Ueber das Spektrum des Laplace-Operators auf kompakten Riemannschen Flächen.

Autor(en): **Huber, Heinz**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **57 (1982)**

PDF erstellt am: **26.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-43903

Comment. Math. Helvetici **57** (1982) 627–647
0010–2571/82/004627-21$01.50+0.20/0

Ueber das Spektrum des Laplace-Operators auf kompakten Riemannschen Flächen

HEINZ HUBER

1. Einleitung

Wir betrachten kompakte Riemannsche Flächen $\mathcal{F}$ vom Geschlecht $g(\mathcal{F}) \geq 2$, versehen mit ihrer Poincaré-Metrik konstanter Krümmung -1. Es sei $A(t, \mathcal{F})$ die Anzahl der Eigenwerte $\leq t$ des zugehörigen Laplace-Operators $-\Delta_{\mathcal{F}}$. Nach H. Weyl gilt

$$A(t, \mathcal{F})/g(\mathcal{F}) - 1 \sim t \quad \text{für} \quad t \to +\infty.$$

Wir interessieren uns für das Verhalten dieses Quotienten, wenn die Länge $l(\mathcal{F})$ der kürzesten geschlossenen Geodätischen auf $\mathcal{F}$ sehr gross wird. Wegen der negativen Krümmung ist es nicht selbstverständlich, dass es Flächen mit beliebig grosser Länge $l(\mathcal{F})$ gibt. Solche Flächen können aber konstruiert werden als Quotienten der Poincaréschen Halbebene nach gewissen arithmetisch definierten nichteuklidischen Bewegungsgruppen [4]. P. Buser [1] hat sogar gezeigt, dass es Flächen mit beliebig vorgegebener Länge $l(\mathcal{F})$ und vorgeschriebenem Geschlecht $g(\mathcal{F}) > \exp(l^2/4)$ gibt.

In der vorliegenden Arbeit soll nun das folgende Theorem bewiesen werden: Für jede Folge $\{\mathcal{F}_k\}_1^\infty$ mit $l(\mathcal{F}_k) \to \infty$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} A(t, \mathcal{F}_k)/g(\mathcal{F}_k) - 1 = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ F(t) & \text{für} \quad t \geq \frac{1}{4}, \end{cases}$$

$$F(t) = t - \tfrac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} \int_0^{a(t)} \frac{ye^{-y}}{1+e^{-y}}\, dy, \qquad a(t) = 2\pi(t - \tfrac{1}{4})^{1/2}.$$

(Das Integral strebt für $t \to \infty$ gegen $\pi^2/12$).

Wir werden sogar etwas mehr beweisen: Definieren wir für $\mu > 0$, $t \geq 0$

$$q(\mu, t) = \inf_{\mathcal{F}} \{A(t, \mathcal{F})/g(\mathcal{F}) - 1 \mid l(\mathcal{F}) \geq \mu\}$$

$$Q(\mu, t) = \sup_{\mathcal{F}} \{A(t, \mathcal{F})/g(\mathcal{F}) - 1 \mid l(\mathcal{F}) \geq \mu\},$$

so gilt *gleichmässig* in jedem kompakten Intervall

$$\lim_{\mu\to\infty} q(\mu, t) = \lim_{\mu\to\infty} Q(\mu, t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ F(t) & \text{für} \quad t > \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Dies folgt für das Intervall $[0, \frac{1}{4}]$ aus der Abschätzung

$$A(\tfrac{1}{4}, \mathcal{F})/g(\mathcal{F}) - 1 \leq \tfrac{3}{8}\pi^2(\log \operatorname{Cos} l(\mathcal{F})/4)^{-3},$$

welche in [4] hergeleitet wurde.[1] Der Beweis für das Intervall $[\frac{1}{4}, T]$ stützt sich einerseits auf die Selbergsche Spurformel [5], andererseits aber auf das folgende

LEMMA. *Für alle Flächen $\mathcal{F}$ mit $l(\mathcal{F}) \geq \mu > 0$ gilt*

$$s\int_0^\infty A(\lambda, \mathcal{F})e^{-s\lambda}\, d\lambda \leq 3(g(\mathcal{F})-1)\left\{\frac{1}{s} + \operatorname{Sin}^{-2} \mu/4\right\}, \qquad s > 0.$$

Schliesslich möchte der Verfasser dankbar die Anregung erwähnen, die ihm aus dem Studium einer Arbeit von G. H. Hardy und J. E. Littlewood [2] erwachsen ist.

2. Beweis des Lemmas

1. *Es sei* $l(\mathcal{F}) \geq \mu > 0$ und

$$\lambda_0 = 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$$

die Folge aller Eigenwerte von $-\Delta_{\mathcal{F}}$, wobei jeder Eigenwert seiner Multiplizität entsprechend oft auftrete. Dann gilt für jede im Intervall $[1, \operatorname{Cos} \mu/2]$ quadratisch integrierbare Funktion f:

$$2(g(\mathcal{F})-1)\int_1^{\operatorname{Cos} \mu/2} f^2(t)\, dt = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\int_1^{\operatorname{Cos} \mu/2} f(t) F_{\lambda_j}(t)\, dt\right)^2 \tag{1}$$

Dabei ist F_λ eine Legendre-Funktion:

$$F_\lambda(t) = P_\nu(t), \qquad \nu(\nu+1) = -\lambda \leq 0, \qquad t \geq 1.$$

[1] Die hyperbolischen Funktionen werden im folgenden mit Cos, Sin, Tg bezeichnet.

2. *Beweis.* Wir versehen den Einheitskreis $E=\{z\in\mathbf{C}\mid |z|<1\}$ mit der hyperbolischen Metrik

$$ds=2\frac{|dz|}{1-|z|^2}, \tag{2}$$

welche die Krümmung -1 besitzt, und bezeichnen mit $\rho(z, w)$ die hyperbolische Distanz der Punkte $z, w\in E$. Führen wir geodätische Polarkoordinaten

$$\rho=\rho(z, 0), \qquad \vartheta=\arg z$$

ein, so wird $ds^2=d\rho^2+\mathrm{Sin}^2\,\rho\, d\rho^2$. Somit ist

$$d\omega=\mathrm{Sin}\,\rho\, d\rho\, d\vartheta \tag{3}$$

das Flächenelement dieser Metrik.

Wegen $g(\mathcal{F})\geqslant 2$ gibt es eine konforme Ueberlagerungsabbildung $\gamma: E\to\mathcal{F}$, welche den Nullpunkt in einen beliebig vorgegebenen Punkt $q\in\mathcal{F}$ überführt:

$$\gamma(0)=q. \tag{4}$$

Da jede Decktransformation von γ eine Isometrie der Differentialgeometrie (2) ist, können wir diese Geometrie mit γ von E auf $\mathcal{F}$ verpflanzen und erhalten so die Poincaré-Metrik von $\mathcal{F}$, i.e. die einzige Metrik konstanter Krümmung -1, welche mit der konformen Struktur von $\mathcal{F}$ verträglich ist. Wir bezeichnen ihr Flächenelement mit $d\omega_{\mathcal{F}}$ und ihren Laplaceoperator mit $\Delta_{\mathcal{F}}$.

Die Ueberlagerungsabbildung γ ist injektiv auf

$$K=\{z\in E\mid \rho(z, 0)<\mu/2\}$$

(Siehe z.B. [4] 3.2). Daher wird durch

$$\begin{aligned} h(\gamma(z))&=f(\mathrm{Cos}\,\rho(z, 0)), \qquad z\in K\\ h&=0 \quad \text{auf} \quad \mathcal{F}-\gamma(K)\end{aligned}$$

eine auf ganz $\mathcal{F}$ eindeutige Funktion h definiert. Wegen (3) wird

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{F}} h^2\, d\omega_{\mathcal{F}}&=\int_{\gamma(K)} h^2\, d\omega_{\mathcal{F}}=\int_K f^2(\mathrm{Cos}\,\rho(z, 0))\, d\omega\\ &=2\pi\int_0^{\mu/2} f^2(\mathrm{Cos}\,\rho)\,\mathrm{Sin}\,\rho\, d\rho=2\pi\int_1^{\mathrm{Cos}\,\mu/2} f^2(t)\, dt.\end{aligned} \tag{5}$$

Nun sei $\{\varphi_j\}_0^\infty$ ein zur Eigenwertfolge $\{\lambda_j\}_0^\infty$ gehöriges orthonormalsystem reeller Eigenfunktionen: $\Delta_{\mathcal{F}}\varphi_j + \lambda_j\varphi_j = 0$. Setzen wir

$$\varphi_j(\gamma(z)) = \Phi_j(\rho, \vartheta), \qquad \rho = \rho(z; 0) \qquad \vartheta = \arg z,$$

so wird wegen (4) nach [4] 3.3

$$\int_0^{2\pi} \Phi_j(\rho, \vartheta)\, d\vartheta = 2\pi\varphi_j(q) F_{\lambda_j}(\operatorname{Cos} \rho).$$

Somit wird

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{F}} h\varphi_j\, d\omega_{\mathcal{F}} &= \int_{\gamma(K)} h\varphi_j\, d\omega_{\mathcal{F}} = \int_K h(\gamma(z))\varphi_j(\gamma(z))\, d\omega \\ &= 2\pi\varphi_j(q)\int_0^{\mu/2} f(\operatorname{Cos} \rho) F_{\lambda_j}(\operatorname{Cos} \rho) \operatorname{Sin} \rho\, d\rho \\ &= 2\pi\varphi_j(q)\int_1^{\operatorname{Cos} \mu/2} f(t) F_{\lambda_j}(t)\, dt. \qquad (6)\end{aligned}$$

Da das Orthonormalsystem $\{\varphi_j\}$ vollständig ist, folgt aus (5), (6) nach der Besselschen Gleichung

$$\frac{1}{2\pi}\int_1^{\operatorname{Cos} \mu/2} f^2(t)\, dt = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j^2(q)\left(\int_1^{\operatorname{Cos} \mu/2} f(t) F_{\lambda_j}(t)\, dt\right)^2.$$

Das gilt für alle $q \in \mathcal{F}$. Daraus ergibt sich die Behauptung (1) durch Integration über $\mathcal{F}$, wenn noch berücksichtigt wird, dass nach dem Theorem von Gauss–Bonnet

$$\int_{\mathcal{F}} d\omega_{\mathcal{F}} = 4\pi(g(\mathcal{F}) - 1).$$

3. Es sei jetzt $\tau \geqslant \operatorname{Sin}^{-2} \mu/4$, also $1 + 2/\tau \leqslant \operatorname{Cos} \mu/2$. Wir betrachten die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} F_\tau(t) & \text{für} \quad 1 \leqslant t < 1 + 2/\tau \\ 0 & \text{für} \quad 1 + 2/\tau \leqslant t \leqslant \operatorname{Cos} \mu/2 \end{cases}$$

Dann folgt aus (1)

$$2(g(\mathcal{F})-1)\int_1^{1+2/\tau} F_\tau^2(t)\,dt = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\int_1^{1+2/\tau} F_\tau(t)F_{\lambda_j}(t)\,dt\right)^2$$
$$\geqslant \sum_{\lambda_j \leqslant \tau}\left(\int_1^{1+2/\tau} F_\tau(t)F_{\lambda_j}(t)\,dt\right)^2. \tag{7}$$

Nach [3] pag. 258–259 gilt

$$F_\tau(t) \geqslant 1-\frac{\tau}{2}(t-1) \geqslant 0 \quad \text{in} \quad [1, 1+2/\tau]. \tag{8}$$

Daraus folgt nach [4] Lemma 4 pag. 221

$$F_\lambda(t) \geqslant F_\tau(t) \geqslant 0 \quad \text{in} \quad [1, 1+2/\tau] \quad \text{für} \quad \lambda \leqslant \tau.$$

Somit wird

$$\int_1^{1+2/\tau} F_\tau(t)F_{\lambda_j}(t)\,dt \geqslant \int_1^{1+2/\tau} F_\tau^2(t)\,dt \quad \text{für} \quad \lambda_j \leqslant \tau$$

und es ergibt sich aus (7)

$$2(g(\mathcal{F})-1) \geqslant A(\tau, \mathcal{F}) \int_1^{1+2/\tau} F_\tau^2(t)\,dt. \tag{9}$$

Aus (8) folgt aber

$$\int_1^{1+2/\tau} F_\tau^2(t)\,dt \geqslant \int_1^{1+2/\tau}\left(l-\frac{\tau}{2}(t-1)\right)^2 dt = 2/3\tau.$$

Somit ergibt sich aus (9)

$$A(\tau, \mathcal{F}) \leqslant 3(g(\mathcal{F})-1)\tau \quad \text{für} \quad \tau \geqslant b = \operatorname{Sin}^{-2}\mu/4.$$

Daraus folgt nun für $s>0$:

$$\int_0^{\infty} A(\tau, \mathcal{F})e^{-s\tau}\,d\tau \leqslant 3(g-1)b\int_0^b e^{-s\tau}\,d\tau + 3(g-1)\int_b^{\infty} \tau e^{-s\tau}\,d\tau$$
$$= 3(g-1)\left(\frac{b}{s}+\frac{1}{s^2}e^{-bs}\right) \leqslant 3(g-1)\left(\frac{b}{s}+\frac{1}{s^2}\right).$$

Damit ist unser Lemma bewiesen.

3. "Kleine" Hilfssätze

1. Das Polynom

$$P_n(u) = u^n(1-u)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} u^{n+k}, \qquad n \geq 1, \tag{1}$$

ist monoton wachsend in $[0, \frac{1}{2}]$ und fallend in $[\frac{1}{2}, 1]$. Das Polynom

$$Q_n(u) = \int_0^u P_n(v)\, dv = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{u^{n+k+1}}{n+k+1} \tag{2}$$

ist monoton wachsend in $[0, 1]$ und es gilt

$$Q_n(1) = Q_n(u) + Q_n(1-u), \tag{3}$$

also insbesondere

$$Q_n(\tfrac{1}{2}) = Q_n(1)/2. \tag{4}$$

$Q_n(1)$ ist ein Eulersches Beta-Integral:

$$Q_n(1) = B(n+1, n+1) = \Gamma(n+1)\Gamma(n+1)/\Gamma(2(n+1)). \tag{5}$$

Daraus folgt wegen

$$\Gamma(2(n+1)) = 2^{2n+1}\Gamma(n+1)\Gamma(n+\tfrac{3}{2})/\Gamma(\tfrac{1}{2})$$

$$Q_n(1) = 2^{-2n-1}\Gamma(n+1)\Gamma(\tfrac{1}{2})/\Gamma(n+\tfrac{3}{2}) = 2^{-2n-1}B(n+1, \tfrac{1}{2}). \tag{6}$$

Nun ist

$$B(n+1, \tfrac{1}{2}) = \int_0^1 t^n(1-t)^{-1/2}\, dt = 2\int_0^1 (1-u^2)^n\, du \geq 2\int_0^1 (1-u)^n\, du = 2/n+1.$$

Daher folgt aus (4) und (6)

$$1/Q_n(\tfrac{1}{2}) \leq 2(n+1)2^{2n}. \tag{7}$$

2. Das Polynom

$$T_n(u)=\int_0^u Q_n(v)\,dv/v=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{u^{n+k+1}}{(n+k+1)^2} \tag{8}$$

wächst monoton in [0, 1] und es gilt

$$T_n(u)=R_n(u)-Q_n(u)\log u^{-1} \tag{9}$$

$$R_n(u)=\int_0^u P_n(v)\log v^{-1}\,dv. \tag{10}$$

$R_n(u)$ ist wieder monoton wachsend in [0, 1]. Wir zeigen:

$$\alpha_n=R_n(1)/Q_n(1)\log 2\to 1 \quad \text{für} \quad n\to\infty. \tag{11}$$

In der Tat: Für $0<\eta<\frac{1}{2}$ gilt

$$\begin{aligned}\alpha_n Q_n(1)\log 2&=\int_0^\eta P_n(v)\log v^{-1}\,dv+\int_\eta^1 P_n(v)\log v^{-1}\,dv\\&\leq \eta^n(1-\eta)^n\int_0^1\log v^{-1}\,dv+\log\eta^{-1}\int_\eta^1 P_n(v)\,dv\\&\leq \eta^n(1-\eta)^n+Q_n(1)\log\eta^{-1}\end{aligned}$$

und somit wegen (4), (7)

$$\begin{aligned}\alpha_n&\leq \eta^n(1-\eta)^n/Q_n(1)\log 2+\log\eta^{-1}/\log 2\\&\leq (n+1)(4\eta(1-\eta))^n/\log 2+\log\eta^{-1}/\log 2.\end{aligned}$$

Wegen $4\eta(1-\eta)<1$ folgt daraus

$$\limsup_{n\to\infty}\alpha_n\leq\log\eta^{-1}/\log 2.$$

Daraus ergibt sich für $\eta\to\frac{1}{2}$:

$$\limsup_{n\to\infty}\alpha_n\leq 1. \tag{12}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}(\alpha_n-1)&Q_n(1)\log 2\\&=\int_0^{1/2}P_n(v)\log v^{-1}\,dv+\int_0^{1/2}P_n(v)\log(1-v)^{-1}\,dv-\log 4\int_0^{1/2}P_n(v)\,dv\\&=\int_0^{1/2}P_n(v)\log(4v(1-v))^{-1}\,dv\end{aligned}$$

und daher $\alpha_n>1$. Somit folgt aus (12) die Behauptung (11).

3. Wir definieren

$$c_n(\eta)=R_n(1)/Q_n(\eta)\log 2 \tag{13}$$

und zeigen:

$$\lim_{n\to\infty}c_n(\eta)=1 \quad \text{für} \quad \tfrac{1}{2}<\eta<1. \tag{14}$$

In der Tat: Wegen (11) und (3) gilt

$$c_n(\eta)=\alpha_nQ_n(1)/Q_n(\eta)=\alpha_n(1+Q_n(1-\eta)/Q_n(\eta)) \tag{15}$$

Nun ist aber wegen $\frac{1}{2}<\eta<1$ und (7)

$$0<Q_n(1-\eta)/Q_n(\eta)\le\tfrac{1}{2}\eta^n(1-\eta)^n/Q_n(\tfrac{1}{2})\le(n+1)(4\eta(1-\eta))^n.$$

Daraus und aus (11), (15) folgt aber die Behauptung (14).

4. Nun zeigen wir:

$$c_n(\eta)\le 6/\log 2 \quad \text{für} \quad \tfrac{1}{2}<\eta<1, \qquad n\ge 1. \tag{16}$$

In der Tat: Für $0\le u\le 1$ gilt

$$Q_n(u)=\int_0^u v^n(1-v)^n\,dv\le u\int_0^1 v^{n-1}(1-v)^n\,dv=uB(n,n+1)$$

Somit ist wegen (8), (9)

$$R_n(1)=\int_0^1 Q_n(u)\,du/u\le B(n,n+1).$$

Daher folgt aus (13) und (4), (5)

$$c_n(\eta) \leq B(n, n+1)/Q_n(\tfrac{1}{2}) \log 2 = 2B(n, n+1)/B(n+1, n+1) \log 2$$
$$= 2\left(2+\frac{1}{n}\right)\Big/\log 2 \leq 6/\log 2.$$

5. Wir definieren

$$F(t) = t - \tfrac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2}\int_0^{a(t)} \frac{ye^{-y}}{1+e^{-y}}\,dy, \qquad a(t) = 2\pi(t-\tfrac{1}{4})^{1/2} \tag{17}$$

und zeigen

$$\pi\int_0^{(t-1/4)^{1/2}} \frac{r^2+\frac{1}{4}}{\mathrm{Cos}^2\,\pi r}\,dr = t\,\mathrm{Tg}\,\pi(t-\tfrac{1}{4})^{1/2} - F(t) \tag{18}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{r^2+\frac{1}{4}}{\mathrm{Cos}^2\,\pi r}\,dr = \frac{1}{3\pi} \tag{19}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{ye^{-y}}{1+e^{-y}}\,dy = \pi^2/12. \tag{20}$$

Beweis. Setzen wir

$$J(\rho) = \int_0^{\rho} x^2\,dx/\mathrm{Cos}^2\,x, \tag{21}$$

so wird

$$\pi\int_0^{(t-1/4)^{1/2}} \frac{r^2+\frac{1}{4}}{\mathrm{Cos}^2\,\pi r}\,dr = \frac{1}{\pi^2} J(\pi(t-\tfrac{1}{4})^{1/2}) + \tfrac{1}{4}\mathrm{Tg}\,\pi(t-\tfrac{1}{4})^{1/2}. \tag{22}$$

Aus (21) ergibt sich durch zweimalige partielle Integration

$$J(\rho) = \rho^2\,\mathrm{Tg}\,\rho - 2\rho \log \mathrm{Cos}\,\rho + 2\int_0^{\rho} \log \mathrm{Cos}\,x\,dx. \tag{23}$$

Wegen

$$2 \log \mathrm{Cos}\,x = 2x - 2\log 2 + 2\log(1+e^{-2x}) \tag{24}$$

wird

$$2\int_0^\rho \log \operatorname{Cos} x\, dx = \rho^2 - 2\rho \log 2 + \int_0^{2\rho} \log(1+e^{-y})\, dy. \tag{25}$$

Aus (23)–(25) ergibt sich

$$J(\rho) = \rho^2 Tg\rho - \rho^2 - 2\rho \log(1+e^{-2\rho}) + \int_0^{2\rho} \log(1+e^{-y})\, dy.$$

Daraus folgt durch partielle Integration:

$$J(\rho) = \rho^2 Tg\rho - \rho^2 + \int_0^{2\rho} \frac{ye^{-y}}{1+e^{-y}}\, dy. \tag{26}$$

Nun folgt die Behauptung (18) aus (22) und (26). Daraus ergibt sich ferner

$$\pi \int_0^\infty \frac{r^2+\frac{1}{4}}{\operatorname{Cos}^2 \pi r}\, dr = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{ye^{-y}}{1+e^{-y}}\, dy + \tfrac{1}{4}$$

Nun ist aber

$$\int_0^\infty \frac{ye^{-y}}{1+e^{-y}}\, dy = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \int_0^\infty ye^{-(k+1)y}\, dy = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} = \pi^2/12.$$

Somit sind auch (19) und (20) bewiesen.

4. "Grosse" Hilfssätze

SATZ 1. *Es sei*

$$t \geq \tfrac{1}{4}, \qquad 0 < \eta < 1, \qquad \xi = \xi(r) = \exp(-(r^2+\tfrac{1}{4})t^{-1} \log \eta^{-1}).$$

Dann gilt für alle Flächen $\mathscr{F}$ mit $l(\mathscr{F}) \geq \mu > 0$:

$$(g(\mathscr{F})-1)^{-1} \int_0^1 A(t \log v^{-1}/\log \eta^{-1}, \mathscr{F}) P_n(v)\, dv$$
$$= \frac{\pi t}{\log \eta^{-1}} \int_0^\infty T_n(\xi) \operatorname{Cos}^{-2} \pi r\, dr + Q_n(\tfrac{1}{2}) G_n$$

mit

$$|G_n| \leq \frac{\alpha}{\mu^2} \frac{2^{3n}}{\eta^{2n+1}}, \qquad (\alpha = 160).$$

Beweis. Der Beweis stützt sich auf die Selbergsche Spurformel (3.2) in [5]. Wählt man in jener Formel

$$h(r) = \exp(-sr^2), \qquad s > 0,$$

so ergibt sich für $s > 0$:

$$2e^{s/4} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-s\lambda_k} = \frac{2\pi}{s}(g(\mathcal{F}) - 1) \int_0^{\infty} e^{-sr^2} \operatorname{Cos}^{-2} \pi r\, dr + D(s)/2\pi^{1/2} s^{1/2} \tag{1}$$

mit

$$D(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} l_i \operatorname{Sin}^{-1}(kl_i/2) \exp(-k^2 l_i^2/4s). \tag{2}$$

Dabei sind die l_i die Längen der primitiven geschlossenen Geodätischen auf $\mathcal{F}$. Wegen $l_i \geq l(\mathcal{F}) \geq \mu$ wird

$$\exp(-k^2 l_i^2/4s) \leq \exp(-\mu^2/8s) \exp(-k^2 l_i^2/8s), \qquad k \geq 1, \qquad s > 0.$$

Daher folgt aus (2)

$$D(s) \leq \exp(-\mu^2/8s) D(2s), \qquad s > 0. \tag{3}$$

Wegen

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-s\lambda_k} = s \int_0^{\infty} A(\lambda, \mathcal{F}) e^{-s\lambda}\, d\lambda$$

können wir die Spurformel (1) in der folgenden Gestalt schreiben:

$$(g(\mathcal{F}) - 1)^{-1} \int_0^{\infty} A(\lambda, \mathcal{F}) e^{-s\lambda}\, d\lambda = \frac{\pi}{s^2} \int_0^{\infty} \exp(-(r^2 + \tfrac{1}{4})s) \operatorname{Cos}^{-2} \pi r\, dr + E(s) \tag{4}$$

$$E(s) = s^{-3/2} e^{-s/4} D(s)/4\pi^{1/2}(g-1). \tag{5}$$

Daraus folgt zunächst

$$0<E(s)<(g-1)^{-1}\int_0^\infty A(\lambda)e^{-s\lambda}\,d\lambda$$

und somit nach unserem Lemma:

$$E(s)\leq\frac{3}{s}\left(b+\frac{1}{s}\right),\qquad b=\operatorname{Sin}^{-2}\mu/4.$$

Daraus folgt nach (5):

$$D(s)/4\pi^{1/2}(g-1)\leq 3s^{1/2}\left(b+\frac{1}{s}\right)e^{s/4}$$

Somit folgt aus (3)

$$D(s)/4\pi^{1/2}(g-1)\leq 3\sqrt{2}\,s^{1/2}\left(b+\frac{1}{2s}\right)e^{s/2}\exp(-\mu^2/8s).$$

Daher ergibt sich wieder aus (5):

$$E(s)\leq 3\sqrt{2}\,s^{-1}e^{s/4}\left(b+\frac{1}{2s}\right)\exp(-\mu^2/8s). \tag{6}$$

Nun ist aber

$$\left(b+\frac{1}{2s}\right)\exp(-\mu^2/8s)\leq b+\operatorname*{Max}_{s>0}\frac{1}{2s}\exp(-\mu^2/8s)=b+4e^{-1}\mu^{-2}$$
$$=\left(16\left(\frac{\mu/4}{\operatorname{Sin}\mu/4}\right)^2+4e^{-1}\right)\mu^{-2}\leq(16+4e^{-1})\mu^{-2}.$$

Somit folgt aus (6):

$$E(s)\leq\frac{\alpha}{2s\mu^2}e^{s/4},\qquad(\alpha=160). \tag{7}$$

Aus (4) und 3.(1), 3.(8) ergibt sich

$$(g-1)^{-1}\int_0^\infty A(\lambda)P_n(e^{-s\lambda})e^{-s\lambda}\,d\lambda=\sum_{k=0}^n(-1)^k\binom{n}{k}(g-1)^{-1}\int_0^\infty A(\lambda)e^{-(n+k+1)s\lambda}\,d\lambda$$
$$=\sum_{k=0}^n(-1)^k\binom{n}{k}\left(\frac{\pi}{(n+k+1)^2s^2}\int_0^\infty \exp\left(-(r^2+\tfrac14)(n+k+1)s\right)\operatorname{Cos}^{-2}\pi r\,dr\right.$$
$$\left.+E((n+k+1)s)\right)$$
$$=\frac{\pi}{s^2}\int_0^\infty T_n(\exp(-(r^2+\tfrac14)s)\operatorname{Cos}^{-2}\pi r\,dr+\sum_{k=0}^n(-1)^k\binom{n}{k}E((n+k+1)s).$$

Machen wir im ersten Integral die Variabelnsubstitution $v=e^{-s\lambda}$, so ergibt sich

$$(g-1)^{-1}\int_0^1 A(s^{-1}\log v^{-1})P_n(v)\,dv$$
$$=\frac{\pi}{s}\int_0^\infty T_n(\exp(-(r^2+\tfrac14)s)\operatorname{Cos}^{-2}\pi r\,dr+Q_n(\tfrac12)G_n \tag{8}$$

mit

$$G_n=sQ_n^{-1}(\tfrac12)\sum_{k=0}^n(-1)^k\binom{n}{k}E((n+k+1)s).$$

Wegen 3.(7) und $E>0$ folgt daraus

$$|G_n|\leq 2s(n+1)2^{2n}\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}E((n+k+1)s). \tag{9}$$

Nach (7) gilt aber

$$E((n+k+1)s)\leq\frac{\alpha}{2(n+k+1)s\mu^2}e^{(n+k+1)s/4}\leq\frac{\alpha}{2(n+1)s\mu^2}e^{(2n+1)s/4}.$$

Somit folgt aus (9)

$$|G_n|\leq\frac{\alpha}{\mu^2}2^{3n}e^{(2n+1)s/4}. \tag{10}$$

Nun folgt Satz 1 aus (8) und (10) für

$$s=t^{-1}\log\eta^{-1}\leq 4\log\eta^{-1}.$$

SATZ 2. *Für* $\frac{1}{2}<\eta<1$, $t\geq\frac{1}{4}$ *gilt*

$$\frac{\pi t}{\log \eta^{-1}}\int_0^\infty \frac{T_n(\xi)}{Q_n(\eta)}\operatorname{Cos}^{-2}\pi r\,dr$$
$$\leq F(t)+S(\eta,t)+t(c_n(\eta)-1)+\frac{2t}{\log \eta^{-1}}(n+1)(4\eta(1-\eta))^n.$$

Dabei ist $S(\eta, t)$ *stetig in* $[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]\times[\frac{1}{4},\infty)$ *und* $S(\frac{1}{2},t)=0$ *für* $t\geq\frac{1}{4}$.

Beweis. Wegen $\xi(r)=\exp(-(r^2+\frac{1}{4})t^{-1}\log\eta^{-1})$ ist nach 3.(9)

$$T_n(\xi)=R_n(\xi)-Q_n(\xi)(r^2+\tfrac{1}{4})t^{-1}\log\eta^{-1}$$

Somit wird

$$\int_0^\infty \frac{T_n(\xi)}{Q_n(\eta)}\operatorname{Cos}^{-2}\pi r\,dt=I_1-I_2t^{-1}\log\eta^{-1} \tag{11}$$

mit

$$I_1=\int_0^\infty \frac{R_n(\xi)}{Q_n(\eta)}\frac{dr}{\operatorname{Cos}^2\pi r}=\int_{\xi(r)<1-\eta}+\int_{\xi(r)\geq 1-\eta}=B_1+B_2. \tag{12}$$

$$I_2=\int_0^\infty \frac{Q_n(\xi)}{Q_n(\eta)}\frac{r^2+\frac{1}{4}}{\operatorname{Cos}^2\pi r}\,dr\geq\int_{\xi(r)\geq\eta}\frac{r^2+\frac{1}{4}}{\operatorname{Cos}^2\pi r}\,dr=\int_0^{(t-1/4)^{1/2}}\frac{r^2+\frac{1}{4}}{\operatorname{Cos}^2\pi r}\,dr. \tag{13}$$

Im Integral B_1 wird

$$\frac{R_n(\xi)}{Q_n(\eta)}\leq\frac{R_n(1-\eta)}{Q_n(\eta)}\leq\frac{\eta^n(1-\eta)^n}{Q_n(\frac{1}{2})}\int_0^1\log v^{-1}\,dv=\frac{\eta^n(1-\eta)^n}{Q_n(\frac{1}{2})}$$
$$\leq 2(n+1)(4\eta(1-\eta))^n$$

(siehe 3.(10) und 3.(7)). Daraus ergibt sich

$$B_1\leq 2(n+1)(4\eta(1-\eta))^n\int_0^\infty\operatorname{Cos}^{-2}\pi r\,dr=\frac{2}{\pi}(n+1)(4\eta(1-\eta))^n. \tag{14}$$

Im Integral B_2 wird

$$\frac{R_n(\xi)}{Q_n(\eta)}\leq\frac{R_n(1)}{Q_n(\eta)}=c_n(\eta)\log 2,$$

(siehe 3.(13)). Somit wird

$$B_2 \leq c_n(\eta)\log 2\int_{\xi(r)\geq 1-\eta} \mathrm{Cos}^{-2}\,\pi r\,dr = c_n(\eta)\log 2\int_0^w \mathrm{Cos}^{-2}\,\pi r\,dr$$

$$= \frac{\log 2}{\pi}\,c_n(\eta)\,\mathrm{Tg}\,\pi w \tag{15}$$

$$w = \left(\frac{\log(1-\eta)^{-1}}{\log\eta^{-1}}\,t - \tfrac{1}{4}\right)^{1/2} > (t-\tfrac{1}{4})^{1/2}. \tag{16}$$

Aus (11)–(15) ergibt sich nun wegen 3.(18)

$$\frac{\pi t}{\log\eta^{-1}}\int_0^\infty \frac{T_n(\xi)}{Q_n(\eta)}\,\mathrm{Cos}^{-2}\,\pi r\,dr$$

$$\leq \frac{\log 2}{\log\eta^{-1}}\,c_n(\eta)\,t\,\mathrm{Tg}\,\pi w - \pi\int_0^{(t-1/4)^{1/2}} \frac{r^2+\frac{1}{4}}{\mathrm{Cos}^2\,\pi r}\,dr + \frac{2t}{\log\eta^{-1}}\,(n+1)(4\eta(1-\eta))^n$$

$$= F(t) + td + \frac{2t}{\log\eta^{-1}}\,(n+1)(4\eta(1-\eta))^n. \tag{17}$$

mit

$$d = \frac{\log 2}{\log\eta^{-1}}\,c_n(\eta)\,\mathrm{Tg}\,\pi w - \mathrm{Tg}\,\pi(t-\tfrac{1}{4})^{1/2}$$

$$= \frac{\log 2}{\log\eta^{-1}}\,c_n(\eta)(\mathrm{Tg}\,\pi w - \mathrm{Tg}\,\pi(t-\tfrac{1}{4})^{1/2}) + \left(\frac{\log 2}{\log\eta^{-1}}\,c_n(\eta) - 1\right)\mathrm{Tg}\,\pi(t-\tfrac{1}{4})^{1/2}$$

$$\leq \frac{\log 2}{\log\eta^{-1}}\,c_n(\eta)(\mathrm{Tg}\,\pi w - \mathrm{Tg}\,\pi(t-\tfrac{1}{4})^{1/2}) + \left(\frac{\log 2}{\log\eta^{-1}} - 1\right)c_n(\eta) + c_n(\eta) - 1.$$

Somit wird wegen 3.(16)

$$d \leq \frac{6}{\log\eta^{-1}}\,(\mathrm{Tg}\,\pi w - \mathrm{Tg}\,\pi(t-\tfrac{1}{4})^{1/2}) + \frac{6}{\log 2}\left(\frac{\log 2}{\log\eta^{-1}} - 1\right) + c_n(\eta) - 1. \tag{18}$$

Definieren wir jetzt

$$S(\eta,t) = \frac{6t}{\log\eta^{-1}}\,(\mathrm{Tg}\,\pi w - \mathrm{Tg}\,\pi(t-\tfrac{1}{4})^{1/2}) + \frac{6t}{\log 2}\left(\frac{\log 2}{\log\eta^{-1}} - 1\right),$$

so folgt aus (17) und (18)

$$\frac{\pi t}{\log \eta^{-1}} \int_0^\infty \frac{T_n(\xi)}{Q_n(\eta)} \operatorname{Cos}^{-2} \pi r\, dr$$
$$\leq F(t) + S(\eta, t) + t(c_n(\eta) - 1) + \frac{2t}{\log \eta^{-1}} (n+1)(4\eta(1-\eta))^n.$$

Wegen (16) ist $S(\eta, t)$ in der Tat stetig in $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \times [\frac{1}{4}, \infty)$ und es gilt $S(\frac{1}{2}, t) = 0$. Damit ist Satz 2 bewiesen.

SATZ 3. *Zu* $\delta > \frac{1}{4}$ *werde* $\eta_0 \in (0, \frac{1}{2})$ *so gewählt, dass*

$$\frac{\log (1-\eta)^{-1}}{\log \eta^{-1}} \delta - \tfrac{1}{4} > 0 \quad \forall \eta \in [\eta_0, \tfrac{1}{2}].$$

Dann gilt für $\eta \in (\eta_0, \frac{1}{2})$ *und* $t \geq \delta$:

$$F(t) \leq \frac{\pi t}{\log \eta^{-1}} \int_0^\infty \frac{T_n(\xi)}{Q_n(1-\eta)} \operatorname{Cos}^{-2} \pi r\, dr + R(\eta, t) + \tfrac{1}{3}(n+1)(4\eta(1-\eta))^n.$$

Dabei ist $R(\eta, t)$ *stetig in* $[\eta_0, \frac{1}{2}] \times [\delta, \infty)$ *und* $R(\frac{1}{2}, t) = 0$ *für* $t \geq \delta$.

Beweis. Wegen $\xi(r) = \exp(-(r^2 + \frac{1}{4})t^{-1} \log \eta^{-1})$ ist nach 3.(9)

$$\int_0^\infty \frac{T_n(\xi)}{Q_n(1-\eta)} \operatorname{Cos}^{-2} \pi r\, dr = I_1 - I_2 t^{-1} \log \eta^{-1} \tag{19}$$

mit

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{R_n(\xi)}{Q_n(1-\eta)} \operatorname{Cos}^{-2} \pi r\, dr \tag{20}$$

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{Q_n(\xi)}{Q_n(1-\eta)} \frac{r^2 + \frac{1}{4}}{\operatorname{Cos}^2 \pi r} dr = \int_{\xi(r)<\eta} + \int_{\xi(r)\geq\eta} = B_1 + B_2. \tag{21}$$

Aus (20) ergibt sich

$$I_1 \geq \int_{\xi(r)\geq 1-\eta} \frac{R_n(\xi)}{Q_n(1-\eta)} \operatorname{Cos}^{-2} \pi r\, dr \geq \frac{R_n(1-\eta)}{Q_n(1-\eta)} \int_{\xi(r)\geq 1-\eta} \operatorname{Cos}^{-2} \pi r\, dr$$
$$= \frac{1}{\pi} \frac{R_n(1-\eta)}{Q_n(1-\eta)} \operatorname{Tg} \pi w \tag{22}$$

$$w = \left(\frac{\log (1-\eta)^{-1}}{\log \eta^{-1}} t - \tfrac{1}{4}\right)^{1/2} \geq \left(\frac{\log (1-\eta)^{-1}}{\log \eta^{-1}} \delta - \tfrac{1}{4}\right)^{1/2} > 0. \tag{23}$$

Nun ist aber

$$R_n(1-\eta)=\int_0^{1-\eta} P_n(v)\log v^{-1}\,dv \geqslant \log(1-\eta)^{-1}\int_0^{1-\eta} P_n(v)\,dv$$
$$= Q_n(1-\eta)\log(1-\eta)^{-1}$$

Somit folgt aus (22)

$$I_1 \geqslant \frac{\log(1-\eta)^{-1}}{\pi}\,Tg\pi w. \tag{24}$$

Im Integral B_1 ist

$$\frac{Q_n(\xi)}{Q_n(1-\eta)} \leqslant \frac{Q_n(\eta)}{Q_n(\frac{1}{2})} \leqslant \frac{\eta^n(1-\eta)^n}{2Q_n(\frac{1}{2})} \leqslant (n+1)(4\eta(1-\eta))^n.$$

Daher wird

$$B_1 \leqslant (n+1)(4\eta(1-\eta))^n \int_{\xi(r)<\eta} \frac{r^2+\frac{1}{4}}{\mathrm{Cos}^2\,\pi r}\,dr$$
$$= (n+1)(4\eta(1-\eta))^n \int_{(t-1/4)^{1/2}}^{\infty} \frac{r^2+\frac{1}{4}}{\mathrm{Cos}^2\,\pi r}\,dr \tag{25}$$

Im Integral B_2 ist wegen 3.(3)

$$\frac{Q_n(\xi)}{Q_n(1-\eta)} \leqslant \frac{Q_n(1)}{Q_n(1-\eta)} = 1+\frac{Q_n(\eta)}{Q_n(1-\eta)} \leqslant 1+\frac{Q_n(\eta)}{Q_n(\frac{1}{2})} \leqslant 1+(n+1)(4\eta(1-\eta))^n$$

Somit wird

$$B_2 \leqslant (1+(n+1)(4\eta(1-\eta))^n)\int_0^{(t-1/4)^{1/2}} \frac{r^2+\frac{1}{4}}{\mathrm{Cos}^2\,\pi r}\,dr. \tag{26}$$

Aus (21), (25) und (26) ergibt sich wegen 3.(19):

$$I_2 \leqslant \int_0^{(t-1/4)^{1/2}} \frac{r^2+\frac{1}{4}}{\mathrm{Cos}^2\,\pi r}\,dr + \frac{1}{3\pi}(n+1)(4\eta(1-\eta))^n \tag{27}$$

Aus (19), (24) und (27) ergibt sich wegen 3.(18):

$$\begin{aligned}&\frac{\pi t}{\log \eta^{-1}}\int_0^\infty \frac{T_n(\xi)}{Q_n(1-\eta)}\operatorname{Cos}^{-2}\pi r\,dr\\ &\geqslant \frac{\log(1-\eta)^{-1}}{\log \eta^{-1}}\,t\operatorname{Tg}\pi w-\pi\int_0^{(t-1/4)^{1/2}}\frac{r^2+\frac14}{\operatorname{Cos}^2\pi r}\,dr-\tfrac13(n+1)(4\eta(1-\eta))^n\\ &=F(t)-R(\eta,t)-\tfrac13(n+1)(4\eta(1-\eta))^n \qquad (28)\end{aligned}$$

mit

$$R(\eta,t)=t\left(\operatorname{Tg}\pi(t-\tfrac14)^{1/2}-\frac{\log(1-\eta)^{-1}}{\log\eta^{-1}}\operatorname{Tg}\pi w\right).$$

Wegen (23) ist $R(\eta, t)$ stetig in $[\eta_0, \frac12]\times[\delta,\infty)$ und es gilt $R(\frac12, t)=0$ für $t\geqslant\delta$. Daher ist mit (28) Satz 3 bewiesen.

5. Beweis des Theorems

1. Wir zeigen: Zu $\varepsilon>0$, $T>\frac14$ gibt es ein $\mu_1(\varepsilon, T)>0$ derart, dass

$$A(t,\mathscr{F})/g(\mathscr{F})-1<F(t)+\varepsilon$$

sobald $l(\mathscr{F})>\mu_1$ und $t\in[\frac14, T]$.

2. *Beweis.* Es sei

$$l(\mathscr{F})\geqslant\mu>0, \qquad \tfrac12<\eta<1, \qquad t\geqslant\tfrac14. \qquad (1)$$

Wegen

$$\int_0^1 A(t\log v^{-1}/\log\eta^{-1})P_n(v)\,dv\geqslant\int_0^\eta\geqslant A(t)\int_0^\eta P_n(v)\,dv=A(t)Q_n(\eta)$$

folgt aus Satz 1:

$$A(t)/g-1\leqslant\frac{\pi t}{\log\eta^{-1}}\int_0^\infty\frac{T_n(\xi)}{Q_n(\eta)}\operatorname{Cos}^{-2}\pi r\,dr+\frac{\alpha}{\mu^2}\frac{2^{3n}}{\eta^{2n+1}}.$$

Somit folgt aus Satz 2:

$$A(t)/g-1\leq F(t)+S(\eta,t)+t(c_n(\eta)-1)+\frac{2t}{\log \eta^{-1}}(n+1)(4\eta(1-\eta))^n$$
$$+\frac{\alpha}{\mu^2}\frac{2^{3n}}{\eta^{2n+1}}. \tag{2}$$

$S(\eta, t)$ ist gleichmässig stetig in $[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]\times[\frac{1}{4},T]$ und $S(\frac{1}{2},t)=0$. Daher können wir $\eta=\eta(\varepsilon,T)\in(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$ so wählen, dass $S(\eta,t)<\varepsilon/3\ \forall t\in[\frac{1}{4},T]$. Dann folgt aus (2) für $t\in[\frac{1}{4},T]$:

$$A(t)/g-1<F(t)+\varepsilon/3+T(c_n(\eta)-1)+\frac{2T}{\log \eta^{-1}}(n+1)(4\eta(1-\eta))^n+\frac{\alpha}{\mu^2}\frac{2^{3n}}{\eta^{2n+1}}.$$

Wegen $4\eta(1-\eta)<1$ und 3.(14) können wir alsdann $n=n(\eta,T,\varepsilon)$ so wählen, dass

$$T(c_n(\eta)-1)+\frac{2T}{\log \eta^{-1}}(n+1)(4\eta(1-\eta))^n<\varepsilon/3$$

und haben nun

$$A(t,\mathcal{F})/g(\mathcal{F})-1<F(t)+2\varepsilon/3+\frac{\alpha}{\mu^2}\frac{2^{3n}}{\eta^{2n+1}}$$

sobald $l(\mathcal{F})\geq\mu$ und $t\in[\frac{1}{4},T]$. Damit ist 1. bewiesen.

3. Jetzt zeigen wir: Zu $\varepsilon>0$, $T>\frac{1}{4}$ gibt es ein $\mu_2(\varepsilon,T)>0$ derart, dass

$$F(t)<A(t,\mathcal{F})/g(\mathcal{F})-1+\varepsilon \tag{3}$$

soblad $l(\mathcal{F})>\mu_2$ und $t\in[\frac{1}{4},T]$.

4. *Beweis.* Wegen $F(\frac{1}{4})=0$ können wir zunächst $\delta=\delta(\varepsilon)>\frac{1}{4}$ so wählen, dass

$$F(t)<\varepsilon\ \forall t\in[\tfrac{1}{4},\delta].$$

Dann gilt die Ungleichung (3) für $t\in[\frac{1}{4},\delta]$ und alle Flächen $\mathcal{F}$. Es sei nun

$$l(\mathcal{F})\geq\mu>4,\qquad t\geq\delta. \tag{4}$$

$\eta_0 \in (0, \frac{1}{2})$ werde so gewählt, dass

$$\frac{\log(1-\eta)^{-1}}{\log \eta^{-1}} \delta - \tfrac{1}{4} > 0 \quad \forall \eta \in [\eta_0, \tfrac{1}{2}] \tag{5}$$

Für $\eta \in (\eta_0, \frac{1}{2})$ gilt

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 A(t \log v^{-1}/\log \eta^{-1}) P_n(v)\, dv \\
&\quad = \int_0^\eta + \int_\eta^1 \leqslant \eta^n (1-\eta)^n \int_0^1 A(t \log v^{-1}/\log \eta^{-1})\, dv + A(t) \int_\eta^1 P_n(v)\, dv.
\end{aligned} \tag{6}$$

Nach 3.(3) ist aber $\int_\eta^1 P_n(v)\, dv = Q_n(1-\eta)$ und aus unserem Lemma ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_0^1 A(t \log v^{-1}/\log \eta^{-1})\, dv &= t^{-1} \log \eta^{-1} \int_0^\infty A(\lambda) \exp(-\lambda t^{-1} \log \eta^{-1})\, d\lambda \\
&\leqslant 3(g-1)\left(\frac{t}{\log \eta^{-1}} + \operatorname{Sin}^{-2} \mu/4\right) \\
&\leqslant 3(g-1)\left(\frac{t}{\log \eta^{-1}} + 1\right).
\end{aligned}$$

Sommit folgt aus (6):

$$\begin{aligned}
&Q_n^{-1}(1-\eta)(g-1)^{-1} \int_0^1 A(t \log v^{-1}/\log \eta^{-1}) P_n(v)\, dv \\
&\quad \leqslant 3\left(\frac{t}{\log \eta^{-1}} + 1\right) \frac{\eta^n (1-\eta)^n}{Q_n(1-\eta)} + \frac{A(t)}{g-1} \\
&\quad \leqslant 6\left(\frac{t}{\log \eta^{-1}} + 1\right)(n+1)(4\eta(1-\eta))^n + \frac{A(t)}{g-1},
\end{aligned}$$

(wegen $Q_n(1-\eta) \geqslant Q_n(\frac{1}{2})$ und 3.(7)). Daher folgt aus Satz 1:

$$\begin{aligned}
\frac{\pi t}{\log \eta^{-1}} \int_0^\infty \frac{T_n(\xi)}{Q_n(1-\eta)} \operatorname{Cos}^{-2} \pi r\, dr \leqslant \frac{A(t)}{g-1} + 6\left(\frac{t}{\log \eta^{-1}} + 1\right)(n+1)(4\eta(1-\eta))^n \\
+ \frac{\alpha}{\mu^2} \frac{2^{3n}}{\eta^{2n+1}}
\end{aligned}$$

Somit folgt aus Satz 3:

$$F(t) \leqslant \frac{A(t)}{g-1} + R(\eta, t) + \left(7 + \frac{6t}{\log \eta^{-1}}\right)(n+1)(4\eta(1-\eta))^n + \frac{\alpha}{\mu^2} \frac{2^{3n}}{\eta^{2n+1}} \tag{7}$$

$R(\eta, t)$ ist gleichmässig stegig in $[\eta_0, \frac{1}{2}] \times [\delta, T]$ und $R(\frac{1}{2}, t) = 0$. Daher können wir $\eta = \eta(\varepsilon, T) \in (\eta_0, \frac{1}{2})$ so wählen, dass

$$R(\eta, t) < \varepsilon/3 \quad \forall t \in [\delta, T].$$

Dann folgt aus (7) für $t \in [\delta, T]$:

$$F(t) \leqslant \frac{A(t)}{g-1} + \varepsilon/3 + \left(7 + \frac{6T}{\log \eta^{-1}}\right)(n+1)(4\eta(1-\eta))^n + \frac{\alpha}{\mu^2} \frac{2^{3n}}{\eta^{2n+1}}.$$

Wegen $4\eta(1-\eta) < 1$ können wir endlich $n = n(\eta, T, \varepsilon)$ so wählen, dass der dritte Term kleiner als $\varepsilon/3$ ausfällt und haben dann

$$F(t) \leqslant A(t, \mathcal{F})/g(\mathcal{F}) - 1 + 2\varepsilon/3 + \frac{\alpha}{\mu^2} \frac{2^{3n}}{\eta^{2n+1}}$$

sobald $l(\mathcal{F}) \geqslant \mu > 4$ und $t \in [\delta, T]$. Damit ist 3. bewiesen und folglich auch unser Theorem.

LITERATUR

[1] Buser, P., *Riemannsche Flächen mit grosser Kragenweite*, Comment. Math. Helv. *53* (1978).

[2] Hardy, G. H. and Littlewood, J. E., *Notes on the theory of series (XI): On Tauberian theorems.* Collected papers of G. H. Hardy, vol. VI, 745–759, (Oxford 1974).

[3] Huber, H., *Ueber den ersten Eigenwert des Laplace-Operators auf kompakten Riemannschen Flächen*, Comment. Math. Helv. *49* (1974) 251–259.

[4] Huber, H., *Ueber die Eigenwerte des Laplace-Operators auf kompakten Riemannschen Flächen*, Comment. Math. Helv. *51* (1976) 215–231.

[5] Selberg, A., *Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series*, J. Indian Math. Soc. *20* (1956) 47–87.

Mathematisches Institut der Universität
Rheinsprung 21, CH-4000 Basel.

Eingegangen den 2. Februar 1982