \frac{\sqrt{(4-\eta z_1)^2 + 2\eta z_1\{12 - 4z_2 - \eta z_1(2-z_2)\}} - (4 - \eta z_1)}{12 - 4z_2 - \eta z_1(2 - z_2)}$$

und

$$g(x;\eta) := x^3 - x^2 - \eta x - \eta w(\eta).$$

Bei gegebenem $\eta \in (0, 1]$ ist $g(x;\eta)$ ein Polynom dritten Grades in x. Bezeichnet $\lambda(\eta)$ seine grösste reelle Nullstelle, so lässt sich zeigen

$$\left.\begin{array}{l} \text{(i) } \lambda(\eta) > \tau(\eta), \\ \text{(ii) } \lambda(\eta) \text{ erfüllt die Voraussetzungen (4).} \end{array}\right\} \tag{5}$$

Speziell ist zum Beispiel

$$\eta^*(1) = w(1) = 0.2003\ldots \quad \text{und} \quad \begin{array}{c} \lambda(1) = 1.6704\ldots > 1.6180\ldots = \tau(1). \\ \lambda(\eta^*(1)) = 1.1947\ldots > 1.1710\ldots = \tau(\eta^*(1)). \end{array}$$

Behauptung D und (5) werden in Kapitel V bewiesen. Die Herleitung von Behauptung C wird weggelassen. Sie besteht fast ausschliesslich darin, innerhalb des in Kapitel V angewandten Vorgehens die Ueberlegungen von Kapitel III zu wiederholen, wobei man nun benützt, dass der in Kapitel III, Fall 2.1 gefundene Punkt $\mathfrak{g}_j$ nicht nur in $\Phi(\nu, \eta, \theta)$, sondern sogar in $\Phi(\nu, 1, \theta)$ liegt.

(vii) Professor K. Chandrasekharan möchte ich danken für seine Unterstützung bei dieser Arbeit, Professor W. M. Schmidt für die Anregung und klärende Bemerkungen dazu – insbesondere den Hinweis, $tg\theta$ rational vorauszusetzen – sowie das Ueberlassen eines Preprints seiner Arbeit [1].

Im weitern bezeichnen grosse Buchstaben in deutscher Schrift Elemente aus dem

auf die Koordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 bezogenen $\mathbf{R}^3$ mit Ursprung $\mathfrak{O}$, entsprechende Kleinbuchstaben stehen für ihre Projektionen parallel ξ_3 in die (ξ_1, ξ_2)-Ebene. Ist $\mathfrak{X} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. so sei

$$L(\mathfrak{X}) := \alpha\xi_1 + \beta\xi_2 + \xi_3, \qquad |\mathfrak{X}| := \{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2\}^{1/2}$$

und für $\mathfrak{x} = (\xi_1, \xi_2)$ bedeute

$$u(\mathfrak{x}) := u(\xi_1, \xi_2), \qquad v(\mathfrak{x}) := v(\xi_1, \xi_2),$$
$$|\mathfrak{x}| := \{\xi_1^2 + \xi_2^2\}^{1/2}, \qquad \|\mathfrak{x}\| := \max(|\xi_1|, |\xi_2|).$$

Unter einem Gitterpunkt versteht man von nun an ein Element des $\mathbf{R}^3$ oder $\mathbf{R}^2$, dessen Koordinaten im (ξ_1, ξ_2, ξ_3)-respektive (ξ_1, ξ_2)-System ganze Zahlen sind. Positive Grössen, die höchstens von α, β, ν, ν_1, η, θ und ε abhängen, werden mit $k_2, k_3 \ldots$ bezeichnet. Die in den $\ll$-Abschätzungen implizit auftretenden Schranken sind stets von der Art der $k_2, k_3, \ldots$.

Mit diesen Bezeichnungen lassen sich die zu beweisenden Aussagen des Satzes folgendermassen formulieren:

BEHAUPTUNG AB. Zu gegebenem $\eta > 0$ existieren unendlich viele Gitterpunkte $\mathfrak{G}$ mit

$$\mathfrak{g} \neq \mathfrak{o}, \mathfrak{g} \in \Phi \quad \text{und} \quad |L(\mathfrak{G})| \begin{cases} \leq \varepsilon \, \|\mathfrak{g}\|^{-\tau}, & \text{für} \quad 0 < \eta < 2.5. \\ \ll \quad \|\mathfrak{g}\|^{-\tau}, & \text{für} \quad \eta \geq 2.5. \end{cases} \tag{6}$$

BEHAUPTUNG B_1. Zu gegebenem η, $1 < \eta < 2.5$ existieren unendlich viele Gitterpunkte $\mathfrak{G}$ mit

$$\mathfrak{g} \neq \mathfrak{o}, \mathfrak{g} \in \Phi_1 \quad \text{und} \quad |L(\mathfrak{G})| \ll \|\mathfrak{g}\|^{-2}. \tag{7}$$

II. Hilfssätze

Seien α, β, ν, ν_1, θ und ε die im Satz auftretenden Parameter. Sei $h > 0$ und Φ^* eine Teilmenge von $\mathbf{R}^2$, welche $\Phi(\nu, h, \theta)$ enthält.
Alle Aussagen in diesem Kapitel beweist man entweder unter der

VORAUSSETZUNG 1.

(i) Für die Zahl t gelte $1<t<2$ und $ht/(t-1)>1+h$. (8)
(ii) Es existieren höchstens endlich viele Gitterpunkte $\mathfrak{G}$ mit

$$\mathfrak{g}\neq\mathfrak{o},\ \mathfrak{g}\in\Phi^* \quad \text{und} \quad |L(\mathfrak{G})|\leq\varepsilon\,\|\mathfrak{g}\|^{-t}.$$

oder unter der

VORAUSSETZUNG 2.

(i) Sei $h>1$ und $t=2$.
(ii) Es existieren höchstens endlich viele Gitterpunkte $\mathfrak{G}$ mit

$$\mathfrak{g}\neq\mathfrak{o},\ \mathfrak{g}\in\Phi^* \quad \text{und} \quad |L(\mathfrak{G})|\ll\|\mathfrak{g}\|^{-2}.$$

Wiederholt wird man benützen, dass
aus

$$|L(\mathfrak{X})|\leq 1 \quad \text{und} \quad \|\mathfrak{x}\|\geq 1 \quad \text{folgt} \quad |\mathfrak{X}|\ll\|\mathfrak{x}\|. \tag{10}$$

LEMMA 1. *Zu genügend grossem $N>0$ existiert ein Gitterpunkt $\mathfrak{F}\neq\mathfrak{O}$, sodass gilt*

$$|L(\mathfrak{F})|\ll N^{-ht/(t-1)} \quad \text{und} \quad \begin{cases} |\mathfrak{F}|\ll N^h, & \text{für } h\geq 1.\\ |\mathfrak{F}|\ll N,\ |v(\mathfrak{f})|\leq N^h, & \text{für } 0<h\leq 1.\end{cases}$$

Beweis. Man wählt $k_2=k_2(\alpha,\beta)$ so, dass der konvexe, zu $\mathfrak{O}$ symmetrische Körper $\Xi:=\{\mathfrak{X}\mid |L(\mathfrak{X})|\leq k_3N^{-ht/(t-1)}\}\cap\{\mathfrak{X}\mid |u(\mathfrak{x})|\leq(k_2/k_3)N^{h/(t-1)},\ |v(\mathfrak{x})|\leq N^h\}$ das – von k_3 unabhängige – Volumen 8 hat. Man setzt

$$k_3:=\begin{cases}\{(2k_2)^t/\varepsilon\}^{1/(t-1)}, & \text{falls Voraussetzung 1 erfüllt ist,}\\ 1, & \text{falls Voraussetzung 2 erfüllt ist,}\end{cases}$$

sodass im ersten Fall gilt $k_3=\varepsilon(2k_2/k_3)^{-t}$. Nach dem ersten Satz von Minkowski aus der Geometrie der Zahlen enthält Ξ einen Gitterpunkt $\mathfrak{F}\neq\mathfrak{O}$, für den nur noch die Bedingung über $|\mathfrak{F}|$ zu verifizieren bleibt. Man benützt nun (8), beziehungsweise (9). Ist N genügend gross, hat man

$$\|\mathfrak{f}\|\leq|\mathfrak{f}|\leq\begin{cases}(2k_2/k_3)N^{h/(t-1)}, & \text{unter Voraussetzung 1.}\\ \max(2,2k_2)N^{h/(t-1)}, & \text{unter Voraussetzung 2.}\end{cases}$$

Also ist

$$|L(\mathfrak{F})| \leq k_3 N^{-ht/(t-1)} \begin{cases} \leq \varepsilon \, \|\mathfrak{f}\|^{-t}, & \text{unter Voraussetzung 1.} \\ \ll \|\mathfrak{f}\|^{-t}, & \text{unter Voraussetzung 2.} \end{cases}$$

Wieder für grosses N folgt deshalb auf Grund der Voraussetzung 1 (ii), respektive 2(ii), dass $\mathfrak{f} \notin \Phi^*$ und damit $\mathfrak{f} \notin \Phi(v, h, \theta)$ ist. Das heisst, wegen $|v(\mathfrak{f})| \leq N^h$ muss $|u(\mathfrak{f})| \ll N$ sein und darum

$$\|\mathfrak{f}\| \ll \begin{cases} N^h, & \text{für } h \geq 1, \\ N, & \text{für } 0 < h \leq 1, \end{cases}$$

was wegen (10) Lemma 1 beweist.

Sei $\mathfrak{F}_m$, $m = 1, 2, \ldots$ eine Folge von Gitterpunkten ungleich $\mathfrak{O}$ mit $v(\mathfrak{f}_m) \geq 0$, sodass für jedes $m = 1, 2, \ldots$ gilt:

Es gibt keinen Gitterpunkt $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{O}$ mit

$$|L(\mathfrak{F})| \leq |L(\mathfrak{F}_m)| \quad \text{und} \quad \begin{cases} |\mathfrak{F}| < |\mathfrak{F}_m|, & \text{für } h \geq 1. \\ \max\{|v(\mathfrak{f})|^{1/h}, |\mathfrak{F}|\} < \max\{v(\mathfrak{f}_m)^{1/h}, |\mathfrak{F}_m|\}, & \text{für } 0 < h \leq 1. \end{cases}$$

Setzt man

$$N_m := \begin{cases} |\mathfrak{F}_m|^{1/h}, & \text{für } h \geq 1, \\ \max\{v(\mathfrak{f}_m)^{1/h}, |\mathfrak{F}_m|\}, & \text{für } 0 < h \leq 1, \end{cases}$$

so ist N_m, $m = 1, 2, \ldots$ eine strikt monoton gegen ∞ wachsende Folge und mit $u_m := u(\mathfrak{f}_m)$, $v_m := v(\mathfrak{f}_m)$, $L_m := |L(\mathfrak{F}_m)|$ gilt

LEMMA 2. *Es gibt einen Index m_0, sodass für alle $m \geq m_0$ folgende Beziehungen erfüllt sind*

$$L_m \ll N_{m+1}^{-ht/(t-1)}, \tag{11}$$

$$\mathfrak{f}_m \notin \Phi^*, \tag{12}$$

$$|u_m| \ll N_m, \; N_m^h \ll v_m \leq N_m^h. \tag{13}$$

Beweis. Abschätzung (11) ist eine Folge von Lemma 1. Mit ihr, (8) oder (9) und

$$\|\mathfrak{f}_m\| \leq \begin{cases} N_m^h, & \text{für} \quad h \geq 1, \\ N_m, & \text{für} \quad 0 > h \leq 1, \end{cases} \tag{14}$$

überlegt man sich wie oben, dass (12) gilt und somit auch $\mathfrak{f}_m \notin \Phi(\nu, h, \theta)$ ist für genügend grosses m. Beachtet man zusätzlich zu (14) noch (10), ergeben sich daraus die Beziehungen unter (13), womit Lemma 2 bewiesen ist.

LEMMA 3. *Für unendlich viele j sind $\mathfrak{F}_{j-1}$, $\mathfrak{F}_j$ und $\mathfrak{F}_{j+1}$ linear unabhängig.*

Die Herleitung von Lemma 3 verläuft – unter Verwendung der linearen Unabhängigkeit von α, β und 1 über $\mathbf{Q}$ – gleich wie der Beweis der entsprechenden Aussage in [1] respektive [2]. Zum dabei benötigten Nachweis, dass die rechte Seite der Gleichung $|v_{k-1}L(\mathfrak{F}_k) - v_k L(\mathfrak{F}_{k-1})| = |v_n L(\mathfrak{F}_{n+1}) - v_{n+1} L(\mathfrak{F}_n)|$ gegen 0 geht für $n \to \infty$, benützt man nun Lemma 2 und (8) oder (9).

Im weitern bezeichne j stets ein Element der unendlichen Folge von Indizes, für welche Lemma 3 erfüllt ist. Zudem sei $j \geq m_0$ und so gross, dass $L_j \leq 1$ ist.

LEMMA 4. *Es ist* $D_j := |u_j v_{j+1} - u_{j+1} v_j| \gg N_j^{ht/(t-1)}$.

Beweis. Ist $\mathfrak{F}_m := (\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \xi_3^{(m)})$, so gilt

$$|\xi_1^{(m-1)}\xi_2^{(m)} - \xi_2^{(m-1)}\xi_1^{(m)}| = |u_{m-1}v_m - v_{m-1}u_m|, \qquad m = 2, 3, \ldots. \tag{15}$$

Mit Hilfe dieser Formel, den Lemmas 2 und 3, sowie (8) oder (9) zeigt man wie in [1], dass $|\xi_1^{(j)}\xi_2^{(j+1)} - \xi_1^{(j+1)}\xi_2^{(j)}| \gg L_{j-1}^{-1} \gg N_j^{ht/(t-1)}$ ist, woraus wieder wegen (15) Lemma 4 folgt.

Es bezeichne $\Lambda = \Lambda_j$ das von $\mathfrak{f}_j$ und $\mathfrak{f}_{j+1}$ in der (ξ_1, ξ_2)-Ebene aufgespannte Gitter und $\mu_1 = \mu_1(j)$, $\mu_2 = \mu_2(j)$ seien dessen sukzessive Minima bezüglich der Eichfunktion $g(x) := \max(|u(x)|, |v(x)|)$. Nach dem zweiten Satz von Minkowski und Lemma 4 gilt

$$N_j^{ht/(t-1)} \ll D_j \ll \mu_1 \mu_2 \ll D_j.$$

Da $1 < t \leq 2$ impliziert $t/(t-1) \geq 2$, und weil nach (10) $\|\mathfrak{f}_j\| \gg N_j^h$ ist, $h \geq 1$, folgt daraus, dass μ_1 für $h \geq 1$ von der Grössenordnung N_j^h sein muss, und es ergibt sich

LEMMA 5. *Für* $h \geq 1$ *ist* $\mu_2 \ll D_j/N_j^h$.

Folgende Tatsache wird später gebraucht:

Ist $\mathfrak{x} = s\mathfrak{f}_j + t\mathfrak{f}_{j+1}$, so gilt

$$|s| \leq \frac{1}{D_j}\{|u(\mathfrak{x})|v_{j+1} + |v(\mathfrak{x})|\,|u_{j+1}|\}, \qquad |t| \leq \frac{1}{D_j}\{|u(\mathfrak{x})|v_j + |v(\mathfrak{x})|\,|u_j|\}, \tag{16}$$

denn es ist

$$D_j\,|s| = \left|\det\begin{pmatrix} su_j & u_{j+1} \\ sv_j & v_{j+1}\end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} su_j + tu_{j+1} & u_{j+1} \\ sv_j + tv_{j+1} & v_{j+1}\end{pmatrix}\right| = |u(\mathfrak{x})v_{j+1} - v(\mathfrak{x})u_{j+1}|.$$

Daraus folgt die Abschätzung für $|s|$. Eine analoge Rechnung ergibt diejenige für $|t|$.

III. Beweis der Behauptung AB

Für die unter (1) definierte Funktion $\tau = \tau(\eta)$ gelten folgende Beziehungen:

$$1 < \tau < 2 \quad \text{und} \quad \eta\tau/(\tau - 1) > 1 + \eta, \quad \text{für} \quad 0 < \eta < 2.5, \tag{17}$$

$$\eta/\tau(\tau-1)\begin{cases} > 1, & \text{für} \quad \eta > 1. \\ = 1, & \text{für} \quad 0 < \eta \leq 1. \end{cases} \tag{18}$$

Aussage (17) und die Gleichung in (18) sind leicht zu verifizieren. Zum Beweis der Ungleichung in (18) setzt man $\rho = \rho(\eta) := \frac{1}{2}\{1 + \sqrt{1 + 4\eta}\}$. Dann ist $\rho > 1.6$ für $\eta > 1$ und $\rho^2 - \rho = \eta$, sowie $f(\rho; \eta) = (\rho - 1)(\eta - 1)^2 > 0$, für $\eta > 0$. Bei festem $\eta > 1$ ist $f(x; \eta)$ eine monoton wachsende Funktion von x für

$$x > 1.6 > \tfrac{1}{3}(2 + \sqrt{7}) > \frac{1}{3\eta}\{2(\eta - 1) + \sqrt{7\eta^2 - 5\eta + 4}\}.$$

Deshalb muss für das in der Einleitung definierte $\omega(\eta)$ gelten $\omega(\eta) < \rho(\eta)$, $\eta > 1$, woraus die zu beweisende Ungleichung folgt.

Die Behauptung AB wird indirekt bewiesen. Man geht somit aus von der

GEGENANNAHME AB. Zu gegebenem $\eta > 0$ existieren höchstens endlich viele Gitterpunkte $\mathfrak{G} \neq \mathfrak{O}$, welche (6) erfüllen.

Beachtet man zudem (17) sieht man, dass für jedes $\eta > 0$ eine der zu Beginn von Kapitel II formulierten Voraussetzungen 1 und 2 erfüllt ist, wenn man setzt

$$h = \eta, \qquad t = \tau = \tau(\eta) \quad \text{und} \quad \Phi^* = \Phi = \Phi(\nu, \eta, \theta).$$

Für diese Wahl gelten somit alle in Kapitel II bewiesenen Aussagen.

Fall 1. $0 < \eta \leq 1$.

Wegen (13) ist

$$\delta = \delta_j := [v_{j+1}/v_j] \ll (N_{j+1}/N_j)^\eta.$$

Setzt man $\mathfrak{G}_j := \mathfrak{F}_{j+1} - \delta \mathfrak{F}_j$, so ist $\mathfrak{G}_j$ ein Gitterpunkt ungleich $\mathfrak{O}$ und es gilt

$$|v(\mathfrak{g}_j)| \leq v_j \leq N_j^\eta. \tag{19}$$

Aus (16) angewandt auf $\mathfrak{x} := \mathfrak{g}_j = -\delta \mathfrak{f}_j + \mathfrak{f}_{j+1}$, erhält man unter Beachtung der Lemmas 2 und 4, sowie von (17)

$$|u(\mathfrak{g}_j)| \gg \{D_j - |v(\mathfrak{g}_j)|\,|u_j|\} v_j^{-1} \gg \{N_j^{\eta\tau/(\tau-1)} - N_j^{\eta+1}\} N_j^{-\eta} \gg N_j^{\eta/(\tau-1)},$$

sodass wegen $\eta/(\tau-1) > 1$ für $\eta > 0$ zusammen mit (19) gilt

$$\mathfrak{g}_j \in \Phi \text{ für genügend grosses } j.$$

Weiter ist

$$\|\mathfrak{g}_j\| \ll N_{j+1}$$

und mit (11)

$$|L(\mathfrak{G}_j)| \ll N_j^{-\eta} N_{j+1}^{-\eta/(\tau-1)}.$$

Beachtet man (18) und die lineare Unabhängigkeit von α, β und 1 über $\mathbf{Q}$, so folgt aus diesen letzten drei Formeln

$$\left.\begin{array}{l} |\mathfrak{g}_j| \to \infty, \text{ für } j \to \infty, \\ \mathfrak{g}_j \in \Phi \text{ und } |L(\mathfrak{G}_j)| \leq \varepsilon\, \|\mathfrak{g}_j\|^{-\tau} \text{ für alle genügend grossen } j. \end{array}\right\} \tag{20}$$

Das ist ein Widerspruch zur Gegenannahme AB. Damit ist die Behauptung AB für $0<\eta\leq 1$ bewiesen.

Den verbleibenden Fall $\eta>1$ unterteilt man in mehrere Unterfälle, wobei man den Beweis im ersten mit Hilfe der in [1] eingeführten Ueberlegungen beendet.

Fall 2.1. $\eta>1$; $\mu_2 \ll N_{j+1}^{\eta/\tau(\tau-1)}$.

Jede Kreisscheibe in der (ξ_1, ξ_2)-Ebene vom Radius $2\mu_2$ enthält einen Punkt des Gitters Λ. Deshalb existiert ein Gitterpunkt $\mathfrak{g}_j \in \Lambda$, $\mathfrak{g}_j \neq \mathfrak{o}$, für den gilt

$$\mathfrak{g}_j \in \Phi, \qquad |u(\mathfrak{g}_j)| \ll \mu_2, \qquad |v(\mathfrak{g}_j)| \ll \mu_2. \tag{21}$$

Mit ganzen Zahlen a_j, b_j lässt sich $\mathfrak{g}_j$ darstellen in der Form $\mathfrak{g}_j = a_j\mathfrak{f}_j + b_j\mathfrak{f}_{j+1}$. Setzt man die Abschätzungen unter (21) in (16) ein und beachtet die Lemmas 2 und 5, erhält man

$$|a_j| \ll (N_{j+1}/N_j)^{\eta}, \qquad |b_j| \ll 1.$$

Für den Gitterpunkt $\mathfrak{G}_j := a_j\mathfrak{F}_j + b_j\mathfrak{F}_{j+1} \neq \mathfrak{O}$, dessen Projektion der Punkt $\mathfrak{g}_j$ ist, ergibt sich daraus mit (11)

$$|L(\mathfrak{G}_j)| \ll N_j^{-\eta} N_{j+1}^{-\eta/(\tau-1)}.$$

Zusammen mit (21) und $\mu_2 \ll N_{j+1}^{\eta/\tau(\tau-1)}$ impliziert diese Abschätzung erneut (20) was, wie man sich überlegt hat, die Behauptung in diesem Fall beweist.

Fall 2.2 $\eta>1$; $\mu_2 \geq k_4^3 N_{j+1}^{\eta/\tau(\tau-1)}$.

Nach Lemma 5 und (13) gilt

$$k_4^3 N_j^{\eta} N_{j+1}^{\eta/\tau(\tau-1)} \ll D_j \ll |u_j|\, N_{j+1}^{\eta} + N_j^{\eta} N_{j+1},$$

woraus wegen (18) zusammen mit (13) für genügend grosses k_4 folgt

$$k_4^2 N_j^{\eta} N_{j+1}^{-\eta+\eta/\tau(\tau-1)} \leq |u_j| \ll N_j. \tag{22}$$

Fall 2.2.1. $\eta>1$; $\mu_2 \geq k_4^3 N_{j+1}^{\eta/\tau(\tau-1)}$; $N_j \leq k_5 N_{j+1}^{1-1/\tau(\tau-1)}$.

Nach (22) ist $u_j \neq 0$. Da $tg\theta$ rational vorausgesetzt wurde, existiert also ein k_6 mit

$$|u_j| \geq k_6.$$

Sei

$$\delta = \delta_j := [N_j^{\eta/(\eta-1)}].$$

Aus (13) folgt dann für genügend grosses ganzes $k_7 > \{\nu^{-1}(2/k_6)^\eta\}^{1/(\eta-1)}$:

$$\mathfrak{g}_j := k_7 \delta \mathfrak{f}_j \in \Phi, \tag{23}$$

sowie

$$\|\mathfrak{g}_j\| \leq 2k_7 N_j^{\eta^2/(\eta-1)}. \tag{24}$$

Sei $\mathfrak{G}_j := k_7 \delta \mathfrak{F}_j$. Dann ist $\mathfrak{G}_j$ ein Gitterpunkt ungleich $\mathfrak{O}$ mit der Projektion $\mathfrak{g}_j$. Man benützt nun (11) und die im Fall 2.2.1 gültige Voraussetzung über N_j. Wählt man in letzterer k_5 klein genug – zum Beispiel $k_5 = \{\varepsilon/(2k_7)^{1+\tau} k_8\}^{(\tau^2-\tau-1)/\eta\tau^2}$, wobei k_8 die implizit in (11) auftretende Schranke ist – so erfüllt $\mathfrak{G}_j$ zudem die Abschätzung

$$|L(\mathfrak{G}_j)| \leq \varepsilon (2k_7)^{-\tau} N_j^{-(\eta\tau^2/(\tau^2-\tau-1))+\eta/(\eta-1)}. \tag{25}$$

Es gilt

$$-(\eta\tau^2/(\tau^2-\tau-1)) + \eta/(\eta-1) \leq -\tau\eta^2/(\eta-1) \quad \text{für alle} \quad \eta > 1, \tag{26}$$

denn diese Ungleichung ist äquivalent zu

$$f(\tau(\eta); \eta) \leq 0 \quad \text{für alle} \quad \eta > 1, \tag{27}$$

wobei (27) für $1 < \eta < 2.5$ erfüllt ist nach Definition von $\tau(\eta)$ respektive $\omega(\eta)$ und für $\eta \geq 2.5$ sofort nachgeprüft werden kann.

Aus (24) bis (26) ergibt sich zusammen mit (23) wieder Aussage (20), sodass die Behauptung AB nur noch zu beweisen ist im

Fall 2.2.2. $\eta > 1$; $\mu_2 \geq k_4^3 N_{j+1}^{\eta/\tau(\tau-1)}$; $N_j > k_5 N_{j+1}^{1-1/\tau(\tau-1)}$.

Für $\eta > 1$ setzt man $\psi = \psi(\eta) := \frac{\eta^2}{\eta - 1}\{1 - 1/\tau(\tau - 1)\}$, sodass gilt

$$\psi - \eta + \eta/\tau(\tau - 1) = \psi/\eta \tag{28}$$

und wegen (22) wieder für genügend grosses k_4

$$k_4 N_j^\eta \leq N_{j+1}^\psi \tag{29}$$

ist. Mit

$$\delta = \delta_j := \left[\frac{N_{j+1}^\psi}{N_j^\eta k_4} + 1\right]$$

sowie (28) ergibt sich aus (22)

$$|u(\delta \mathfrak{f}_j)| \geq k_4 N_{j+1}^{\psi - \eta + \eta/\tau(\tau-1)} = k_4 N_{j+1}^{\psi/\eta}.$$

Zudem existiert nach (13) und (29) ein k_9 mit

$$|v(\delta \mathfrak{f}_j)| \leq |\delta \mathfrak{f}_j| \leq \frac{k_9}{k_4} N_{j+1}^\psi. \tag{30}$$

Diese letzten beiden Formeln zeigen, dass

$$\mathfrak{g}_j := \delta \mathfrak{f}_j \in \Phi \tag{31}$$

ist, falls man k_4 auch grösser $(k_9/\nu)^{1/(\eta-1)}$ wählt. Die Projektion des Gitterpunktes $\mathfrak{G}_j := \delta \mathfrak{F}_j \neq \mathfrak{O}$ ist $\mathfrak{g}_j$. Gemäss (30) gilt

$$\|\mathfrak{g}_j\| \leq \frac{k_9}{k_4} N_{j+1}^\psi, \tag{32}$$

und nach (11), (29), sowie der in diesem Fall gültigen Voraussetzung über N_j existiert eine Schranke k_{10}, sodass man hat

$$|L(\mathfrak{G}_j)| \leq \frac{k_{10}}{k_4} N_{j+1}^{\psi - (\eta\tau/(\tau-1)) - \eta(1 - 1/\tau(\tau-1))}. \tag{33}$$

Aequivalent zu (27) ist die Beziehung

$$\psi-(\eta\tau/(\tau-1))-\eta(1-1/\tau(\tau-1))\leq-\tau\psi \quad \text{für alle} \quad \eta>1.$$

Wählt man schliesslich k_4 auch grösser $\{k_9^\tau k_{10}/\varepsilon\}^{1/(\tau-1)}$, so implizieren also (32) und (33) zusammen mit (31) weider Aussage (20), und die Behauptung AB ist vollständig bewiesen.

IV. Beweis der Behauptung B_1

Fall 1. $1<\eta\leq 2$.

Nach dem Satz von Dirichlet existiert eine unendliche Folge von Gitterpunkten $\mathfrak{F}_m$, $\mathfrak{f}_m\neq\mathfrak{o}$, $m=1,2,\ldots$ mit

$$|L(\mathfrak{F}_m)|\leq k_0\,\|\mathfrak{f}_m\|^{-2},\ m=1,2,\ldots. \tag{34}$$

Man darf annehmen, dass $\mathfrak{f}_m\notin\Phi_1$ ist für genügend grosses m, da andernfalls die Behauptung mit (34) bewiesen wäre. Also ist $|u(\mathfrak{f}_m)|^\eta\geq(1/\nu_1)|v(\mathfrak{f}_m)|$, sodass für $k_{11}:=[(\nu_1/\nu)^{1/(\eta-1)}+1]$ gilt

$$\mathfrak{g}_m:=k_{11}\mathfrak{f}_m\in\Phi_1 \text{ für alle genügend grossen } m. \tag{35}$$

Zudem zeigt (34), dass der Gitterpunkt $\mathfrak{G}_m:=k_{11}\mathfrak{F}_m\neq\mathfrak{O}$, dessen Projektion der Punkt $\mathfrak{g}_m$ ist, die Abschätzung

$$|L(\mathfrak{G}_m)|\leq k_0k_{11}^3\,\|\mathfrak{g}_m\|^{-2}$$

erfüllt, was zusammen mit (35) die Behauptung B_1 für $1<\eta\leq 2$ beweist.

Fall 2. $2<\eta<2.5$.

Das weitere Vorgehen ist ganz analog wie beim Beweis der Behauptung AB. Man macht die

GEGENANNAHME $\boldsymbol{B_1}$. Zu gegebenem η, $2<\eta<2.5$, existieren höchstens endlich viele Gitterpunkte $\mathfrak{G}\neq\mathfrak{O}$, welche (7) genügen.

Das zeigt, dass die Voraussetzung 2 in Kapitel II erfüllt ist und alle dort

bewiesenen Aussagen gelten für die Wahl

$$h = \eta, \qquad t = 2, \qquad \Phi^* = \Phi_1 = \Phi_1(\nu, \nu_1, \eta, \theta).$$

Insbesondere ist nach (12) und der Definition von Φ_1 zusätzlich zu (13) die Abschätzung

$$|u_j| \gg N_j^{\eta(5-2\eta)/(4-\eta)} \tag{36}$$

erfüllt. Im

Fall 2.1. $2 < \eta < 2.5$; $\mu_2 \leq N_{j+1}^{\eta/2}$,

kann die Behauptung durch genau dieselbe Argumentation bewiesen werden, wie im entsprechenden Fall 2.1 des Kapitels III.

Fall 2.2. $2 < \eta < 2.5$; $N_j \ll N_{j+1}^{(4-\eta)/2(\eta-1)}$.

Jetzt ist wegen (11)

$$L_j \ll N_j^{-4\eta(\eta-1)/(4-\eta)}. \tag{37}$$

Man definiert

$$\delta = \delta_j := [N_j^{2\eta(\eta-2)/(4-\eta)}].$$

Die Abschätzungen (13) und (36) zeigen, dass ein ganzes k_{12} existiert, sodass gilt

$$\mathfrak{g}_j := k_{12}\delta\mathfrak{f}_j \in \Phi_1. \tag{38}$$

Es ist

$$\|\mathfrak{g}_j\| \ll N_j^{\eta^2/(4-\eta)}. \tag{39}$$

Die Projektion des Gitterpunktes $\mathfrak{G}_j := k_{12}\delta\mathfrak{F}_j \neq \mathfrak{O}$ ist $\mathfrak{g}_j$, und mit (37) sowie (39) hat man

$$|L(\mathfrak{G}_j)| \ll N_j^{2\eta^2/(4-\eta)} \ll \|\mathfrak{g}_j\|^{-2}.$$

Der Widerspruch, der sich daraus zusammen mit (38) zur Gegenannahme B_1

ergibt, beweist die Behauptung B_1 in diesem Fall.

Fall 2.3. $2<\eta<2.5$; $\mu_2>N_{j+1}^{\eta/2}$; $N_j \gg N_{j+1}^{(4-\eta)/2(\eta-1)}$.

Man benützt nun, dass $\eta>2$ vorausgesetzt ist. Wegen $\mu_2>N_{j+1}^{\eta/2}$ erhält man dann aus (13) und Lemma 4

$$N_j^{\eta} N_{j+1}^{-\eta/2} \ll |u_j| \ll N_j. \tag{40}$$

Also ist

$$N_j^{\eta} \ll N_{j+1}^{\eta^2/2(\eta-1)},$$

und mit

$$\delta = \delta_j := [1+N_{j+1}^{\eta^2/2(\eta-1)}/N_j^{\eta}],$$

sowie genügend grossem ganzem k_{13} gilt nach (13) und (36)

$$\mathfrak{g}_j := k_{13}\delta \mathfrak{f}_j \in \Phi_1 \tag{41}$$

und

$$\|\mathfrak{g}_j\| \ll N_{j+1}^{\eta^2/2(\eta-1)}.$$

Für den Gitterpunkt $\mathfrak{G}_j := k_{13}\delta\mathfrak{F}_j \neq \mathfrak{O}$, dessen Projektion der Punkt $\mathfrak{g}_j$ ist, folgt, wenn man (11) und die Bedingung über N_j beachtet

$$|L(\mathfrak{G}_j)| \ll N_j^{-\eta} N_{j+1}^{-2\eta+\eta^2/2(\eta-1)} \ll N_{j+1}^{-\eta^2/(\eta-1)} \ll \|\mathfrak{g}_j\|^{-2}.$$

Zusammen mit (41) ist dies für grosse j ein Widerspruch zur Gegenannahme B_1. Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

V. Beweis der Behauptungen D und (5)

Zum Beweis der Behauptung D betrachtet man eine Funktion λ mit den Eigenschaften (4) und ein $\eta \in (0, 1]$. Man nimmt an, dass, ausser wenn es explizit angegeben wird, das Argument von λ gleich η ist, das heisst $\lambda := \lambda(\eta)$. Wieder führt man den Beweis indirekt und geht somit aus von der

GEGENANNAHME D. Sowohl für $x=\eta$ als auch für $x=\eta^*(\eta)$ gibt es höchstens endlich viele Gitterpunkte $\mathfrak{G}=(a, b, c)\neq\mathfrak{O}$ mit den unter (3) angegebenen Eigenschaften.

Wegen (4) ist also Voraussetzung 1 in Kapitel II erfüllt für

$$h=\eta, \qquad t=\lambda=\lambda(\eta), \qquad \Phi^*=\Phi(\nu, \eta, \theta), \tag{42}$$

und alle dort bewiesenen Aussagen gelten für diese Wahl. Wie in Kapitel III, Fall 1, zeigt man, dass man für $\delta=\delta_j:=[v_{j+1}/v_j]$, $\mathfrak{G}_j:=\mathfrak{F}_{j+1}-\delta\mathfrak{F}_j\neq\mathfrak{O}$ und geeignete k_{14}, k_{15} hat

$$|v(\mathfrak{g}_j)|\leq N_j^{\eta}, \tag{43}$$

$$\|\mathfrak{g}_j\|\leq k_{14}N_{j+1}, \tag{44}$$

$$\mathfrak{g}_j\in\Phi(\nu, \eta, \theta), \ |L(\mathfrak{G}_j)|\leq k_{15}N_j^{-\eta}N_{j+1}^{-\eta/(\lambda-1)}. \tag{45}$$

Für $N_j^{\eta}\geq k_{16}N_{j+1}^{\lambda-\eta/(\lambda-1)}$, $k_{16}=k_{15}k_{14}^{\lambda}/\varepsilon$, ergibt sich aus diesen Formeln wie in den vorangehenden Beweisen ein Widerspruch zur Gegenannahme D, sodass es genügt, folgende Fälle zu betrachten:

Fall 1. $N_j^{\eta}<k_{16}N_{j+1}^{\lambda-\eta/(\lambda-1)}$; $|u(\mathfrak{g}_j|\ll N_{j+1}^{\eta/\lambda(\lambda-1)}$.

Da aus (4) (iii) folgt $\lambda-\eta/(\lambda-1)\leq\eta/\lambda(\lambda-1)$ ist nun

$$|(v(\mathfrak{g}_j)|\ll N_{j+1}^{\eta/\lambda(\lambda-1)},$$

und (44) lässt sich ersetzen durch

$$\|\mathfrak{g}_j\|\ll N_{j+1}^{\eta/\lambda(\lambda-1)}.$$

Zusammen mit (45) widerspricht dies für grosse j wieder der Gegenannahme D.

Fall 2. $N_j^{\eta}<k_{16}N_{j+1}^{\lambda-\eta/(\lambda-1)}$; $|u(\mathfrak{g}_j)|\geq k_{17}^2N_{j+1}^{\eta/\lambda(\lambda-1)}$.

Jetzt ist für genügend grosses k_{17}

$$|u(\mathfrak{g}_j)|\geq k_{17}N_j^{\eta^2/\lambda(\lambda^2-\lambda-\eta)},$$

also mit (43) und wenn man k_{17} auch grösser $\nu^{-\eta/\lambda(\lambda^2-\lambda-\eta)}$ wählt:

$$\mathfrak{g}_j\in\Phi(\nu, \eta^*(\eta), \theta).$$

Beachtet man (44), die Abschätzung in (45) und (4) (iv), ergibt sich daraus erneut ein Widerspruch zur Gegenannahme D, und die Behauptung D ist bewiesen. Für die spezielle, mit Hilfe von g in Bemerkung (vi) definierte Funktion λ sind noch die Behauptungen (5) zu verifizieren. Sei von nun an η irgend eine feste Zahl aus $(0, 1]$. Dann ist $g(x; \eta)$ eine monoton wachsende Funktion von x für $x > 1 \geq (1+\sqrt{1+3\eta})/3$, und da $w(\eta) > 0$ ist, gilt $g(\tau(\eta); \eta) < 0$, woraus wegen $\tau(\eta) > 1$ die Behauptung (5) (i) folgt. Es bleibt zu zeigen, dass λ die Bedingungen (4) erfüllt. Nach der Definition von λ ist $\eta^*(\eta) = w(\eta)$ und da für alle $x \in (0, 1]$ mit $\tau(x) = \rho(x) := (1+\sqrt{1+4x})/2$ gilt

$$\rho(x) < \lambda(x) < \rho(x) + xw(x), \tag{46}$$

ist dies für (4) (i) and (iii) nicht schwierig. Aequivalent zu (4) (ii) ist die Ungleichung

$$\lambda(\eta) < 1 + \eta.$$

Diese ist aber erfüllt, was man wegen $g(1+\eta; \eta) > 0$ einsieht mit Hilfe einer analogen Ueberlegung wie beim Beweis von (5) (i). Die letzte Beziehung (4) (iv) hat auf Grund der Definition von λ die Form

$$\eta/\{\lambda(\eta) - 1\} \geq \lambda(w(\eta)). \tag{47}$$

Auf dem Intervall $0 < x \leq 1$ ist die Funktion $w(x)$ monoton wachsend und $0 < w(x) \leq x$. Man kann dies zum Beispiel zeigen, indem man die entsprechende Eigenschaft zuerst für die Umkehrfunktion von w nachweist, respektive indem man analog argumentiert wie beim Beweis von (5) (i). Also ist

$$w^3(\eta) \leq w^2(\eta) \quad \text{und} \quad w(w(\eta)) \leq w(\eta),$$

sowie wegen $\eta \leq 1$, $w(\eta) < 0,201$ auch

$$\sqrt{1+4\eta} \leq 1 + 2\eta - z_1\eta^2,$$

$$\sqrt{1+4w(\eta)} \leq 1 + 2w(\eta) - z_2 w^2(\eta).$$

Unter Verwendung von (46) und diesen letzten 4 Formeln sieht man, dass (47) sicher erfüllt ist, falls gilt

$$\{12 - 4z_2 - \eta z_1(2 - z_2)\}w^2(\eta) + 2\{4 - \eta z_1\}w(\eta) - 2\eta z_1 \leq 0.$$

Da w so gewählt wurde, dass man in dieser Beziehung Gleichheit hat, ist auch (4) (iv) verifiziert.

LITERATURANGABEN

[1] W. M. SCHMIDT. *Two questions in diophantine approximation.* Monatshefte für Mathematik *82* (1976), 237–245.

[2] H. DAVENPORT and W. M. SCHMIDT. *Approximation to real numbers by quadratic irrationals.* Acta Arithm. *13* (1967), 169–176.

Forschungsinstitut für Mathematik
ETH-Z Hg. G.66.2
Rämistrasse 101
8092 Zürich

Eingegangen den 16 Oktober 1981