# Le caractère additif des déviations des anneaux locaux.

Comment. Math. Helvetici 57 (1982) 648–675 0010-2571/82/004648-28$01.50+0.20/0


# Le caractère additif des déviations des anneaux locaux

MICHEL ANDRÉ

A un anneau commutatif, local et noethérien $C$, on associe classiquement des nombres positifs $\varepsilon_n(C)$, appelés les déviations de l'anneau. La première de ces déviations ($n=1$) est simplement la dimension de plongement. Il est équivalent de connaître les déviations ou les nombres de Betti de $C$. En fait la n-ème déviation $\varepsilon_n(C)$ est la dimension d'un espace vectoriel $V_n(C)$ défini de manière fonctorielle.

Soit maintenant un homomorphisme local et plat $A \to B$, de fibre $\bar{B}$ et de corps résiduels $K$ et $L$. D'après T. Gulliksen et L. Avramov, il existe alors une suite exacte liant les espaces vectoriels

$$V_n(A) \otimes_K L, \qquad V_n(B), \qquad V_n(\bar{B}).$$

D'après L. Avramov, cette suite exacte se décompose en une infinité de suites exactes à six termes. Il est conjecturé que la décomposition se fait avec des suites exactes à trois termes, sauf une fois.

*Conjecture.* L'égalité suivante est satisfaite:

$$\varepsilon_n(B) = \varepsilon_n(A) + \varepsilon_n(\bar{B})$$

pout tout entier $n$, au moins égal à 3.

J'ai démontré que la conjecture est vraie lorsque les corps résiduels ont la caractéristique 2. Je démontre ici que la conjecture est vraie sauf pour un nombre fini d'entiers n dépendant de la fibre seulement, sans hypothèse sur la caractéristique. C'est une lecture attentive du travail de L. Avramov qui m'a permis de démontrer ce résultat partiel. En outre j'utilise deux résultats fondamentaux dus à T. Gulliksen. La technique que j'utilise est celle des adjonctions de variables à la manière de J. Tate.

Les algèbres différentielles graduées seront toujours supposées munies de puissances divisées. On ne fait pas cette supposition pour les algèbres graduées considérées (qui sont des algèbres d'homologie).

I *Variables spéciales.* Avec une algèbre différentielle graduée $Y$ considérons une adjonction à la Tate d'une variable $S$ de degré pair $k=2n$

$$Z=Y\langle S;dS=s\rangle$$

$s$ étant un cycle de $Y$ de degré impair $k-1$. On a de manière plus explicite une somme directe

$$Z=\sum_{i\geq 0} YS^{(i)}$$

l'élément $S^{(i)}$ étant la i-ème puissance divisée de l'élément $S^{(1)}$ égal à $S$. On suppose être dans le "*cas local*": il existe un anneau local A d'idéal maximal $M$ et de corps résiduel $K$ avec des isomorphismes

$$Y_0\cong A \quad \text{et} \quad H_0[Y]\cong K$$

l'image de la différentielle en degré nul correspondant à l'idéal maximal.

DÉFINITION 1. On dit que $S$ est une *variable spéciale* et que $s$ est un *cycle spécial*, s'il existe une *dérivation* de degré $1-k$

$$j:Y\to Y \quad \text{avec} \quad j(s)=1.$$

Rappelons que par définition $jd$ et $dj$ sont égaux, que l'égalité

$$j(xy)=(-1)^q j(x)y+xj(y)$$

a lieu si $y$ est un élément de $Y_q$ et que l'égalité

$$j(z^{(i)})=j(z)z^{(i-1)}$$

a lieu si $z$ est un élément de degré pair non-nul.

LEMME 2. *La propriété d'être spécial ne dépend que de la classe d'homologie du cycle considéré.*

*Démonstration.* Considérons un cycle spécial $s$ de $Y$ et démontrons qu'un cycle homologue est spécial

$$s'=s+dt.$$

On remarque que l'élément $1+dj(t)$ a un inverse $c$ dans $Y_0$ et on considère la dérivation suivante

$$j'(y)=cj(y).$$

On a alors les égalités suivantes

$$j'(s')=cj(s')=cj(s+dt)=c(j(s)+jd(t))=c(1+dj(t))=1$$

qui permettent de conclure.

EXEMPLE 3. Considérons une algèbre différentielle graduée $X$ et considérons une adjonction à la Tate d'une variable $R$ de degré impair $k-1$ et de nature triviale

$$Y=X\langle R;dR=0\rangle=X+XR.$$

Alors $s=R$ est un cycle spécial de $Y$ grâce à la dérivation

$$j:X+XR\to X+XR$$

qui envoie $a+bR$ sur $b+0R$. Pour la suite on remarque que le carré de $j$ est nul et que le noyau de $j$ vaut $X$.

LEMME 4. *Pour la double adjonction suivante*

$$Y=X\langle R;dR=0\rangle \quad \textit{et} \quad Z=Y\langle S;dS=R\rangle$$

*l'inclusion naturelle de $X$ dans $Z$ donne un isomorphisme en homologie.*

*Démonstration.* Pour cela considérons l'homomorphisme d'algèbres différentielles graduées

$$\rho:Z\to X$$

qui envoie l'élément $z$ de $Z$

$$z=\sum_{i\geq 0}(a_i+b_iR)S^{(i)}$$

sur l'élément $a_0$ de $X$ et considérons aussi la différentielle de degré $+1$

$$\delta : Z \to Z$$

qui envoie le même élément $z$ de $Z$ sur l'élément

$$\delta(z) = (-1)^{\deg z} \sum_{i \geqslant 0} b_i S^{(i+1)}.$$

On vérifie alors l'égalité suivante

$$\rho - id = d\delta + \delta d$$

qui donne l'isomorphisme naturel de $H[X]$ et de $H[Z]$.

Il s'agit de vérifier maintenant que l'exemple donné ci-dessus est générique (en ce qui concerne les algèbres, mais pas en ce qui concerne les dérivations): voir la proposition 6 ci-dessous pour un énoncé précis.

*REMARQUE* 5. La dérivation $j$ de la Définition 1 peut toujours être remplacée par une dérivation $\bar{j}$ de carré nul. On considère pour cela l'application

$$\bar{j}(y) = j(j(y)s) = j(y) - j^2(y)s$$

qui envoie encore $s$ sur 1 et qui est aussi une dérivation, de manière élémentaire. La dérivation $\bar{j}$ est de carré nul, puisque $j(\bar{j}(y))$. $s$ est toujours nul.

PROPOSITION 6. *Soit $s$ un cycle spécial d'une algèbre différentielle graduée $Y$. Alors il existe une algèbre différentielle graduée $X$ donnant lieu à un isomorphisme d'algèbres différentielles graduées*

$$X\langle R; dR = 0\rangle \cong Y$$

*qui envoie $R$ sur $s$.*

*Démonstration.* D'après la remarque précédente, on a une dérivation $j$ de $Y$ dont le carré est nul et qui envoie $s$ sur 1. Le noyau $X$ de $j$ est une sous-algèbre différentielle graduée de $Y$. Prolongeons l'inclusion de $X$ dans $Y$ en un homomorphisme d'algèbres différentielles graduées

$$\tau : X\langle R; dR = 0\rangle \to Y$$

qui envoie $R$ sur $s$. Il va s'agir d'un isomorphisme. Avec un élément $y$ de $Y$, on peut considérer deux éléments $y-j(y)s$ et $j(y)$ de $X$. Considérons alors l'application

$$\sigma : Y \to X\langle R; dR=0\rangle$$

qui envoie $y$ sur l'élément suivant

$$\sigma(y)=(y-j(y)s)+j(y)R.$$

Les applications $\sigma$ et $\tau$ sont inverses l'une de l'autre; ce qui démontre la proposition.

COROLLAIRE 7. *Avec une adjonction à la Tate d'une variable spéciale $S$ de degré pair $k$*

$$Z=Y\langle S; dS=s\rangle$$

*il existe un isomorphisme d'algèbres graduées*

$$H[Y]\cong H[Z]\langle W; dW=0\rangle$$

*où $W$ est une variable de degré impair $k-1$.*

*Démonstration.* L'isomorphisme de la Proposition 6

$$Y\cong X\langle R; dR=0\rangle$$

donne un isomorphisme en homologie

$$H[Y]\cong H[X]\langle W; dW=0\rangle$$

où $W$ a le degré $k-1$ de la variable $R$. Ensuite on remplace $H[X]$ par $H[Z]$ comme le permet le Lemme 4.

Nous allons voir maintenant que l'introduction d'une variable spéciale peut être retardée à volonté dans une procédure d'adjonction de variables à la Tate.

*REMARQUE* 8. Les algèbres différentielles graduées

$$Z_i=Y\langle T_i; dT_i=t_i\rangle \qquad i=1,2$$

sont isomorphes si les cycles $t_1$ et $t_2$ de $Y$ (avec un degré quelconque) sont homologues

$$t_1 = t_2 + d\lambda.$$

On peut choisir un isomorphisme qui est l'identité sur $Y$ et qui envoie $T_1$ sur $T_2 + \lambda$.

PROPOSITION 9. *Soit une double inclusion d'algèbres différentielles graduées $Y \subset U \subset Z$, la première étant due à l'adjonction d'une variable spéciale $S$ pour tuer un cycle spécial $s$ de $Y$ et la seconde étant due à l'adjonction d'une variable quelconque $T$ pour tuer un cycle quelconque $t$ de $U$. Quitte à remplacer le cycle $t$ par un cycle homologue $t'$, on peut toujours supposer qu'il s'agit d'un cycle non seulement de $U$ mais encore de $Y$. Alors on a une nouvelle inclusion double d'algèbres différentielles graduées $Y \subset V \subset Z$, la première étant due à l'adjonction d'une variable $T'$ pour tuer le cycle $t'$ de $Y$ et la seconde étant due à l'adjonction d'une variable $S'$ pour tuer le cycle $s' = s$ de $V$.*

*Démonstration.* Grâce à la Proposition 6, on peut présenter $Y$ de la manière suivante

$$Y = X + Xs.$$

On utilise alors les applications de la démonstration du Lemme 4

$$\rho : U \to X \quad \text{et} \quad \delta : U \to U$$

pour définir les éléments

$$t' = \rho(t) \in X \quad \text{et} \quad \lambda = \delta(t) \in U.$$

On peut donc remplacer le cycle $t$ de $U$ par le cycle $t'$ de $U$ pour décrire $Z$. Maintenant $s'$ et $t'$ sont deux cycles de $Y$, donc l'adjonction des deux variables peut se faire dans un ordre quelconque, ce qui constitue l'énoncé de la proposition.

*REMARQUE* 10. Il est clair qu'il existe une dérivation de $V$ qui est nulle sur $X$, qui envoie $s'$ sur 1 et qui envoie $T'$ sur 0. Par conséquent $S'$ est encore une variable spéciale pour l'inclusion de $V$ dans $Z$. Par ailleurs si $T$ est une variable spéciale pour l'inclusion de $U$ dans $Z$, alors $T'$ est une variable spéciale pour l'inclusion de $Y$ dans $V$. En effet une dérivation

$$j: U \to U \quad \text{avec} \quad j(t) = 1$$

donne une dérivation

$$j': Y \to Y \quad \text{avec} \quad j'(t') = 1.$$

Pour cela on considère dans $Y_0$ l'inverse $c$ de l'élément

$$1 + d\rho j\delta(t)$$

et on utilise la définition suivante

$$j'(a + bs) = c[\rho j(a) - \rho j(b) \cdot s]$$

pour $a$ et $b$ quelconques dans $X$.

*REMARQUE* 11. D'après le Corollaire 7, on a les isomorphismes suivants

$$H[Y] \cong H[U]\langle W; dW = 0\rangle$$
$$H[V] \cong H[Z]\langle W'; dW' = 0\rangle$$

(avec $W$, $W'$ et $s$ de même degré impair) pour l'homologie des deux algèbres différentielles graduées intermédiaires $U$ et $V$ de la Proposition 9.

Bien entendu, la Proposition 9 et les remarques qui la complètent restent vraies si on remplace $T$ par une famille finie de variables se succédant. Il en va de même avec une famille dénombrable de variables. Précisons cela sous la forme d'une nouvelle remarque.

*REMARQUE* 12. Soit une double inclusion d'algèbres différentielles graduées $Y \subset U \subset Z$, la première étant due à l'adjonction d'une variable spéciale $S$ pour tuer un cycle spécial $s$ de $Y$ et la seconde étant due à l'adjonction d'une infinité de variables $T_i$ pour tuer une infinité de cycles $t_i$. En fait on a une infinité d'inclusions

$$U_i = U_{i-1}\langle T_i; dT_i = t_i\rangle \qquad i \geqslant 1$$

(où $t_i$ est un cycle de $U_{i-1}$) en commençant avec $U_0 = U$, la réunion des $U_i$

donnant $Z$. On construit alors une infinité de nouvelles inclusions

$$V_i = V_{i-1}\langle T_i'; dT_i' = t_i'\rangle \qquad i \geqslant 1$$

(où $t_i'$ est un cycle de $V_{i-1}$) en commençant avec $V_0 = Y$, la réunion des $V_i$ donnant $V$. Voici cette construction décrite de manière précise.

On identifie une fois pour toutes $Y$ à $X + Xs$. On commence alors la construction avec les inclusions

$$X_0 = X \subset V_0 = Y \subset U_0 = U$$

qui sont liées par les égalités suivantes

$$V_0 = X_0 + sX_0 \quad \text{et} \quad U_0 = V_0\langle S; dS = s\rangle.$$

On a aussi l'homomorphisme et la différentielle du Lemme 4

$$\rho_0 : U_0 \to X_0 \quad \text{et} \quad \delta_0 : U_0 \to U_0$$

qui sont liés par l'égalité suivante

$$\rho_0 - id = d\delta_0 + \delta_0 d.$$

On peut alors aborder le premier pas de la construction en définissant le cycle suivant

$$t_1' = \rho_0(t_1) \in X_0$$

et en constatant l'égalité suivante

$$U_1 = U_0\langle T_1'; dT_1' = t_1'\rangle.$$

On a alors les inclusions suivantes

$$X_1 \subset V_1 \subset U_1$$

qui sont liées par les égalités suivantes

$$V_1 = X_1 + X_1 s \quad \text{et} \quad U_1 = V_1\langle S; dS = s\rangle$$

en posant les deux définitions suivantes

$$X_1 = X_0 \langle T'_1 ; dT'_1 = t'_1 \rangle$$
$$V_1 = V_0 \langle T'_1 ; dT'_1 = t'_1 \rangle.$$

Ensuite on prolonge $\rho_0$ en un homomorphisme

$$\rho_1 : U_1 \to X_1$$

qui envoie l'élément $T'_1$ sur lui-même (de même pour ses puissances divisées s'il y a lieu) et $\delta_0$ en une différentielle

$$\delta_1 : U_1 \to U_1$$

qui envoie l'élément $T'_1$ sur 0 (de même pour ses puissances divisées s'il y a lieu). On a finalement l'égalité suivante

$$\rho_1 - id = d\delta_1 + \delta_1 d.$$

On peut alors aborder le deuxième pas de la construction. Etc. Cela étant, à la limite, on a l'inclusion suivante

$$V = \cup V_i \subset Z = \cup U_i$$

qui donne lieu à une égalité attendue

$$Z = V \langle S ; dS = s \rangle.$$

On constate que s est encore un cycle spécial dans $V$ grâce à l'égalité suivante

$$V = \Omega + \Omega s \quad \text{avec} \quad \Omega = \cup X_i.$$

Les Remarques 10 et 11 sont évidemment encore valables.

En répétant l'opération pour un nombre fini de variables spéciales on a finalement le résultat suivant.

THÉORÈME 13. *Soit $Y \subset Z$ une inclusion d'algèbres différentielles graduées due à une adjonction à la Tate d'une infinité dénombrable de variables $T_i$ $(i \geq 1)$ tuant successivement des cycles $t_i$. Distinguons n de ces variables dans un ordre* *quelconque*

$$S_j = T_{k(j)}, \qquad 1 \leq j \leq n$$

*et supposons-les spéciales. Alors quitte à remplacer les cycles par des cycles homologues et à modifier les variables en conséquence, il est possible d'introduite une algèbre différentielle graduée intermédiaire*

$$Y \subset V \subset Z$$

*avec les propriétés suivantes. L'inclusion de* $Y$ *dans* $V$ *est due à l'adjonction de toutes les variables* $T_i$ *sauf les variables* $S_j$*, sans en modifier l'ordre. L'inclusion de* $V$ *dans* $Z$ *est due à l'adjonction de toutes les variables* $S_j$*, dans l'ordre donné par* $j$ *croissant. En outre il existe un isomorphisme d'algèbres graduées*

$$H[V] \cong H[Z]\langle W_j;\, dW_j = 0;\, 1 \leq j \leq n\rangle$$

*où l'élément* $W_j$ *a le même degré impair que l'élément* $s_j$ *égal à* $dS_j$.

*Démonstration.* Bien entendu, on applique $n$ fois la Remarque 12 dans des circonstances variables pour voir apparaître successivement les situations suivantes données de manière schématique

$T_1, T_2, \ldots, T_m, \ldots$ sans exception;

$T_1, \ldots, T_m, \ldots$ sauf $S_n = T_{k(n)}$; puis $S_n$;

$T_1, \ldots, T_m, \ldots$ sauf $S_n$, $S_{n-1}$; puis $S_{n-1}$, $S_n$;

etc, les variables étant à modifier à chaque pas.

COROLLAIRE 14. *L'algèbre différentielle graduée intermédiaire* $V$ *du théorème précédent a une algèbre graduée d'homologie* $H[V]$ *qui a un* $n$*-produit non-trivial et même un* $(n+1)$*-produit non-trivial si* $Z$ *n'est pas acyclique.*

*Démonstration.* Ils'agit de l'élément

$$W_1.\, W_2.\ldots.\, W_n = \omega$$

si $Z$ est acyclique et de l'élément $\alpha.\ \omega$ si $\alpha$ est un élément non nul de degré strictement positif de $H[Z]$.

Bien entendu si les variables sont en nombre fini, le théorème et son corollaire restent vrais.

Le Corollaire 14 est important pour la suite (voir le Corollaire 22 et la Proposition 27). C'est grâce à lui que la propriété de finitude s'introduit dans les considérations.

II *Relèvements.* Pour bien utiliser la technique des variables spéciales, la notion suivante est fort utile.

DÉFINITION 15. Soit $X$ une algèbre différentielle graduée. Alors un *relèvement* est un homomorphisme

$$\pi : \tilde{X} \to X$$

d'algèbres differentielles graduées qui est surjectif et qui donne un isomorphisme en homologie.

*REMARQUE* 16. Considérons un relèvement et une adjonction à la Tate d'une variable

$$\pi : \tilde{X} \to X \quad \text{et} \quad X\langle T; dT = t\rangle.$$

Alors le cycle $t$ de $X$ est l'image d'un cycle $\tilde{t}$ de $\tilde{X}$, cycle qui est défini à un bord près de $\tilde{X}$ (appartenant au noyau de $\pi$). On peut alors prolonger $\pi$

$$\pi : \tilde{X}\langle \tilde{T}; d\tilde{T} = \tilde{t}\rangle \to X\langle T; dT = t\rangle$$

en envoyant la variable $\tilde{T}$ sur la variable $T$. Il s'agit encore d'un relèvement. La démonstration classique de l'isomorphisme en homologie distingue le cas d'une variable de degré pair et le cas d'une variable de degré impair.

Considérons une inclusion $U_0 \subset U_\infty$ d'algèbres différentielles graduées due à des adjonctions à la Tate d'une infinité de variables $T_i$

$$U_i = U_{i-1}\langle T_i; dT_i = t_i\rangle$$

commençant avec $U_0$, aboutissant à $U_\infty$, la réunion des $U_i$, avec un nombre fini de variables en chaque degré et avec le degré de $T_i$ non-décroissant pour $i$ croissant. On désigne par $U(n)$ l'algèbre différentielle graduée que les éléments de $U_0$ et les variables de degrés au plus égaux à $n$ engendrent dans $U_\infty$. C'est le $n$-ème *squelette* de l'inclusion donnée

$$U(n) = U_{h(n)}$$

$h(n)$ étant le nombre des variables $T_i$ dont le degré est borné par $n$. Il n'est pas inutile de faire la remarque triviale que voici.

*REMARQUE* 17. Pour une variable $T_i$ de degré $n+1$ on a une inclusion naturelle

$$U(n) \subset U_{i-1}$$

avec les mêmes cycles de degré $n$, plus facilement homologues les uns aux autres à droite qu'à gauche. Il faut donc prendre garde au fait suivant. Si on remplace le cycle $t_i$ par un cycle homologue dans $U_{i-1}$ (et si on modifie la variable $T_i$ en conséquence) on risque le modifier de maniére gênante la classe du cycle dans $U(n)$

$$\tau_i = [t_i] \in H_n[U(n)].$$

Il est donc important de savoir dans quel ordre les variables de degré fixé sont utilisées.

Bien entendu la Remarque 16 peut s'utiliser pour faire une construction par induction qui démontre le résultat suivant.

LEMME 18. *Un relèvement $\pi_0 : \tilde{U}_0 \to U_0$ permet de relever une inclusion $U_0 \subset U_\infty$ donnée par des variables $T_i$ en une inclusion $\tilde{U}_0 \subset \tilde{U}_\infty$ donnée par des variables $\tilde{T}_i$*

$$\tilde{U}_i = \tilde{U}_{i-1}\langle \tilde{T}_i ; d\tilde{T}_i = \tilde{t}_i \rangle.$$

*Plus précisément, il existe des relèvements qui se prolongent les uns les autres*

$$\pi_i : \tilde{U}_i \to U_i$$

*avec la propriété d'envoyer la variable $\tilde{T}_i$ sur la variable $T_i$.*

Il est bon de faire une fois pour toutes les remarques suivantes. Un changement de variables dans la description de $\tilde{U}_\infty$ produit un changement de variables dans la description de $U_\infty$. Par ailleurs on a des isomorphismes naturels

$$H[\tilde{U}_i] \cong H[U_i]$$

qui donnent en particulier des isomorphismes concernant les squelettes

$$H[\tilde{U}(n)] \cong H[U(n)].$$

Ce dernier isomorphisme, pris en degré $n$, met en correspondance $\tilde{\tau}_i$ et $\tau_i$ si on a $h(n) < i \leqslant h(n+1)$.

Avant d'utiliser la technique des variables spéciales, il est nécessaire de préciser le point suivant concernant les bas degrés.

*REMARQUE* 19. Toutes les algèbres différentielles graduées considérées sont des anneaux (noethériens) en degré 0. Tous les homomorphismes considérés entre elles sont des homomorphismes locaux en degré 0, c'est en particulier le cas des relèvements de la Définition 15. De plus les inclusions considérées $U_0 \subset U_\infty$ sont supposées avoir suffisamment de variables de degré 1 pour que $U(1)$ soit *local dans le sens strict*: les bords de degré 0 de $U(1)$ forment l'idéal maximal de l'anneau local du degré 0, autrement dit les éléments

$$\tau_i \in H_0[U(0)] \qquad 1 \leqslant i \leqslant h(1)$$

engendrent l'idéal maximal de cet anneau local.

*REMARQUE* 20. Avec les notations du Lemme 18, supposons que $\tilde{T}_m$ est une variable spéciale. Sans modifier les variables $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \ldots, \tilde{T}_m$, mais en modifiant les variables suivantes, on peut obtenir la présentation suivante de l'inclusion $\tilde{U}_0 \subset \tilde{U}_\infty$

$$\tilde{U}_0 \subset \tilde{U}_\infty^* \subset \tilde{U}_\infty$$

en utilisant les variables $\tilde{T}_i$ sauf $\tilde{T}_m$ pour la première inclusion et pour la seconde la variable $\tilde{T}_m$, avec en outre un isomorphisme

$$H[\tilde{U}_\infty^*] \cong H[\tilde{U}_\infty]\langle W; dW = 0\rangle$$

le degré de $W$ égalant celui de $\tilde{T}_m$ diminué d'une unité. En général $T_m$ n'est pas une variable spéciale. Par contre l'homomorphisme naturel de $\tilde{U}_\infty$ sur $U_\infty$ permet de redescendre les autres propriétés. On a donc le résultat suivant. S'il existe un relèvement de $U_0$ qui permet de relever la variable $T_m$ en une variable spéciale, alors l'inclusion de $U_0$ dans $U_\infty$ peut être présentée de la manière suivante. Les $m$ premières variables $T_i$ ne sont pas modifiées, les suivantes le sont si nécessaire, de plus on a une double inclusion

$$U_0 \subset U_\infty^* \subset U_\infty$$

la première est due à toutes les variables $T_i$ sauf $T_m$ et la seconde est due à la variable $T_m$. De plus on obtient un isomorphisme

$$H[U_\infty^*] \cong H[U_\infty]\langle W; dW = 0\rangle$$

la variable $W$ ayant le même degré impair que le cycle $t_m$.

On peut maintenant répéter l'opération décrite ci-dessus pour la nouvelle inclusion de $U_0$ dans $U_\infty^*$ en utilisant une autre variable $T_n$, avec $n < m$, pour être sûr de la retrouver non-modifiée, et en utilisant un autre relèvement de $U_0$ si cela est nécessaire. Plus tard nous verrons pourquoi il est utile d'utiliser des variables non-modifiées (voir pour le moment la Remarque 17). La répétition de la Remarque 20 démontre donc le théorème suivant.

THÉORÈME 21. *Soit $Y \subset Z$ une inclusion d'algèbres différentielles graduées due à une adjonction à la Tate d'une infinité dénombrable de variables $T_i$ $(i \geqslant 1)$ tuant successivement des cycles $t_i$. Distinguons $n$ de ces variables dans un ordre croissant*

$$S_j = T_{k(j)} \qquad k(1) < k(2) < \cdots < k(n)$$

*et supposons que chacune d'elles peut être relevée en une variable spéciale grâce à un relèvement bien choisi de $Y$, dépendant de $j$. Alors quitte à remplacer les cycles par des cycles homologues et à modifier les variables en conséquence, il est possible d'introduire une algèbre différentielle graduée intermédiaire.*

$$Y \subset V \subset Z$$

*avec les propriétés suivantes. L'inclusion de $Y$ dans $V$ est due à l'adjonction de toutes les variables $T_i$ sauf les variables $S_j$, sans en modifier l'ordre. L'inclusion de $V$ dans $Z$ est due à l'adjonction de toutes les variables $S_j$, sans en modifier l'ordre. En outre il existe un isomorphisme d'algèbres graduées*

$$H[V] \cong H[Z]\langle W_j; dW_j = 0; 1 \leqslant j \leqslant n\rangle.$$

COROLLAIRE 22. *L'algèbre graduée $H[V]$ a un $n$-produit non-trivial si $Z$ est acyclique et un $(n+1)$-produit non-trivial si $Z$ n'est pas acyclique, sous les hypothèses et avec les notations du théorème précédent.*

*REMARQUE* 23. Il faut bien remarquer que la démonstration du Théorème 21 se fait en traitant les variables $S_j$ l'une après l'autre dans l'ordre suivant

$$S_n, S_{n-1}, \ldots, S_2, S_1.$$

Cela a la conséquence suivante. La variable $S_j$ n'a pas besoin d'être modifiée avant d'être retardée. Par conséquent on peut utiliser une hypothèse sur cette variable $S_j$ égale à $T_{k(j)}$ qui dépend explicitement de cette variable et non pas seulement de la classe du cycle $s_j$ égal à $t_{k(j)}$ dans l'homologie de l'algèbre différentielle graduée que $Y$ et $T_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant k(j)-1$ engendrent.

Considérons toujours une inclusion d'algèbres différentielles graduées $U_0 \subset U_\infty$ due à des adjonctions à la Tate de variables $T_i$. Soit $K$ le corps résiduel de l'anneau local que l'on rencontre en degré nul.

DEFINITION 24. Une *pression* de degré $n \geqslant 1$ est un homomorphisme non nul

$$\lambda : H_n[U(n)] \to K$$

qui peut être réalisé de la manière suivante. Il existe un relèvement $\tilde{U}_0$ de $U_0$ et une dérivation de degré $-n$

$$j : \tilde{U}(n) \to \tilde{U}(n)$$

dont l'homomorphisme associé

$$\tilde{\lambda} : H_n[\tilde{U}(n)] \to H_0[\tilde{U}(n)]$$

correspond à l'homomorphisme considére $\lambda$ par les deux isomorphismes naturels

$$H_n[\tilde{U}(n)] \cong H_n[U(n)] \quad \text{et} \quad H_0[\tilde{U}(n)] \cong K.$$

Voir la Remarque 19 concernant le caractère local des algèbres différentielles graduées utilisées.

Considérons maintenant pour chaque variable $T_i$ de degré $n+1$ la classe d'homologie $\tau_i$ dans $H_n[U(n)]$ du cycle $t_i$ égal à l'élément $dT_i$.

LEMME 25. *Soit $T_m$ une des variables de degré $n+1$ et soit $\lambda$ une pression de degré n. Alors si $\tau_i$ est dans le noyau de $\lambda$ pour $i<m$ et si $\tau_m$ n'est pas dans le noyau de $\lambda$, la variable $T_m$ peut être relevée en une variable spéciale dans un relèvement bien choisi.*

*Démonstration.* Le relèvement bien choisi est évidemment celui de la Définition 24. La pression $\lambda$ est réalisée grâce à une dérivation du $n$-ème squelette du relèvement

$$j:\tilde{U}_{h(n)}\to \tilde{U}_{h(n)}.$$

On peut prolonger en une dérivation du type suivant

$$j:\tilde{U}_{m-1}\to \tilde{U}_{m-1}.$$

En effet l'hypothèse

$$\lambda(\tau_i)=0 \quad \text{pour} \quad h(n)<i<m.$$

signifie que $j$ envoie $\tilde{t}_i$ égal à $d\tilde{T}_i$ sur un bord du $n$-ème squelette. Il existe donc des éléments $\mu_i$ de degré 1 dans $\tilde{U}_{h(n)}$ avec des égalités

$$j(\tilde{t}_i)=d\mu_i \quad \text{pour} \quad h(n)<i<m.$$

On prolonge alors $j$ en envoyant la variable $\tilde{T}_i$ sur $\mu_i$. Le fait d'avoir $\lambda(\tau_m)$ non nul démontre que $j$ envoie $\tilde{t}_m$ sur un élément inversible de $\tilde{U}_{h(n)}$ de degré 0, autrement dit sur un élément inversible de $\tilde{U}_{m-1}$ de degré 0. Quitte à multiplier $j$ par l'inverse de cet élément, on a donc une dérivation de $\tilde{U}_{m-1}$ qui envoie le cycle $\tilde{t}_m$ sur 1 et le variable $\tilde{T}_m$ est bien spéciale, d'où la conclusion du lemme.

*REMARQUE* 26. Soient $k$ pressions de degré $n$

$$\lambda_i:H_n[U(n)]\to K.$$

Dénotons par $\Lambda_i$ le noyau de la restriction de $\lambda_i$ au sous-espace vectoriel de $H_n[U(n)]$ que les éléments $\tau_j$ de degré $n$ engendrent. Supposons avoir des inclusions strictes dans le sens suivant

$$\Lambda_1\neq\Lambda_1\cap\Lambda_2\neq\cdots\neq\Lambda_1\cap\Lambda_2\cap\cdots\cap\Lambda_k.$$

Quitte à faire un changement de variables concernant celles de degré $n+1$, on peut obtenir la situation suivante pour les variables de degré $n+1$ au nombre de $f=h(n+1)-h(n)$

$$\lambda_i(\tau_{h(n)+i})\neq 0 \quad \text{pour} \quad 1\leq i\leq k$$
$$\lambda_i(\tau_{h(n)+j})=0 \quad \text{pour} \quad i<j$$

avec $1 \leqslant i \leqslant k$ et $1 \leqslant j \leqslant f$ bien entendu. Mais alors on voit apparaître $k$ variables sujettes au Lemme 25. On peut donc les soumettre au Théorème 21, en modifiant les variables de degrés supérieurs et sans modifier les variables de degrés inférieurs (voir la Remarque 23). On a ainsi le résultat suivant qui sera utilisé plus loin et qui définit les nombres $s_n$.

PROPOSITION 27. *Soit $Y \subset Z$ une inclusion d'algèbres différentielles graduées due à une adjonction à la Tate d'une infinité dénombrable de varaibles $T_i$ tuant successivement des cycles $t_i$. Pour tout $n$ impair, soit $Q_n$ le sous-espace vectoriel de $H[Y(n)]$ engendré par les classes de tous les cycles $t_i$ de degré $n$ et soit $P_n$ le sous-espace vectoriel de $Q_n$ formé des éléments de $Q_n$ annulés par toutes les pressions de degré $n$. Alors quitte à faire un changement de toutes les variables de degré $n+1$, on peut avoir des variables de degré $n+1$ se relevant à tour de rôle en une variable spéciale dans un relèvement bien choisi, en nombre suffisant pour égaler au moins la codimension $s_{n+1}$ de $P_n$ dans $Q_n$.*

On peut utiliser la proposition pour plusieurs degrés en même temps et obtenir ainsi le corollaire que voici.

COROLLAIRE 28. *Soit $Y \subset Z$ une inclusion d'algèbres différentielles graduées due à une adjonction à la Tate d'une infinité dénombrable de variables $T_i$. Supposons qu'il n'existe pas de produits non-triviaux de $m+1$ éléments dans toutes les algèbres différentielles graduées "intermédiaires" entre $Y$ et $Z$. Alors presque toutes les codimensions $s_n$ sont nulles, avec une inégalité simple*

$$\sum s_n \leqslant m.$$

*Cette inégalité est même stricte*

$$\sum s_n < m$$

*lorsque ou bien $Z$ n'est pas acyclique ou bien $Z$ est acyclique avec une infinité de squelettes qui ne sont pas acycliques.*

*Démonstration.* Le Corollaire 22 et la Proposition 27 démontrent la finitude, l'inégalité simple et le premier cas de l'inégalité stricte. On démontre alors le second cas de l'inégalité stricte en considérant non pas l'inclusion de $Y$ dans $Z$ mais l'inclusion de $Y$ dans $Z(q)$ en soumettant $q$ aux deux conditions suivantes: en premier lieu $s_n$ est nul pour tout $n$ dépassant $q$ et en second lieu $Z(q)$ n'est pas acyclique.

DÉFINITION 29. Il reste à préciser la notion d'algèbre différentielle graduée *intermédiaire.* C'est évidemment celle donnée par le Théorème 21. On a donc une inclusion double à considérer dans la définition

$$Y \subset V \subset Z.$$

En outre il doit exister une première famille de variables $R_i$ qui décrit la première inclusion et une seconde famille de variables $S_j$ qui décrit la seconde inclusion, ces deux familles réunies redonnant la famile initiale de variables décrivant l'inclusion de $Y$ dans $Z$, à un changement de variables près, comme toujours.

III *Anneaus locaux.* Soit $C$ un anneau local noethérien d'idéal maximal $N$ et de corps résiduel $L$. Il y a lieu de distinguer deux cas. Dans le *cas dégénéré,* l'anneau $C$ est une intersection complète, dans le sens large, autrement dit son complété est une intersection complète dans le sens strict; on dira simplement que dans le cas dégénéré il s'agit d'une intersection complète et que dans le *cas non-dégénéré* il ne s'agit pas d'une intersection complète.

Soit en outre $V_n(C)$ l'espace vectoriel des *éléments indécomposables* de degré $n$ de l'algèbre graduée à puissances divisées $\mathrm{Tor}^C(L, L)$. La $n$-ème déviation $\varepsilon_n(C)$ est la dimension de l'espace vectoriel $V_n(C)$. En particulier $\varepsilon_1(C)$ est égale à la dimension de plongement de $C$, autrement dit au nombre minimal de générateurs de l'idéal $N$.

Soit maintenant $G$ une résolution minimale de la $C$-algèbre $L$, résolution minimale qui existe sous la forme d'une algèbre différentielle graduée à la Tate d'après T. Gulliksen. Le passage de $C$ à $G$ se fait par l'adjonction de variables $T_i$. Il y en a exactement $\varepsilon_n(C)$ en degré $n$. On retrouve encore le nombre $\varepsilon_n(C)$ comme dimension de l'espace vectoriel sur $L$

$$H_{n-1}[G(n-1)] \qquad n \geqslant 2$$

$G(q)$ désignant le $q$-ème squelette de la résolution minimale. Bien entendu l'anneau $C$ détermine $G(q)$ à un isomorphisme près.

Dans le cas dégénéré, le squelette $G(2)$ est acyclique. Par conséquent les variables $T_i$ sont en nombre fini et n'apparaissent qu'en degrés 1 et 2. Dans le cas non-dégénéré, d'après T. Gulliksen, le nombre de déviations non-nulles est infini. Par conséquent les variables $T_i$ forment une famille infinie denombrable et le squelette $G(q)$ n'est jamais acyclique.

Par ailleurs tout cycle $G$ de degré non-nul est un élément de $NG$. Considèrons en outre une algèbre différentielle graduée intermédiaire (voir Définition 29)

$$G(1) \subset V \subset G.$$

Grâce aux relations liant les variables décrivant les trois inclusions, on a une égalité

$$V \cap NG = NV.$$

Les éléments de $N$ sont des bords dans $G(1)$ déjà. Donc tout cycle de $V$ de degré non nul est homologue dans $V$ à un cycle appartenant au produit $W \cdot V$ dans $V$, avec $W$ désignant la partie homogène de degré 1 de $G(1)$, autrement dit de $G$. Comme $G(1)$ est l'algèbre extérieure du $C$-module libre $W$ de rang $\varepsilon_1(C)$, le produit de $\varepsilon_1(C)+1$ éléments de $W \cdot V$ est toujours nul dans $V$. Par conséquent il n'existe pas de produit non-trivial à $\varepsilon_1(C)+1$ éléments dans $H[V]$.

On peut donc appliquer le Corollaire 28 en utilisant l'inclusion suivatte

$$Y = G(1) \subset Z = G$$

et aussi l'entier suivant

$$m = \varepsilon_1(C).$$

On a donc besoin de la Définition 24, dans un cas particulier.

DÉFINITION 30. Une algèbre différentielle graduée $\Gamma$ constituée d'un anneau local noethérien $\Gamma_0$ en degré nul, ayant une homologie nulle en chaque degré positif et accompagnée d'un isomorphisme d'anneaux

$$\gamma : H_0[\Gamma] \to C$$

est une *couverture* de l'anneau local noethérien $C$.

*REMARQUE* 31. En présence d'une couverture $\Gamma$ de $C$, on peut relever les variables $T_i$ décrivant une résolution minimale $G$ de $C$ en des variables $\tilde{T}_i$ et obtenir à isomorphisme près un diagramme commutatif du type suivant

$$\begin{array}{ccccccccc}
\Gamma = \Gamma(0) & \subset & \Gamma(1) & \subset \cdots \subset & \Gamma(q) & \subset \cdots \\
\downarrow{\scriptstyle\gamma(0)} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma(1)} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma(q)} & \\
C = G(0) & \subset & G(1) & \subset \cdots \subset & G(q) & \subset \cdots
\end{array}$$

les homomorphismes d'algèbres différentielles graduées $\gamma(q)$ donnant lieu à des isomorphismes en homologie. A la limite, on remarque que les deux algèbres différentielles graduées

$$\Gamma(\infty) = \cup \Gamma(q) \quad \text{et} \quad G(\infty) = \cup G(q) = G$$

sont acycliques et donnent le corps résiduel $L$ de l'anneau local $C$ en homologie de degré nul.

DÉFINITION 32. Considérons le diagramme commutatif de la remarque précédente et supposons avoir en outre une dérivation de degré $-q$ impair

$$j : \Gamma(q) \to \Gamma(q).$$

Il en découle un homomorphisme d'espaces vectoriels

$$H_q[\Gamma(q)] \to H_0[\Gamma(q)]$$

autrement dit un homomorphisme d'espaces vectoriels

$$\bar{j} : H_q[G(q)] \to L.$$

Un homomorphisme d'espaces vectoriels

$$\lambda : H_q[G(q)] \to L$$

pour lequel il existe une couverture $\Gamma$ et une dérivation $j$ permettant de retrouver $\lambda$ sous la forme $\lambda = \bar{j}$ est appelé une *pression* de degré $q$ de l'anneau noethérien $C$.

DÉFINITION 33. Avec l'espace vectoriel $H_q[G(q)]$ de dimension $\varepsilon_{q+1}(C)$ considérons le sous-espace vectoriel $P_q$ formé des éléments annulés par toutes les pressions de degré $q$. Soit $s_{q+1}(C)$ la codimension de $P_q$ dans $H_q[G(q)]$. On a alors une nouvelle famille d'entiers positifs ou nuls attachés à l'anneau local noethérien considéré $C$

$$s_{2k}(C) \leqslant \varepsilon_{2k}(C) \qquad k \geqslant 1.$$

Cela étant, il est possible maintenant d'exprimer simplement ce que donne le Corollaire 28.

PROPOSITION 34. *Pour un anneau local noethérien $C$ qui n'est pas une intersection complète, les nombres $s_{2k}(C)$ sont presque tous nuls et l'inégalité* *suivante*

$$\sum s_{2k}(C) < \varepsilon_1(C)$$

*est toujours satisfaite.*

*REMARQUE* 35. Dans le cas d'une intersection complète, les trois nombres qui peuvent ne pas être nuls apparaissent dans une double inégalité

$$s_2(C) \leqslant \varepsilon_2(C) \leqslant \varepsilon_1(C).$$

Il n'est pas exclu d'avoir des égalités. On a par ailleurs le complément suivant.

*REMARQUE* 36. Un anneau local noethérien $C$ donnant une égalité

$$\sum s_{2k}(C) = \varepsilon_1(C)$$

est forcément une intersection complète artinienne. En effet on a non seulement une intersection complète par la Proposition 34, mais encore un anneau artinien par la Remarque 35, puisqu'alors la différence entre $\varepsilon_1(C)$ et $\varepsilon_2(C)$ est égale à la dimension de Krull de $C$.

Avec $C = L[t]/(t^2)$ on a un anneau apparaissant trois fois avec le nombre 1 dans le Remarque 35.

DÉFINITION 37. Une *fibration* $\varphi : A \to B$ est un homomorphisme local et plat entre deux anneaux locaux et noethériens. Les idéaux maximaux sont respectivement $M$ et $N$ et les corps résiduels sont respectivement $K$ et $L$. La fibre de la fibration est l'anneau local et noethérien $\bar{B}$ égal à $B/MB$ d'idéal maximal $\bar{N}$ égal à $N/MB$ et de corps résiduel $\bar{L}$ égal à $L$.

*REMARQUE* 38. D'après T. Gulliksen et L. Avramov, à une fibration on peut associer une suite exacte longue

$$\cdots \to V_n(A) \otimes_K L \xrightarrow{\alpha_n} V_n(B) \xrightarrow{\beta_n} V_n(\bar{B}) \xrightarrow{\gamma_n} V_{n-1}(A) \otimes_K L \to \cdots.$$

Les deux homomorphismes $\alpha_n$ et $\beta_n$ pour $n \geqslant 1$ sont dus aux deux carrés commutatifs suivants

$$\begin{array}{ccc} A & \to & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ K & \to & L \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} B & \to & \bar{B} \\ \downarrow & & \downarrow \\ L & \to & L. \end{array}$$

La définition de l'homomorphisme $\gamma_n$ pour $n \geq 2$ est rappelée ci-dessous. D'après L. Avramov, l'homomorphisme $\gamma_n$ est toujours nul lorsque $n$ est impair. En général $\gamma_2$ n'est pas nul pour une fibration, puisque la dimension de plongement de $B$ n'est pas forcément égale à la somme des dimensions de plongement de $A$ et de $\bar{B}$. D'après M. André, l'homomorphisme $\gamma_n$ est nul lorsque n est pair, différent de 2 dans le cas particulier où les corps résiduels ont la caractéristique 2. On a donc la conjecture suivante.

*CONJECTURE* 39. Pour une fibration quelconque, l'homomorphisme $\gamma_n$ est nul pour tout entier $n \neq 2$. Autrement dit la formule d'addition suivante est toujours valable

$$\varepsilon_n(B) = \varepsilon_n(A) + \varepsilon_n(\bar{B}) \quad \text{si} \quad n \geq 3.$$

On va démontrer que cette formule est presque toujours vraie, les entiers $n$ pouvant faire exception ne dépendant que de la fibre $\bar{B}$. On démontre même un peu plus.

DÉFINITION 40. Le sous-espace vectoriel $W_n(C)$ de l'espace vectoriel $V_n(C)$ associé à un anneau local et noethérien $C$ est formé de tous les éléments annulés par les homomorphismes du type suivant

$$\gamma_n(\varphi) \circ V_n(\omega) : V_n(C) \to V_{n-1}(A) \otimes_K L$$

dû à une fibration $\varphi$ et à un isomorphisme $\omega$

$$\varphi : A \to B \quad \text{et} \quad \omega : C \to \bar{B}$$

On considère alors la codimension $w_n(C)$ de $W_n(C)$ dans $V_n(C)$.

Dans la définition ci-dessus, on traite comme un tout, toutes les fibrations ayant la même fibre à isomorphisme près. Bien entendu, on peut s'intéresser à une seule fibration à la fois.

*REMARQUE* 41. Pour une fibration $\varphi : A \to B$ de fibre $\bar{B}$, la dimension de l'image de $\gamma_n$

$$\gamma_n : V_n(\bar{B}) \to V_{n-1}(A) \otimes_K L$$

est majorée non seulement par la déviation $\varepsilon_{n-1}(A)$, mais encore par le nombre $w_n(\bar{B})$.

On va démontrer que les entiers $s_n(C)$ de la Définition 33 majorent les entiers $w_n(C)$ de la Définition 40. La Proposition 34, la Remarque 35 et la Remarque 36 donnent alors le résultat suivant.

THÉORÈME 42. *Pour un anneau local noethérien C, les nombres $w_{2k}(C)$ sont presque tous nuls et l'inégalité suivante est toujouts satisfaite*

$$\sum w_{2k}(C) \leq \varepsilon_1(C).$$

*En cas d'égalité, l'anneau C est forcément une intersection complète artinienne.*

Il est clair que le résultat demeure si on diminue encore les entiers $w_{2k}(C)$, par exemple si on ne considère qu'une seule fibration à la fois.

THÉORÈME 43. *Soit $\varphi : A \to B$ un homomorphisme local et plat entre deux anneaux locaux et noethériens. Alors il existe un nombre fini d'entiers ne dépendant que de la fibre $\bar{B}$*

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k$$

*tels que l'homomorphisme*

$$\gamma_n : V_n(\bar{B}) \to V_{n-1}(A) \otimes_K L$$

*est nul pour tous les entiers n différents des entiers $n_j$. De plus la somme des dimensions des images des homomorphismes $\gamma_n$ est majorée par la dimension de plongement de la fibre $\bar{B}$. En cas d'égalité, la fibre $\bar{B}$ est forcément une intersection complète artinienne.*

Il reste donc à démontrer le lemme suivant.

LEMME 44. *L'inégalité $w_n(C) \leq s_n(C)$ a lieu pour tout entier n et pour tout anneau local et noethérien C.*

*Démonstration.* Il suffit de considérer une fibration quelconque et de démontrer que le noyau de l'homomorphisme $\gamma_n$ correspond à l'intersection des noyaux d'un certain nombre de pressions de la fibre de degré $n-1$. La notion de pression est celle de la Définition 32. Ce résultat est démontré plus loin, une fois rappelée la construction de l'homomorphisme $\gamma_n$.

Considérons une fibration $A \to B$ de fibre $\bar{B}$. Soit $\Gamma'$ une résolution minimale de la $A$-algèbre $K$, décrite à l'aide des variables $S'_i$. Soit $G$ une résolution minimale de la $\bar{B}$-algèbre $L$, décrite à l'aide des variables $T_j$. Considérons alors le produit tensoriel

$$\Gamma = \Gamma' \otimes_A B.$$

Par platitude il s'agit d'une résolution minimale de la $B$-algèbre $\bar{B}$. On peut la décrire à l'aide des variables $S_i$ valant $S_i' \otimes 1$. Avec $\Gamma$ on a une couverture de $B$ dans le sens de la Définition 30, couverture dont la partie homogène de degré nul est la suivante

$$\Gamma_0 \cong \Gamma_0' \otimes_A B \cong A \otimes_A B \cong B.$$

Cela étant, on peut utiliser la Remarque 31 et en particulier relever pas-à-pas les variables $T_j$ en des variables $\tilde{T}_j$.

Fixons maintenant un entier $n$. Les variables $S_i'$ de degré $n-1$ sont à distinguer

$$E_\alpha' \quad \text{avec} \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant \varepsilon_{n-1}(A)$$

et les variables $T_j$ de degré n aussi

$$F_\beta \quad \text{avec} \quad 1 \leqslant \beta \leqslant \varepsilon_n(\bar{B}).$$

On a alors une égalité utile pour la suite.

*REMARQUE* 45. Avec les notations introduites ci-dessus, on a toujours une égalité explicite

$$d\tilde{F}_\beta = \sum b_{\beta\alpha} E_\alpha + \rho_\beta$$

avec $b_{\beta\alpha}$ dans $B$, la description explicite de $\rho_\beta$ ne faisant intervenir que des éléments de $B$, des variables $S_i$ en degrés au plus $n-2$ et des variables $\tilde{T}_j$ en degrés au plus $n-1$.

L'espace vectoriel $H_{n-1}[G(n-1)]$ a une base formée des classes d'homologie des cycles $dF_\beta$ de $G(n-1)$. L'isomorphisme naturel

$$H_{n-1}[G(n-1)] \cong V_n(\bar{B})$$

transforme cette base en une base de $V_n(\bar{B})$

$$Y_\beta \quad \text{avec} \quad 1 \leqslant \beta \leqslant \varepsilon_n(\bar{B}).$$

On a de même une base utile de l'espace vectoriel $V_{n-1}(A) \otimes_K L$

$$X_\alpha \quad \text{avec} \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant \varepsilon_{n-1}(A).$$

*REMARQUE* 46. Avec les notations introduites ci-dessus l'homomorphisme

$$\gamma_n : V_n(\bar{B}) \to V_{n-1}(A) \otimes_K L$$

est donné par l'égalité suivante

$$\gamma_n(Y_\beta) = \sum [b_{\beta\alpha}] X_\alpha$$

où $[b]$ désigne la classe dans $L$ de l'élément $b$ de $B$ et où $b_{\beta\alpha}$ provient de la Remarque 45 décrivant $d\tilde{F}_\beta$.

Voici maintenant le lemme annoncé et utilisé dans la démonstration du Lemme 44. Avec le lemme ci-dessous, les démonstrations des Théorèmes 42 et 43 donc achevées.

LEMME 47. *Soit une fibration* $A \to B$ *de fibre* $\bar{B}$ *et de corps résiduels* $K$ *et* $L$. *Soit* $G$ *une résolution minimale de la* $\bar{B}$*-algèbre* $L$. *Alors pour tout nombre pair* $n \geq 2$, *l'isomorphisme*

$$V_n(\bar{B}) \to H_{n-1}[G(n-1)]$$

*envoie le noyau de l'homomorphisme*

$$\gamma_n : V_n(\bar{B}) \to V_{n-1}(A) \otimes_K L$$

*sur l'intersection des noyaux d'un nombre fini de pressions bien choisies de* $\bar{B}$ *de degré* $n-1$ .

$$\lambda_\alpha : H_{n-1}[G(n-1)] \to L.$$

*Démonstration.* D'après T. Gulliksen, il existe une dérivation $j'_\alpha$ de $\Gamma'$ de degré $1-n$ qui envoie la variable $E'_\alpha$ sur 1 et les autres variables de degré au plus $n-1$ sur 0. Par produit tensoriel on a donc une dérivation $j_\alpha$ de $\Gamma$ de degré $1-n$ avec la propriété suivante

$$j_\alpha(E_{\alpha'}) = 1 \quad \text{si} \quad \alpha = \alpha' \quad \text{et} \quad 0 \quad \text{si} \quad \alpha \neq \alpha'.$$

On prolonge cette dérivation $j_\alpha$ de $\Gamma$ en une dérivation de $\Gamma(n-1)$ notée encore $j_\alpha$ et unique avec la propriété suivante

$$j_\alpha(\tilde{T}_j) = 0 \text{ si le degré de } \tilde{T}_j \text{ est au plus } n-1.$$

Donc $j_\alpha$ envoie toutes les variables $S_i$ et $\tilde{T}_j$ de degré au plus $n-1$ sur 0 sauf $E_\alpha$ qui est envoyée sur 1. On peut alors constater que $j_\alpha$ transforme l'égalité de la Remarque 45 (homogène de degré $n-1$) en une égalité nouvelle (homogène de degré 0)

$$j_\alpha(d\tilde{F}_\beta) = b_{\beta\alpha}.$$

Par conséquent en passant à l'homologie, la dérivation $j_\alpha$ donne lieu à un homomorphisme

$$H_{n-1}[\Gamma(n-1)] \rightarrow H_0[\Gamma(n-1)]$$

qui envoie la classe du cycle $d\tilde{F}_\beta$ sur la classe du cycle $b_{\beta\alpha}$. On a donc une pression

$$\bar{j}_\alpha : H_{n-1}[G(n-1)] \rightarrow L$$

qui envoie la classe du cycle $dF_\beta$ sur l'élément $[b_{\beta\alpha}]$ de $L$. D'après la Remarque 46, il est alors équivalent de connaître l'homomorphisme $\gamma_n$ ou de connaître la famille des pressions $\bar{j}_\alpha$. En particulier le noyau de $\gamma$ et l'intersection des noyaux des $\bar{j}_\alpha$ se correspondent par l'isomorphisme de l'énoncé du lemme. Tous les résultats énoncés sont donc démontrés maintenant.

*REMARQUE* 48. La dimension de plongement apparaît comme borne dans les énoncés pour la seule raison suivante. On considère un anneau local et noethérien $C$ d'idéal maximal $N$ ainsi qu'une résolution minimale $G$. Puis on applique le Corollaire 28 à l'inclusion suivante

$$Y = G(1) \subset Z = G.$$

Il s'agit alors de trouver un entier $m$ avec la propriété suivante: le produit de $m+1$ éléments de $H[V]$ de degrés strictement positifs est toujours nul, pour toute algèbre différentielle graduée intermédiaire (voir la Définition 29)

$$G(1) \subset V \subset G.$$

La dimension de plongement de $C$ est un tel entier $m$. Par ailleurs un cycle de $V$ de degré strictement positif appartient toujours à $NG$. Par conséquent le produit de $m+1$ cycles de $V$ de degrés strictement positifs est toujours nul si $N^{m+1}$ est nul. On peut alors utiliser cet entier $m$ à la place de la dimension de plongement..

DÉFINITION 49. Le *degré de nilpotence* $\nu(C)$ d'un anneau local et artinien $C$ est le plus petit entier $k$ donnant l'égalité suivante

$$N^{k+1}=0$$

pour l'ideal maximal $N$.

THÉORÈME 50. *Pour un anneau local artinien $C$, l'inégalité suivante est toujours satisfaite*

$$\sum w_{2k}(C)\leqslant\nu(C).$$

*L'inégalité est même stricte si $C$ n'est pas une intersection complète.*

COROLLAIRE 51. *La conjecture est vraie pour chaque fibration ayant sa fibre avec un idéal maximal de carré nul.*

Il est possible de diminuer la borne du Théorème 42 dans le sens suivant.

*REMARQUE* 52. Avec un anneau local et noethérien $C$, considérons la différence entre sa dimension de plongement et sa profondeur

$$\varepsilon_1(C)-\text{prof}\,(C).$$

Dénotons par $\kappa(C)$ ce nombre positif ou nul. D'après Auslander-Buchsbaum, c'est le plus grand entier $m$ pour lequel le complexe de Koszul $Y$ a de l'homologie non nulle

$$H_k[G(1)]\neq 0 \quad \text{si} \quad k=\kappa(C)\,\text{et}=0 \quad \text{si} \quad k>\kappa(C).$$

Il existe alors un quotient $\underline{Y}$ de $Y$ qui a la même homologie que ce complexe de Koszul et qui est nul pour les degrés inutiles

$$\underline{Y}_k=0 \quad \text{si} \quad k>\kappa(C).$$

La double inclusion de la Remarque 48

$$Y\subset V\subset Z$$

donne alors une double inclusion par produit tensoriel

$$Y \otimes_{\mathrm{Y}} \underline{Y} \subset V \otimes_{\mathrm{Y}} \underline{Y} \subset Z \otimes_{\mathrm{Y}} \underline{Y}$$

avec la même homologie pour les deux algèbres différentielles graduées intermédiaires (voir la Définition 29)

$$V \quad \text{et} \quad \underline{V} = V \otimes_{\mathrm{Y}} \underline{Y}.$$

On s'intéresse alors au produit de $\kappa(C)+1$ éléments de $H[V]$ de degrés strictement positifs et la même démonstration que celle rappelée dans la Remarque 48 démontre que ce produit est nul toujours. On peut donc utiliser la borne $\kappa(C)$ dans la Proposition 34 et dans le Théorème 42.

THÉORÉME 53. *Soit un homomorphisme local et plat entre deux anneaux locaux et noethériens A et B. Alors la différence entre la dimension de plongement de la fibre $\bar{B}$ et la profondeur de la fibre $\bar{B}$ majore la somme des dimensions des images des homomorphismes*

$$\gamma_n : V_n(\bar{B}) \rightarrow V_{n-1}(A) \otimes_{\mathrm{K}} L.$$

*En cas d'égalité, la fibre est forcément une intersection complète.*

## RÉFÉRENCES

[1] M. André, *Algèbre homologique des anneaux locaux à corps résiduels de caractéristique deux.* Springer Lecture Notes *740* (1979) 237–242.
[2] M. Auslander-D. Buchsbaum, *Codimension and multiplicity.* Annals of Math. *68* (1958) 625–657.
[3] L. Avramov, *Homolcof local flat extensions and complete intersection defects.* Math. Annalen *228* (1977) 27–38.
[4] T. Gulliksen, *Proof of the existence of minimal R-algebra resolutions.* Acta Math. *120* (1968 53–58.
[5] T. Gulliksen, *A homological characterization of local complete intersections.* Compositio Math. *23* (1971) 251–256.
[6] J. Tate, *Homology of noetherian rings and local rings.* Illinois J. Math. *1* (1957) 14–27.

*Département de Mathématiques*
*EPFL Lausanne*
*Avenue de Cour*
*CH-1007 Lausanne*

Reçu le 6 avril 1982