Equivalence élémentaire entre groupes finis-par-abéliens de type fini.

Autor(en): **Oger, Francis**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **57 (1982)**

PDF erstellt am: **05.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-43896

Comment. Math. Helvetici 57 (1982) 469–480 0010-2571/82/003469-12$01.50+0.20/0

Equivalence élémentaire entre groupes finis-par-abéliens de type fini

FRANCIS OGER

I. Introduction

Notre étude trouve son origine dans l'article [M], où Guido Mislin a donné, en 1974, une famille d'exemples de deux groupes G et H, nilpotents de classe 2, de type fini, à groupes dérivés finis, non isomorphes, qui vérifient $G\times\mathbf{Z}\cong H\times\mathbf{Z}$. (Rappelons qu'un groupe est dit *de type fini* s'il admet un système fini de générateurs.)

Les exemples de Mislin ont été repris par Warfield dans [W] (théorème 5.9 et exemple 8.16).

Dès 1971, Zil'ber, dans [Z], a étudié un de ces exemples, selon une perspective différente. Il a montré que les groupes considérés sont élémentairement équivalents. (Les groupes G et H sont *élémentairement équivalents* – ce que nous noterons par $G\equiv H$ – si toute formule ϕ du calcul des prédicats du premier ordre qui est valable dans l'un des deux groupes est aussi valable dans l'autre: $G\models\phi$ si et seulement si $H\models\phi$.)

Le résultat de Zil'ber paraît par la suite avoir été plus ou moins oublié. Personne ne semble s'en être inspiré; l'auteur du présent article n'en a eu connaissance que récemment.

Dans notre article, l'équivalence des propriétés $G\times\mathbf{Z}\cong H\times\mathbf{Z}$ et "$G\equiv H$" est prouvée pour les groupes finis-par-abéliens de type fini, et donc, en particulier, pour les exemples de Mislin.

On montre dans [W1] que, pour les groupes finis-par-abéliens de type fini, la propriété $G\times\mathbf{Z}\cong H\times\mathbf{Z}$ est équivalente à "G et H ont les mêmes images finies", ou encore, d'après [GPS], à "G et H ont la même complétion profinie".

L'idée principale de notre étude consiste à comparer les extensions élémentaires "suffisamment" saturées des groupes que nous considérons aux complétions profinies de ces groupes.

On trouvera dans [CK] les définitions et les résultats de théorie des modèles utilisés ici. Pour la théorie des groupes, on se reportera à [W] et [R].

Les résultats démontrés dans cet article étant susceptibles d'être étendus, nous présentons toutes les propriétés intermédiaires sous une forme aussi générale que possible.

Un résumé de cet exposé figure dans [O1].

II Résultats préliminaires

1. *Groupes polycycliques-par-finis*

Dans cette partie, la plupart des résultats seront donnés sans démonstration. Le lecteur trouvera dans [GPS] d'utiles précisions.

PROPOSITION 2.1. *Soit G un groupe polycyclique-par-fini. Pour tout entier k, G/G^k est fini. De plus, il existe, pour tout entier k, un entier $n(k)$ tel que tout élément de G^k s'écrive $x_1^k \dots x_{n(k)}^k$ avec $x_1, \dots, x_{n(k)} \in G$.*

Démonstration. Il nous suffit d'établir, pour les groupes polycycliques-par-finis, la propriété (P): "Pour tout entier k, il existe des entiers $n(k)$ et $r(k)$ et des éléments $a_1, \dots, a_{r(k)}$ de G tels que tout élément de G soit de la forme $a_i \cdot x_1^k \dots x_{n(k)}^k$".

Les groupes finis et les groupes cycliques vérifient la propriété (P).

Le lecteur montrera aisément que si le groupe G est extension du groupe H par le groupe K, H et K vérifiant la propriété (P), alors G vérifie aussi la propriété (P).

On trouve dans [GPS] la définition de la topologie profinie et de la complétion profinie $\hat{G}$ d'un groupe polycyclique-par-fini G.

[GPS] établit que deux groupes polycycliques-par-finis ont la même complétion profinie ssi ils ont les mêmes images finies, et que toute classe de groupes polycycliques-par-finis ayant la même complétion profinie est réunion d'un nombre fini de classes d'isomorphisme. Cette dernière propriété généralise des résultats de [P1] et [P2].

[GPS] exprime aussi $\hat{G}$ comme limite projective:

$$\hat{G} = \varprojlim \{G/G^k \mid k \in \mathbf{N}^*\} = \varprojlim \{G/G^{n!} \mid n \in \mathbf{N}^*\}$$

Enfin, [GPS] montre, à la Proposition 2.1, que la topologie de $\hat{G}$ en tant que complétion de G coincide avec la topologie profinie, définie sur $\hat{G}$.

On a, évidemment, $\bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} \hat{G}^{n!} = \{1\}$.

2. *Groupes finis-par-nilpotents de type fini*

Si G est un tel groupe, la suite centrale descendante $(\Gamma_i(G))_{i\in\mathbf{N}^*}$ est stationnaire; on peut donc définir, en la raffinant, une suite décroissante $(G_i)_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ de sous-groupes de G pour laquelle:

(a) $G_1 = G$ et G_{n+1} est fini
(b) pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $[G, G_i] \subset G_{i+1}$
(c) pour $1 \leqslant i \leqslant n$, G_i/G_{i+1} est cyclique.

A chaque entier $1 \leqslant i \leqslant n$, on associe, alors, un entier r_i qui vaut 1 si G_i/G_{i+1} est infini et $|G_i/G_{i+1}|$ sinon. On note $r = |G_{n+1}|$.

PROPOSITION 2.2. *Un groupe fini-par-nilpotent de type fini G est polycylique-par-fini.*

Démonstration. G est poly-(cyclique ou fini), d'après ce que nous venons de voir, et donc polycyclique-par-fini (voir [R] page 65).

PROPOSITION 2.3. *Soit G un groupe fini-par-nilpotent de type fini. Avec les notations que nous venons d'introduire, si x est un élément de G et k un entier,*

$$|\{y \in G \mid y^k = x\}| \leqslant r_1 \ldots r_n \cdot r.$$

Cette propriété reste vraie pour tout groupe élémentairement équivalent à G.

Démonstration. Choisir un élément y tel que $y^k = x$, c'est préciser successivement ses classes modulo $G_1, \ldots, G_{n+1}, \{1\}$.

Si $1 \leqslant i \leqslant n$, la classe de y modulo G_i étant donnée, on a, au plus, r_i choix possibles pour la classe de y modulo G_{i+1}: si $x = y^k = (ay)^k$ avec $a \in G_i$, on a, modulo G_{i+1}, $y^k = (ay)^k \approx a^k y^k$, d'où $a^k \approx 1$. Or, $\{a \in G_i/G_{i+1} \mid a^k = 1\}$ comporte, au plus, r_i éléments.

La classe de y modulo G_{n+1} étant donnée, on a, au plus, $|G_{n+1}|$ choix possibles pour y.

COROLLAIRE 2.4. *Si G est un groupe fini-par-nilpotent de type fini, l'ensemble t(G) des éléments de torsion de G est un groupe fini.*

Démonstration. D'après le théorème 3.25 de [W], l'ensemble des éléments de torsion d'un groupe nilpotent est un sous-groupe. Cette propriété passe naturellement aux groupes finis par-nilpotents.

D'autre part, avec les notations de la Proposition 2.3, pour tout entier k, $|\{y \in G \mid y^k = 1\}| \leqslant r_1 \cdots r_n \cdot r$. Il existe donc un entier k tel que, pour tout entier l, $\{y \in G \mid y^l = 1\} \subset \{y \in G \mid y^k = 1\}$. On a alors: $t(G) = \{y \in G \mid y^k = 1\}$, d'où le résultat.

PROPOSITION 2.5. *Soit G un groupe fini-par-nilpotent de type fini. Pour tout entier $l \geqslant 1$, il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que tout élément de G^k soit de la forme x^l avec $x \in G$.*

Démonstration. Soit c un entier pour lequel $\Gamma_{c+1}(G)$ est fini. Puisque $\bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} G^n = \{1\}$, il existe un entier $n \geqslant 1$ pour lequel $G^n \cap \Gamma_{c+1}(G) = \{1\}$. Le groupe G^n est alors nilpotent de classe c.

D'après le lemme 2 de [Ma], tout élément de $(G^n)^{l^c}$ est de la forme x^l avec $x \in G^n$. Ainsi, l'entier $k = n \cdot l^c$ est tel que tout élément de $G^k \subset (G^n)^{l^c}$ est de la forme x^l avec $x \in G$.

III. Groupes polycycliques-par-finis

On considère, ici, un groupe polycyclique-par-fini G et une extension élémentaire S de G.

On définit le sous-groupe E_S des $x \in S$ qui sont tels que, pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe un entier k et des éléments $a_1, \ldots, a_k$ de S tels que $x = a_1^n \cdots a_k^n$; $E_S = \bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} S^n$.

D'après la Proposition 2.1, il existe, pour tout entier k, un entier N_k, tel que tout élément de G^k s'écrive: $a_1^k \cdots a_{N_k}^k$ avec $a_1, \ldots, a_{N_k} \in G$. Les entiers N_k seront fixés pour le présent chapitre.

LEMME 3.1. *Pour tout entier k, tout élément de S^k s'écrit sous la forme $x_1^k \cdots x_{N_k}^k$ avec $x_1, \ldots, x_{N_k} \in S$.*

Démonstration. Pour tout entier n, G vérifie l'énoncé:

$$(\forall x)[(\exists x_1 \cdots \exists x_n)(x = x_1^k \cdots x_n^k) \rightarrow (\exists x_1 \cdots \exists x_{N_k})(x = x_1^k \cdots x_{N_k}^k)];$$

donc, S vérifie ce même énoncé quel que soit n. D'où le lemme.

PROPOSITION 3.2. *E_S est un sous-groupe caractéristique de S. D'autre part, $E_S \cap G = \{1\}$.*

Démonstration du second résultat. Soit $x \in G \cap E_S$. Pour prouver que $x = 1$, il suffit d'établir que $x \in G^k$ pour tout entier k.

Pour tout entier k, $x \in S^k$, et donc il existe un entier n et des éléments $a_1, \ldots, a_n$ de S tels que $x = a_1^k \cdots a_n^k$.

De $S \models (\exists x_1 \cdots \exists x_n)(x = x_1^k \cdots x_n^k)$, on déduit $G \models (\exists x_1 \cdots \exists x_n)(x = x_1^k \cdots x_n^k)$, d'où le résultat cherché.

DÉFINITION. *Une extension élémentaire de G est dite G-saturée ssi elle réalise tous les* 1*-types à paramètres dans G.*

THÉORÈME 3.3. *Si S est G-saturée, alors S/E_S est isomorphe à la complétion profinie $\hat{G}$ de G.*

Démonstration. On définit l'isomorphisme comme suit:

A chaque $x \in \hat{G}$, on associe une suite d'éléments de G, $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$, tendant vers x dans $\hat{G}$, telle que, pour tout entier n et tout entier $p \geqslant n$, $x_n \cdot x_p^{-1} \in G^{n!}$.

On note $\Sigma_x(v)$ l'ensemble constitué par les formules à une variable v à paramètres dans G:

$$(\exists u_1 \cdots \exists u_{N_{n!}})(v = x_n u_1^{n!} \cdots u_{N_{n!}}^{n!}).$$

Tout sous-ensemble fini de Σ_x est satisfaisable dans G, donc, Σ_x est satisfaisable dans l'extension G-saturée S de G.

Soit $y \in S$ tel que $S \models \Sigma_x(y)$.

Pour tout $z \in S$, $S \models \Sigma_x(z)$ ssi, pour tout entier n, $z \in S^{n!} \cdot y$; donc, pour tout $z \in S$, $S \models \Sigma_x(z)$ ssi $y \cdot z^{-1} \in E_S$.

On note f l'application obtenue en associant à tout élément x de $\hat{G}$ la classe modulo E_S des $y \in S$ qui vérifient $S \models \Sigma_x(y)$.

Il convient, tout d'abord, d'observer que la classe associée à chaque élément x de $\hat{G}$ ne dépend pas de la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ choisie.

Soient $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(x'_n)_{n \in \mathbf{N}}$ deux suites, dans G, qui tendent vers le même élément x de $\hat{G}$, et qui sont telles que, pour tout entier n et tout entier $p \geqslant n$,

$$x_n x_p^{-1} \in G^{n!} \quad \text{et} \quad x'_n x'^{-1}_p \in G^{n!}.$$

$(x_n x'^{-1}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers 1 dans $\hat{G}$ et donc aussi dans G.

Pour tout entier n, il existe, par conséquent, un entier $k \geqslant n$ tel que $x_k x'^{-1}_k \in G^{n!}$. Il en résulte que $x_n x'^{-1}_n = (x_n x_k^{-1})(x_k x'^{-1}_k)(x'_n x'^{-1}_k)^{-1} \in G^{n!}$.

Ainsi, dans toute extension élémentaire de G,

$$(\exists u_1 \cdots \exists u_{N_{n!}})(v = x_n \cdot u_1^{n!} \cdots u_{N_{n!}}^{n!})$$

équivaut à

$$(\exists u_1 \cdots \exists u_{N_{n!}})(v = x'_n \cdot u_1^{n!} \cdots u_{N_{n!}}^{n!}).$$

On achève la démonstration du Théorème 3.3 en établissant successivement trois lemmes:

LEMME 3.3.1. *f est un homomorphisme de groupes.*

Démonstration. On considère deux éléments x, x' de $\hat{G}$ avec des suites associées $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(x'_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies comme précédemment. $x_n x'_n$ tend vers xx'.

De plus, pour tout n et tout $p > n$, $a = x'_n x'^{-1}_p \in G^{n!}$, donc, il existe $b \in G^{n!}$ tel que $x_n a = b x_n$, d'où $(x_n x'_n)(x_p x'_p)^{-1} = x_n x'_n x'^{-1}_p x_p^{-1} = x_n a x_p^{-1} = b x_n x_p^{-1} \in G^{n!}$: Ainsi, $(x_n x'_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est associé à xx'.

Soient y, y' des représentants dans S de $f(x), f(x')$. Nous devons montrer que yy' est un représentant de $f(xx')$ dans S.

Pour tout entier n, $y \in x_n \cdot S^{n!}$ et $y' \in x'_n \cdot S^{n!}$ et comme $S^{n!}$ est normal dans S, $yy' \in x_n x'_n \cdot S^{n!}$. Le Lemme 3.1 donne, alors, le résultat cherché.

LEMME 3.3.2. *f est injective.*

Démonstration. Pour la démonstration des Lemmes 3.3.2 et 3.3.3, nous noterons $\psi_k(x, y)$ la formule:

$$(\exists u_1 \cdots \exists u_{N_{k!}})(y = x u_1^{k!} \cdots u_{N_{k!}}^{k!}).$$

Dans G, cette formule équivaut à $xy^{-1} \in G^{k!}$. Dans S, d'après le Lemme 3.1, elle équivaut à $xy^{-1} \in S^{k!}$.

Pour montrer le Lemme 3.3.2, on considère un élément x de $\hat{G}$ qui est tel que $f(x) = 1$.

On se donne, comme précédemment, une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ associée à x.

Pour tout n, du fait que $f(x) = 1$,

$$S \models \psi_n(1, x_n), \quad \text{et donc} \quad G \models \psi_n(1, x_n).$$

Par conséquent, pour tout n, $x_n \in G^{n!}$, et $x = 1$.

LEMME 3.3.3. *f est surjective.*

Démonstration. A chaque élément y de S, nous allons associer une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de G telle que, pour tout n, $S\models\psi_n(x_n, y)$.

Nous aurons, alors, nécessairement, pour tout n et pour tout $p>n$, $S\models \psi_n(x_n, x_p)$ et donc $G\models\psi_n(x_n, x_p)$.

Ainsi, $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergera dans $\hat{G}$ vers un élément x qui vérifiera $f(x)=y$.

Il reste à établir l'existence des x_n.

Nous devons prouver que, pour tout $y\in S$ et tout entier k, il existe un élément $x\in G$ tel que $S\models\psi_k(x, y)$.

$G/G^{k!}$ est fini, donc, il existe un entier r tel que

$$G\models(\exists x_1\cdots\exists x_r)\left[\bigwedge_{1\leq i<j\leq r}\neg\psi_k(x_i, x_j)\wedge(\forall x)(\psi_k(x, x_1)\vee\cdots\vee\psi_k(x, x_r))\right]$$

S vérifie ce même énoncé, donc, il existe: $x_1,\ldots,x_r$ dans G tels que tout x dans G soit équivalent à un et un seul des x_i modulo $G^{k!}$, $y_1,\ldots,y_r$ dans S tels que tout x dans S soit équivalent à un et un seul des y_i modulo $S^{k!}$.

Chaque x_i est équivalent à un et un seul y_j modulo $S^{k!}$.

Pour établir que tout élément de S est équivalent à un x_i modulo $S^{k!}$, il nous suffit donc de voir que, pour $i\neq j$, $x_ix_j^{-1}\notin S^{k!}$.

Or, pour $i\neq j$, S ne peut pas vérifier la formule $\psi_k(x_i, x_j)$ puisque G ne la vérifie pas.

COROLLAIRE 3.4. *Soient G, H deux groupes polycycliques-par-finis, S une extension élémentaire G-saturée de G, et T une extension élémentaire H-saturée de H. Si $f:S\to T$ est un isomorphisme, la restriction de f à E_S est un isomorphisme de E_S vers E_T, et f induit par passage au quotient un isomorphisme de $\hat{G}$ vers $\hat{H}$.*

Démonstration. Il résulte de la définition de E_S et de E_T que $f(E_S)$ est contenu dans E_T et $f^{-1}(E_T)$ dans E_S. Donc, la restriction de f à E_S est un isomorphisme de E_S vers E_T.

Par passage au quotient, f induit un isomorphisme de $\hat{G}\cong S/E_S$ vers $\hat{H}\cong T/E_T$.

Remarque. Il résulte de ce corollaire que deux groupes polycycliques-par-finis élémentairement équivalents ont des complétions profinies isomorphes. Ils ont, alors, les mêmes images finies d'après le corollaire 2.3 de [GPS].

Ainsi, conformément au théorème donné dans l'introduction de [GPS], toute classe de groupes polycycliques-par-finis élémentairement équivalents est obtenue par la réunion d'un nombre fini de classes d'isomorphisme.

IV. Groupes finis-par-nilpotents

THÉORÈME 4.1. *Soient G un groupe fini-par-nilpotent de type fini et S une extension élémentaire de G. Pour tout entier $n \geqslant 1$, tout élément de E_S admet dans E_S une racine n-ième et une seule (un groupe possèdant cette propriété sera dit radicable avec unicité).*

Démonstration. D'après la Proposition 3.2, $E_S \cap t(G) = \{1\}$. Ainsi, E_S est un groupe nilpotent sans torsion. Il résulte alors du théorème 4.10 de [W] que, pour tout entier $k \geqslant 1$, l'application $x \to x^k$ est injective dans E_S.

Nous allons, maintenant, démontrer la surjectivité de cette application.

Si G est tel que, pour deux entiers k, l, tout élément de G^k soit de la forme x^l, alors, pour tout entier r, G vérifie l'énoncé:

$$(\forall x)[(\exists x_1 \cdots x_r)(x = x_1^k \cdots x_r^k) \to (\exists y)(x = y^l)].$$

Comme S vérifie les mêmes énoncés que G, tout élément de S^k est de la forme x^l avec $x \in S$.

Il résulte, maintenant, de la Proposition 2.5, que, quel que soit l'entier $l \geqslant 1$, tout élément de $E_S = \bigcap_{k \in \mathbf{N}^*} S^k$ s'écrit sous la forme x^l avec $x \in S$.

Soient $k \geqslant 1$ un entier et x un élément de E_S. D'après la Proposition 2.3, $\{y \in S \mid y^k = x\}$ est fini. On note $y_1, \ldots, y_r$ les éléments de cet ensemble.

On choisit, d'autre part, pour tout entier l, un élément x_l de S tel que $x_l^{k \cdot l!} = x$.

Chaque $x_l^{l!}$ est égal à l'un des éléments $y_1, \ldots, y_r$. Donc, il existe un $i \in \{1, \ldots r\}$ tel que $\{l \in \mathbf{N} \mid x_l^{l!} = y_i\}$ soit infini; pour cet i, $y_i \in \bigcap_{l \in \mathbf{N}^*} S^l = E_S$.

Ceci montre que x admet une racine k-ième dans E_S.

On trouve dans [GS] des exemples de groupes nilpotents de classe 2, sans torsion, de type fini, non isomorphes, qui ont les mêmes images finies.

D'après le théorème 3 de [H2], si G et H sont deux des groupes considérés dans n'importe lequel de ces exemples, G et H ne peuvent vérifier $G \times \mathbf{Z} \cong H \times \mathbf{Z}$.

Il n'existe pas, non plus, un entier $n \geqslant 1$ tel que $\times^n G \cong \times^n H$, puisque cette propriété impliquerait $G \times \mathbb{Z} \cong H \times \mathbb{Z}$ d'après [H3] (voir aussi [H1] pour la réciproque de cette implication).

D'autre part, on montre dans [O2] que G et H ne sont jamais élémentairement équivalents.

On établira cependant au chapitre V que deux groupes finis-par-abéliens de type fini qui ont les mêmes images finies sont élémentairement équivalents.

V. Caractérisation algébrique de l'équivalence élémentaire pour les groupes finis-par-abéliens de type fini

Dans ce chapitre, G est un groupe fini-par-abélien de type fini et S une extension élémentaire G-saturée de G.

La proposition suivante reprend, pour l'essentiel, un résultat classique de P. Hall (cf. [W] page 12).

PROPOSITION 5.1. *$G/Z(G)$ et $S/Z(S)$ sont des groupes finis isomorphes.*

Démonstration: $Z(G)$ et $Z(S)$ sont définis par la formule $(\forall y)(xy = yx)$. Ainsi, $G/Z(G)$ et $S/Z(S)$ sont élémentairement équivalents, donc isomorphes puisque $G/Z(G)$ est fini.

PROPOSITION 5.2. *E_S est contenu dans le centre de S.*

Démonstration. Sinon, $E_S/(E_S \cap Z(S))$ serait non trivial, fini d'après la Proposition 5.1, et radicable, puisque E_S l'est conformément au Théorème 4.1, ce qui serait absurde.

THÉORÈME 5.3. *Il existe un sous-groupe K de S tel que $G \subset K$, $K \cap E_S = \{1\}$, et $\langle K, E_S\rangle = S$; il est possible de définir un isomorphisme de S sur $\hat{G} \times E_S$ qui fixe les points de E_S et ceux de G et envoie K sur $\hat{G}$.*

Démonstration. Compte tenu de ce qui précède, nous savons déjà que E_S est dans le centre de S et que $E_S \cap G = \{1\}$. Nous avons construit un isomorphisme de $\hat{G}$ vers S/E_S qui laisse fixes les éléments de G. D'autre part, E_S est radicable d'après le Théorème 4.1. Le Théorème 5.3 résulte alors du lemme suivant:

LEMME 5.3.1. *Soit M un groupe tel que $M/t(M)$ est abélien; soit R un sous-groupe radicable de M, contenu dans le centre de M, et tel que $R \cap t(M) = \{1\}$; soit N un sous-groupe de M, contenant $t(M)$, et tel que $N \cap R = \{1\}$. Il existe un sous-groupe P de M qui contient N et pour lequel il y a un isomorphisme $f: R \times (M/R) \to M$ tel que $f \mid R = id_R$, $f(M/R) = P$ et $f(x) = x$ pour tout $x \in N$.*

Un tel P sera dit *supplémentaire* de R dans M.

Démonstration. L'existence, dans $M/t(M)$, d'un supplémentaire T de R qui contient $N/t(M)$ résulte du théorème 2 de [K] et de sa démonstration.

L'image réciproque de T par l'homomorphisme canonique de M vers $M/t(M)$ est un supplémentaire de R dans M.

PROPOSITION 5.4. *E_S est muni naturellement d'une structure d'espace vectoriel sur* $\mathbf{Q}$.

Démonstration. Un groupe abélien divisible avec unicité est muni naturellement d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbf{Q}$.

THÉORÈME 5.5 *Pour des groupes finis-par-abéliens de type fini G et H, les propriétés suivantes sont équivalentes*:

1. *G et H ont les mêmes images finies.*
2. $G/G^n \cong H/H^n$ *pour tout entier* $n \geq 1$.
3. *Il existe un entier $n \geq 1$ tel que* $\times^n G \cong \times^n H$.
4. $G \times \mathbf{Z} \cong H \times \mathbf{Z}$.
5. *Il existe un groupe L, tel que L/L^n est fini pour tout entier $n \geq 1$, et pour lequel* $G \times L \cong H \times L$.
6. $\hat{G} \cong \hat{H}$.
7. *G et H sont élémentairement équivalents.*

Démonstration. L'équivalence des propriétés 1., 2., 3., 4., 5., 6. résulte des théorèmes 1.2 et 2.1 de [W1].

7. $\Rightarrow$ 6. découle de la remarque qui suit le Corollaire 3.4.

Afin de prouver 6. $\Rightarrow$ 7., on établit que, pour tout ultrafiltre $\aleph_1$-incomplet u sur $\mathbf{N}$, $G^u \cong H^u$.

On peut, évidemment, supposer que G et H sont infinis.

Compte tenu du Théorème 5.3, il nous suffit de démontrer que $\hat{G} \cong \hat{H}$ et $E_{G^u} \cong E_{H^u}$.

$\hat{G} \cong \hat{H}$ est vrai par hypothèse.

D'après la Proposition 5.4, les groupes E_{G^u} et E_{H^u} sont munis naturellement de structures d'espaces vectoriels sur $\mathbf{Q}$.

Nous devons montrer que ces espaces vectoriels ont même dimension. Or, la dimension d'un espace vectoriel non dénombrable sur $\mathbf{Q}$ est égale à son cardinal.

Il suffit donc de démontrer que E_{G^u} et E_{H^u} ont même cardinal non dénombrable:

LEMME 5.5.1. *E_{G^u} et E_{H^u} ont même cardinal que $\mathbf{N}^u$. Ce cardinal est égal à* $2^{\aleph_0}$.

Démonstration. (pour E_{G^u}) E_{G^u} est contenu dans G^u qui est équipotent à $\mathbf{N}^u$ puisque G est dénombrable.

Il reste à définir une injection de $\mathbf{N}^u$ dans E_{G^u}. Pour cela, on se donne un élément x de $G\text{-}t(G)$, et on associe à chaque suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ la suite $(x^{a_n \cdot n!})_{n\in\mathbf{N}}$ dans $G^{\mathbf{N}}$. L'injection de $\mathbf{N}^u$ dans E_{G^u} est obtenue par passage au quotient.

COROLLAIRE 5.6. *Les exemples de groupes de type fini ayant les mêmes images finies considérés dans* [Ba] (*page* 249), [Br], [D] (*page* 146) *et* [M] *sont des exemples de groupes élémentairement équivalents.*

BIBLIOGRAPHIE

[Ba] BAUMSLAG, G., *Residually finite groups with the same finite images*, Compositio Math. *29* (1974), 249–252.

[Br] BRIGHAM, R. C., *On the isomorphism problem for just-infinite groups*, Comm. pure and applied Math. XXIV, (1971), 789–796.

[CK] CHANG, C. C. and H. J. KEISLER, *Model theory*, Studies in Logic 73, North-Holland Publishing Company (1973).

[D] DYER, L. L., *On the isomorphism problem for polycyclic groups*, Math. Zeitschr. *112* (1969), 145–153.

[GS] GRUNEWALD, FRITZ J. and RUDOLF SCHARLAU, *A note on finitely generated torsion-free nilpotent groups of class* 2, Journal of Algebra *58* (1979), 162–175.

[GPS] GRUNEWALD, F. J., P. F. PICKEL and D. SEGAL, *Polycyclic groups with isomorphic finite quotients*, Annals of Math. *111* (1980), 155–195.

[H1] HIRSHON, RONALD, *The cancellation of an infinite group in direct products*, Arch. Math. *26* (1975), 134–138.

[H2] HIRSHON, RONALD, *Some cancellation theorems with applications to nilpotent groups*, J. Austral. Math. Soc. 23, series A, (1977), 147–165.

[H3] HIRSHON, RONALD, *The equivalence of* $\times{}^t C \cong \times{}^t D$ *and* $J \times C \cong J \times D$, Trans. Amer. Math. Soc. *249* (1979), 331–340.

[K] KAPLANSKY, I., *Infinite Abelian groups*, University of Michigan Press (1969).

[M] MISLIN, GUIDO, *Nilpotent groups with finite commutator subgroups*, in Lecture Notes in Math. 418, Springer-Verlag (1974), 103–120.

[Ma] MAL'CEV, A. I., *Homomorphisms onto finite groups* (*en russe*), Ivanov. Gos. Ped, Inst. Ucĕn. Zap. *18* (1958), 49–60.

[O1] OGER, F., *Equivalence élémentaire et genre des groupes finis-par-abéliens de type fini*, C.R. Acad. Sci. Paris 293, Ser. I, 1–4, (1981).

[O2] OGER, F., *Des groupes nilpotents de classe* 2 *sans torsion de type fini ayant les mêmes images finies peuvent ne pas être élémentairement équivalents*, C.R. Acad. Sci. Paris 294, Ser. I, 1–4, (1982).

[P1] PICKEL, P. F., *Finitely generated nilpotent groups with isomorphic finite quotients*, Trans. Am. Math. Soc. *160* (1971), 327–341.

[P2] PICKEL, P. F., *Nilpotent-by-finite groups with isomorphic finite quotients*, Trans. Amer. Math. Soc. *183* (1973), 313–325.

[R] ROBINSON, DEREK, *Finiteness conditions and generalized soluble groups*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 62, Springer-Verlag (1972).

[W] WARFIELD, ROBERT B., JR., *Nilpotent groups*, Lecture Notes in Math. 513, Springer-Verlag (1976).

[W1] WARFIELD, ROBERT B., JR., *Genus and cancellation for groups with finite commutator subgroup*, Journal of Pure and Applied Algebra *6* (1975), 125–132.

[Z] ZIL'BER, B. I., *An example of two elementarily equivalent, but non isomorphic finitely generated metabelian groups*, Algebra I Logika *10* (1971), 309–315.

Département de Mathématiques
Université Paris VII
2, *place Jussieu*
75.005 *paris*
France

Reçu le 19 novembre 81/28 juin 82