Classification de feuilletages totalement géodésiques de codimension un.

Comment. Math. Helvetici **58** (1983) 543–572 0010-2571/83/040543-30$01.50 + 0.20/0

Classification des feuilletages totalement géodésiques de codimension un

ETIENNE GHYS

Introduction

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension un sur une variété M. Pour étudier $\mathcal{F}$, il peut être utile de construire une métrique riemannienne sur M adaptée au feuilletage. Par exemple, on peut chercher une métrique telle que les feuilles de $\mathcal{F}$ soient des sous-variétés minimales. Ce problème a été résolu dans [Sul], où il est montré qu'une telle métrique existe relativement fréquemment (précisément lorsqu'aucune réunion finie de feuilles compactes orientées ne borde un domaine de M. Voir aussi [Hae], [Rum].)

De manière analogue, on peut chercher une métrique telle que $\mathcal{F}$ soit totalement géodésique, c'est à dire telle que toute géodésique de M tangente à $\mathcal{F}$ en un point soit entièrement contenue dans une feuille. Cela revient à imposer l'annulation en tout point de la seconde forme quadratique fondamentale des feuilles. Divers auteurs ont considéré le problème de l'existence d'une telle métrique ainsi que le problème inverse d'existence d'un feuilletage totalement géodésique sur une variété riemannienne fixée. Ceux-ci obtiennent certaines obstructions portant sur la variété ([Abe], [Bri], [Dom], [Fer]), sur les classes caractéristiques ([Joh–Nav]) ou encore sur le comportement qualitatif de $\mathcal{F}$([Blu–Heb], [Joh–Whi]).

Dans un travail précédent, en collaboration avec Yves Carrière ([Car–Ghy]), nous avions étudié ce même problème en dimension trois. Rappelons le résultat obtenu.

Soit A une matrice diagonalisable de $SL_2(\mathbb{Z})$. Le feuilletage du plan $\mathbb{R}^2$ par droites parallèles à l'une des directions propres de A définit un feuilletage sur le tore $T^2=\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Par produit, nous obtenons un feuilletage de codimension 1 sur $T^2\times\mathbb{R}$ clairement invariant par l'application:

$$(m, t)\in T^2\times\mathbb{R}\mapsto(A(m), t+1)\in T^2\times\mathbb{R}.$$

La variété quotient, notée T^3_A est donc munie d'un feuilletage de codimension

1. (cf [Ghy–Ser] pour une description plus précise de ce feuilletage). Le résultat du travail précédemment cité est le

THEOREME. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension* 1 *(orientable, de classe C^∞) sur une* 3*-variété fermée orientable. Alors, il existe une métrique riemannienne telle que $\mathcal{F}$ soit totalement géodésique si et seulement si*

· *soit $\mathcal{F}$ est transverse à une action localement libre du cercle (i.e. une fibration de Seifert)*

· *soit la variété ambiante est difféomorphe à T^3_A (pour une certaine matrice A) et le feuilletage $\mathcal{F}$ est différentiablement conjugué au feuilletage décrit ci-dessus.*

En un certain sens, il y a donc peu de feuilletages totalement géodésiques en dimension 3. Le but de ce travail est de montrer que cette pauvreté relative subsiste en dimension supérieure. Plus précisément, nous nous proposons de *décrire explicitement tous les feuilletages totalement géodésiques de codimension* 1 *sur les variétés riemanniennes compactes et sur certaines variétés non compactes.*

Commençons par imiter la construction précédente, de façon à obtenir un certain nombre d'exemples de feuilletages de codimension 1. Pour cela, supposons donnés

1°) un entier $n \geqslant 2$

2°) un vecteur v de $\mathbb{R}^n$ dont les coordonnées sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$.

3°) une forme linéaire ω sur $\mathbb{R}^n$ telle que $\omega(v) \neq 0$.

A ces trois premières données, nous pouvons associer le groupe $G(v, \omega)$ formé des matrices A de $SL(n, \mathbb{Z})$ telles que v soit vecteur propre de A et ω vecteur propre de ${}^tA$. De plus, nous pouvons considérer le groupe $\tilde{G}(v, \omega)$ formé des transformations affines du tore T^n de la forme

$$x \in \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \rightarrow Ax + b \in \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$$

où

$$A \in G(v, \omega) \text{ et } b \in \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n.$$

Supposons de plus que nous disposons

4°) d'une variété B

5°) d'un morphisme φ du groupe fondamental de B dans $\tilde{G}(v, \omega)$. Pour simplifier les notations, nous noterons (D) le quintuplet $(n, v, \omega, B, \varphi)$. A l'aide de (D), nous pouvons faire la construction naturelle suivante. Le tore T^n est muni du feuilletage linéaire de codimension 1 défini par la forme ω. Soit $\tilde{B}$ le revêtement universel de B. Par produit, nous obtenons un feuilletage de codimension 1 sur

$\tilde{B}\times T^n$ évidemment invariant par toutes les transformations

$$(x, y)\in\tilde{B}\times T^n \mapsto (\gamma\cdot x, \varphi(\gamma)(y))\in\tilde{B}\times T^n$$

(Ici γ représente un élément du groupe fondamental de B et $\gamma\cdot x$ l'action correspondante sur $\tilde{B}$.)

On obtient, par passage au quotient, une variété feuilletée $(M_D, \mathcal{F}_D)$ que nous appellerons "le feuilletage modèle associé à (D)." La variété M_D fibre sur B avec une fibre difféomorphe à T^n. Remarquons que le vecteur v définit sur T^n un champ de directions invariant par l'action de $\tilde{G}(v, \omega)$. On obtient donc un feuilletage canonique $\mathcal{G}_D$, de dimension 1, transverse à $\mathcal{F}_D$.

Nous pouvons maintenant formuler notre résultat.

THEOREME 1. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension* 1, *transversalement orientable, de classe C^∞, sur une variété compacte orientable M. Il existe une métrique riemannienne sur M telle que $\mathcal{F}$ soit totalement géodésique si et seulement si:*

I) *soit $\mathcal{F}$ est transverse à une action localement libre du cercle* (*c'est à dire aux fibres d'une fibration de Seifert généralisée sur M*).

II) *soit M est difféomorphe à M_D et $\mathcal{F}$ est différentiablement conjugué à un "feuilletage modèle" associé à un certain quintuplet* $(D)=(n, v, \omega, B, \varphi)$.

Lorsque la variété M n'est pas compacte mais complète, nous obtenons le résultat partiel suivant:

THEOREME 2. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension* 1, *transversalement orientable sur une variété orientable et non compacte M. Supposons que l'une des conditions suivantes est réalisée*:

1) *le groupe fondamental de M est de type fini et le feuilletage est de classe C^∞.*

2) *le feuilletage $\mathcal{F}$ est analytique.*

Alors, il existe une métrique riemannienne complète sur M telle que $\mathcal{F}$ soit totalement géodésique si et seulement si:

I) *soit $\mathcal{F}$ est transverse à une action localement libre du cercle.*

II) *soit M est difféomorphe à M_D et $\mathcal{F}$ est différentiablement conjugué à un feuilletage modèle associé à un certain quintuplet* $(n, v, \omega, B, \varphi)$

III) *soit $\mathcal{F}$ est transverse à une fibration* (*triviale*) *de M de fibre $\mathbb{R}$ et de base B dont la restriction à chaque feuille est un revêtement.*

Les étapes essentielles de la démonstration sont les suivantes: si $\mathcal{F}$ est totalement géodésique, le flot orthogonal est riemannien (partie 1), ce qui impose une structure très rigide pour ce flot. Dans un certain fibré principal $\hat{M}$ au-dessus de M, les adhérences des orbites du flot orthogonal (relevé dans $\hat{M}$) fibrent $\hat{M}$. Ces fibres sont des tores. En étudiant la trace sur ces tores du feuilletage $\mathcal{F}$ relevé dans $\hat{M}$, on voit apparaître une distinction entre les cas I et II (partie 2). Dans la partie 3, nous traitons le cas des feuilletages de type I. Pour les feuilletages de type II, nous montrons (partie 4) que la structure induite par le feuilletage sur un tore est essentiellement affine, ce qui nous permet de réduire le groupe structural de la fibration étudiée à un groupe dont l'homotopie est simple (seul le Π_1 est non nul). Il s'agit ensuite de déformer la métrique riemannienne à travers des métriques rendant $\mathcal{F}$ géodésique de manière à ce que le groupe structural de la nouvelle fibration en tores devienne discret (partie 5). Les parties 6 et 7 permettent de "redescendre" les résultats obtenus de $\hat{M}$ dans M et règlent le cas où la variété est non compacte. On donne enfin (partie 8) quelques corollaires et remarques.

C'est grâce à de nombreuses discussions avec Yves Carrière que ce travail a pu être réalisé. Sans son étude très détaillée des flots riemanniens, il aurait été impossible d'aborder ce problème. Je le remercie pour son intérêt et son amitié.

I. Feuilletages totalement géodésiques et flots riemanniens

Soit donc $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension 1, de classe C^∞, transversalement orientable sur une variété orientable M que nous supposerons compacte pour commencer. Soit g une métrique riemannienne sur M et $\mathcal{F}^\perp$ le feuilletage de dimension 1 orthogonal à $\mathcal{F}$. Dans [Car–Ghy], nous remarquions que:

PROPOSITION 1-1. *$\mathcal{F}$ est totalement géodésique pour la métrique* g *si et seulement si* g *est quasi-fibrée pour $\mathcal{F}^\perp$. Il existe une métrique riemannienne telle que $\mathcal{F}$ soit totalement géodésique si et seulement si $\mathcal{F}$ est transverse à un flot riemannien.*

En ce qui concerne les notions de métriques quasi-fibrées, de flots riemanniens, introduites par [Rei], nous référons à [Car 1–2] qui utilise le même language que le notre. En particulier, nous appellerons fréquemment "flot" un feuilletage de dimension 1 même si aucun paramétrage de ce feuilletage n'est donné.

La proposition 1-1 signifie que l'étude des feuilletages totalement géodésiques se ramène à celle des flots riemanniens qui admettent un feuilletage transverse de codimension 1. Or la structure des flots riemanniens est assez bien connue grâce à [Mol] et surtout grâce à [Car 1–2]. Résumons les résultats essentiels.

THEOREME 1-2 ([Mol]). *Soit $\mathscr{G}$ un feuilletage riemannien sur une variété compacte M, alors les adhérences des feuilles de $\mathscr{G}$ sont des sous-variétés et forment une partition de M.*

THEOREME 1-3 ([Car–Car], [Car 1–2]). *Soit $\mathscr{G}$ un flot riemannien* (ie $\dim \mathscr{G} = 1$) *sur une variété compacte M, alors les adhérences des orbites de $\mathscr{G}$ sont des tores T^n et $\mathscr{G}$ restreint à chaque adhérence est conjugué à un flot linéaire de T^n.*

Malheureusement les adhérences des orbites de $\mathscr{G}$ ne fibrent pas toujours M (leur dimension peut varier). Un procédé efficace pour éliminer ce problème est le suivant: soit $\hat{M}$ la variété fibrée au dessus de M dont la fibre au dessus du point x de M est constituée des repères orthonormés de l'orthogonal de $T_x(\mathscr{G})$ dans $T_x(M)$. Il est clair que $\hat{M}$ est un $SO(p)$ fibré principal où $p = \dim M - \dim \mathscr{G}$.

THEOREME 1-4 ([Mol]). *Il existe un feuilletage naturel $\hat{\mathscr{G}}$ sur $\hat{M}$ de même dimension que $\mathscr{G}$ tel que:*

1°) *$\hat{\mathscr{G}}$ est invariant par l'action de $SO(p)$ sur $\hat{M}$*

2°) *$\hat{\mathscr{G}}$ se projette sur $\mathscr{G}$ dans M*

3°) *$\hat{\mathscr{G}}$ est transversalement parallélisable complet; en particulier les adhérences des feuilles de $\hat{\mathscr{G}}$ fibrent $\hat{M}$ et la restriction de $\hat{\mathscr{G}}$ à l'une de ces adhérences admet une structure transverse de Lie.*

Rappelons qu'un feuilletage admet une structure transverse de Lie si son pseudo-groupe transverse est un pseudo-groupe de translations sur un groupe de Lie. Un feuilletage est transversalement parallélisable complet s'il existe p champs de vecteurs complets et transverses $X_1, \ldots, X_p$, tels que, d'une part, ils forment une base du fibré normal en chaque point et que, d'autre part, les flots associés soient des automorphismes du feuilletage.

La fibration de $\hat{M}$ ainsi obtenue s'appelle "la fibration basique."

Soit maintenant $\mathscr{F}$ un feuilletage totalement géodésique sur M. Au flot riemannien $\mathscr{F}^\perp$ correspond le fibré principal $\hat{M}$ muni du flot riemannien $\hat{\mathscr{F}}^\perp$. Bien entendu, nous pouvons considérer l'image réciproque du feuilletage $\mathscr{F}$ dans $\hat{M}$. Le feuilletage $\hat{\mathscr{F}}$ (de codimension 1) ainsi obtenu est évidemment totalement géodésique, son flot orthogonal étant $\hat{\mathscr{F}}^\perp$. L'adhérence d'une orbite de $\hat{\mathscr{F}}^\perp$ est un tore T^n et ces adhérences fibrent $\hat{M}$. Enfin, sur chacune de ces adhérences, le flot $\hat{\mathscr{F}}^\perp$ est conjugué à un flot linéaire et il est donc transversalement de Lie modelé sur le groupe $\mathbb{R}^{n-1}$. Le couple $(\hat{\mathscr{F}}, \hat{\mathscr{F}}^\perp)$ peut donc être considéré comme une "désingularisation" de $(\mathscr{F}, \mathscr{F}^\perp)$. Nous étudierons d'abord $(\hat{\mathscr{F}}, \hat{\mathscr{F}}^\perp)$ pour redescendre ensuite dans M.

Nous sommes déjà en mesure de démontrer la partie facile du théorème que nous avons en vue. La proposition suivante est déjà dans [Car–Ghy].

PROPOSITION 1-5. *Tout feuilletage transverse à une action localement libre de S^1 est totalement géodésique pour une certaine métrique riemannienne complète.*

DEMONSTRATION. Une action de S^1 peut être rendue isométrique, donc riemannienne.

PROPOSITION 1-6. *Soit $\pi: M \to B$ une fibration (triviale) de fibre $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage transverse à π tel que la restriction de π à toute feuille de $\mathcal{F}$ est un revêtement. Alors il existe une métrique riemannienne complète telle que $\mathcal{F}$ soit totalement géodésique.*

DEMONSTRATION. On part d'une métrique complète sur B que l'on transporte sur les feuilles de $\mathcal{F}$ à l'aide de π. On étend la métrique ainsi construite en imposant aux fibres de π d'être orthogonales à $\mathcal{F}$. Puisque le choix de la métrique sur les fibres de π est arbitraire, on peut imposer à ces fibres d'avoir une longueur infinie de façon à obtenir une métrique complète sur M.

PROPOSITION 1-7. *Les feuilletages modèles $\mathcal{F}_D$ sont totalement géodésiques (pour une certaine métrique complète de M_D).*

DEMONSTRATION. Il suffit de montrer que le supplémentaire canonique $\mathcal{G}_D$ à $\mathcal{F}_D$ correspondant au vecteur v est un flot riemannien. On considère tout d'abord une métrique complète sur B et l'on munit M d'une métrique telle que la projection p de M_D sur B soit riemannienne. Soit U un ouvert trivialisant pour p. Les fibres de p au dessus de U peuvent être définies par une action de T^n sur $p^{-1}(U)$. En considérant la moyenne de al métrique dont nous disposons sur $p^{-1}(U)$ sous l'action de T^n, nous obtenons une métrique quasi-fibrée pour la restriction de $\mathcal{G}_D$ à $p^{-1}(U)$. En utilisant une partition de l'unité sur B, on construit une métrique quasi-fibrée complète sur M_D.

Tous les feuilletages cités dans le théorème sont donc bien totalement géodésiques.

Peut-être est-il bon de donner un exemple simple illustrant les constructions qui vont suivre. Soit X un champ de Killing sur S^2; ce champ possède deux singularités et toutes ses orbites sont fermées (de période 1 par exemple). Munissons $M = S^2 \times S^1$ d'une métrique riemannienne induisant sur chaque facteur $S^2 \times \{*\}$ la métrique usuelle et telle que le champ de vecteurs unitaires orthogonal à ces sphères $S^2\times\{*\}$ soit $N=\varepsilon X+\partial/\partial\theta$ où $\varepsilon\in\mathbb{R}$ et $\partial/\partial\theta$ représente le champ habituel sur S^1.

Le feuilletage $\mathcal{F}$ de M par sphères S^2 est totalement géodésique, l'adhérence d'une orbite de N est un tore T^2 sauf pour deux orbites fermées si ε est irrationnel. Si ε est rationnel toutes les orbites de N sont fermées et munissent M d'une fibration de Seifert. Le passage de M à $\hat{M}$ est ici le passage de $S^2\times S^1$ à $T_1(S^2)\times S^1\simeq SO(3)\times S^1$, le feuilletage $\hat{\mathcal{F}}$ est le feuilletage par fibres $SO(3)\times\{*\}$ et les adhérences des orbites de $\hat{\mathcal{F}}^\perp$ définissent maintenant une véritable fibration (en cercles si $\varepsilon\in\mathbb{Q}$, en tores T^2 sinon). La déformation de métrique que nous ferons plus loin consistera dans ce cas à approcher le réel ε par un rationnel.

II. La trace du feuilletage sur une fibre

Comme nous l'avons indiqué au paragraphe précédent, nous commençons par étudier la situation relevée dans $\hat{M}$. D'une manière générale, nous allons nous intéresser au groupe structural de la fibration basique. Soit F une fibre de cette fibration. Nous savons que F est difféomorphe à T^n et que la restriction de $\hat{\mathcal{F}}^\perp$ à F est linéaire. Etudions maintenant la trace de $\hat{\mathcal{F}}$ sur F.

PROPOSITION 2-1. *La restriction de $\hat{\mathcal{F}}$ à F peut être définie par une action localement libre de $\mathbb{R}^{n-1}$. Cette action préserve $\hat{\mathcal{F}}^\perp_{|F}$ et elle est définie à un automorphisme de $\mathbb{R}^{n-1}$ près. Trois cas sont possibles:*

type I_a: Toutes les feuilles de $\hat{\mathcal{F}}_{|F}$ sont compactes et $\hat{\mathcal{F}}_{|F}$ peut être défini par une action libre de T^{n-1}.

type I_b: Le feuilletage $\hat{\mathcal{F}}_{|F}$ possède au moins une feuille compacte et une feuille non compacte.

type II: Les feuilles de $\hat{\mathcal{F}}_{|F}$ sont denses. Il existe un homéomorphisme de T^n sur F linéarisant $\hat{\mathcal{F}}$ et $\hat{\mathcal{F}}^\perp$, ie tel que, dans ces coordonnées $\hat{\mathcal{F}}^\perp_{|F}$ soit constitué des droites parallèles à un vecteur v fixe de $\mathbb{R}^n$ (à coordonnées linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$) et $\hat{\mathcal{F}}_{|F}$ soit constitué des hyperplans parallèles à un hyperplan fixe d'équation $\omega=0$ où ω est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$.

DEMONSTRATION. La première partie résulte du fait que la restriction de $\hat{\mathcal{F}}^\perp$ à une fibre F est transversalement de Lie $\mathbb{R}^{n-1}$. Cela signifie que $\hat{\mathcal{F}}^\perp_{|F}$ peut être défini par des submersions locales sur $\mathbb{R}^{n-1}$, les changements de cartes opérant par translations sur $\mathbb{R}^{n-1}$. On peut donc définir sans ambiguïté $n-1$ champs de vecteurs sur F, tangents à $\hat{\mathcal{F}}_{|F}$, commutant deux à deux, et se projetant localement sur les champs $\dfrac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\dfrac{\partial}{\partial x_{n-1}}$ de $\mathbb{R}^{n-1}$. L'action localement libre ainsi construite préserve $\hat{\mathscr{F}}^{\perp}_{|F}$ puisque ces champs de vecteurs sont localement projetables sur $\mathbb{R}^{n-1}$.

La deuxième partie est une propriété bien connue des actions localement libres de $\mathbb{R}^{n-1}$ sur T^n. Approchant $\hat{\mathscr{F}}^{\perp}_{|F}$ par une fibration en cercles, on voit que $\hat{\mathscr{F}}_{|F}$ peut être défini par $(n-1)$ difféomorphismes du cercle commutant deux à deux. Ces difféomorphismes ont donc un point périodique en commun ou bien sont simultanément topologiquement conjugués à des rotations (cf. [Mor–Tsu] par exemple).

Supposons que toutes les feuilles de $\hat{\mathscr{F}}_{|F}$ sont fermées. Le stabilisateur d'un point m de F sour l'action de $\mathbb{R}^{n-1}$ est constant le long des feuilles de $\hat{F}_{|F}$ (car $\mathbb{R}^{n-1}$ est abélien). Ce stabilisateur est par ailleurs constant le long des orbites de $\hat{\mathscr{F}}^{\perp}_{|F}$ puisque l'action de $\mathbb{R}^{n-1}$ préserve $\hat{\mathscr{F}}^{\perp}_{|F}$. Par conséquent le stabilisateur est indépendant du point m et $\hat{\mathscr{F}}_{|F}$ peut être défini par une action libre de T^{n-1}.

Apres avoir étudié une fibre F de la fibration basique, étudions un voisinage de cette fibre.

LEMME 2-2. *Soit $\Pi : \hat{M} \to \hat{B}$ la fibration basique et x un point de $\hat{B}$. Soit F la fibre $\Pi^{-1}(x)$. Il existe un voisinage U de x et une trivialisation Ψ de Π au dessus de U:*

$$\Psi : F \times U \to \Pi^{-1}(U)$$

telle que:

1°) *pour toute feuille L de $\hat{\mathscr{F}}^{\perp}_{|F}$, le difféomorphisme Ψ envoie $L \times \{*\}$ sur une feuille de $\hat{\mathscr{F}}^{\perp}_{|\Pi^{-1}(U)}$.*

2°) *pour toute feuille L' de $\hat{\mathscr{F}}_{|F}$, le difféomorphisme Ψ envoie $L' \times U$ sur une feuille de $\hat{\mathscr{F}}_{|\Pi^{-1}(U)}$.*

DEMONSTRATION. Nous savons que $\hat{\mathscr{F}}^{\perp}$ est un feuilletage transversalement parallélisable complet. Si la dimension de $\hat{B}$ est p, il est donc facile de construire p champs de vecteurs $X_1, \ldots, X_p$ sur un voisinage de F dans $\hat{M}$ tels que

1°) les X_i sont tangents à $\hat{\mathscr{F}}$

2°) les flots locaux X_i^t associés aux X_i sont des automorphismes de $\hat{\mathscr{F}}^{\perp}$.

3°) les champs induits sur $\hat{B}$ forment une base de $T(\hat{B})$ au point x.

Dans ces conditions, la fonction

$$[(t_1, \ldots, t_p), m] \in \mathbb{R}^p \times U \mapsto X_1^{t_1} X_2^{t_2} \cdots X_p^{t_p}(m)$$

est définie pour $(t_1, \ldots, t_p)$ appartenant à un voisinage de $(0, \ldots, 0)$. Ce voisinage peut être identifié à un voisinage U de x et l'on obtient la trivialisation cherchée.

COROLLAIRE 2-3. *Soit* Diff $(F, \hat{\mathscr{F}}_{|F}, \hat{\mathscr{F}}^{\perp}_{|F})$ *le groupe des difféomorphismes de F préservant* $\hat{\mathscr{F}}_{|F}$ *et* $\hat{\mathscr{F}}^{\perp}_{|F}$ *muni de la topologie* C^{∞}. *Alors le groupe structural de la fibration basique peut se réduire à* Diff $(F, \hat{\mathscr{F}}_{|F}, \hat{\mathscr{F}}^{\perp}_{|F})$.

III. Les feuilletages de type I_a et I_b

Grâce à 2-1 et 2-2, nous avons obtenu certaines cartes locales pour la fibration basique Π. Pour étudier les changements de cartes, il nous faut étudier les homéomorphismes d'une fibre préservant la structure $(\hat{\mathscr{F}}, \hat{\mathscr{F}}^{\perp})$.

LEMME 3-1. *Supposons que* $(\hat{\mathscr{F}}, \hat{\mathscr{F}}^{\perp})$ *est de type* I_a *ou* I_b. *Soit h un homéomorphisme de* $F = \Pi^{-1}(x)$ *préservant* $\hat{\mathscr{F}}_{|F}$ *et* $\hat{\mathscr{F}}^{\perp}_{|F}$. *Alors h commute avec l'action de* $\mathbb{R}^{n-1}$ *sur F.*

DEMONSTRATION. Sot L une feuille compacte de $\hat{\mathscr{F}}_{|F}$. Celle ci s'identifie à T^{n-1} à l'aide de l'action de $\mathbb{R}^{n-1}$ nous disposons. Cette identification est unique à une translation près de T^{n-1}. Le flot $\hat{\mathscr{F}}^{\perp}_{|F}$ définit une application de premier retour de L dans L donc de T^{n-1} dans T^{n-1}. Cette application est clairement une translation à orbites denses.

Soit $L' = h(L)$. L'application de premier retour correspondant à L' est évidemment la même translation que celle de L. Par conséquent, puisque h préserve $\hat{\mathscr{F}}^{\perp}$, la restriction de h à L considérée comme homéomorphisme de L sur L' et donc de T^{n-1} sur T^{n-1} doit commuter avec une translation à orbites denses de T^{n-1}. Il est bien connu (et facile de vérifier) que cela implique que h/L est une translation. Dans le cas I_a, toutes les feuilles de $\hat{\mathscr{F}}_{|F}$ sont compactes et h commute avec l'action de $\mathbb{R}^{n-1}$ sur F. Dans le cas I_b, nous n'avons obtenu cette commutation que sur les feuilles compactes de $\hat{\mathscr{F}}_{|F}$. Notons $s.m$ l'action de l'élément s de $\mathbb{R}^{n-1}$ sur le point m de F. Pour tout s de $\mathbb{R}^{n-1}$, l'homéomorphisme

$$g_s : m \in F \to h^{-1}(s \cdot h(s^{-1} \cdot m)) \in F$$

préserve $(\hat{\mathscr{F}}_{|F}, \hat{\mathscr{F}}^{\perp}_{|F})$. Lorsque s varie et m reste fixe, le point $g_s(m)$ décrit une courbe tangente à $\hat{\mathscr{F}}_{|F}$. Lorsque m appartient à une feuille compacte, nous venons de voir que ce point ne dépend pas de s. Si maintenant m n'est pas situé sur une feuille compacte on peut construire un segment $[m, m']$ contenu dans $\hat{\mathscr{F}}^{\perp}_{|F}$ et tel que m' soit dans une feuille compacte de $\hat{\mathscr{F}}_{|F}$. En considérant la variation de ce segment par les g_s (s variable), on voit que le point m doit rester fixe, c'est à dire que h commute avec l'action de $\mathbb{R}^{n-1}$.

Nous pouvons maintenant commencer la démonstration du résultat principal de ce paragraphe.

PROPOSITION 3.2. *Si $(\hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathcal{F}}^{\perp})$ est de type I_a ou I_b, alors $\mathcal{F}$ est transverse à une action localement libre du cercle.*

DEMONSTRATION DANS LE CAS I_a: D'après le lemme 3-1 et le lemme 2-2 on peut définir sans ambiguïté une action de T^{n-1} sur $\hat{M}$ notée $(s, x) \mapsto s.x$ dont les orbites sont exactement les composantes connexes des traces des feuilles de $\hat{\mathcal{F}}$ sur les fibres de la fibration basique. Par ailleurs l'action naturelle de $SO(p)$ sur $\hat{M}$ préservant $(\hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathcal{F}}^{\perp})$, elle commute avec l'action de T^{n-1}. Nous disposons donc d'une action de $T^{n-1} \times SO(p)$ sur $\hat{M}$.

Nous nous proposons de construire une fibration en cercles de $\hat{M}$ dont les fibres soient tangentes à la fibration basique et transverses à $\hat{\mathcal{F}}$. Cette fibration doit être $SO(p)$ équivariante de façon à ce qu'elle induise dans M une fibration de Seifert, c'est à dire une action localement libre de S^1 transverse à $\mathcal{F}$.

Munissons $\hat{M}$ d'une métrique invariante par l'action de $T^{n-1} \times SO(p)$. Celle-ci nous permet de paramétrer $\hat{\mathcal{F}}^{\perp}$ et définit donc un flot Ψ_τ transverse à $\hat{\mathcal{F}}$ et commutant avec l'action de $T^{n-1} \times SO(p)$. Considérons, pour chaque m de $\hat{M}$, le temps de premier retour $T(m)$ de l'orbite de Ψ_τ passant par m sur la feuille de $\hat{\mathcal{F}}_{|\Pi^{-1}(\Pi(m))}$ passant par m. Puisque $\Psi_{T(m)}(m)$ et m appartiennent à la même orbite de l'action de T^{n-1}, il existe $s(m)$ de T^{n-1} tel que

$$\Psi_{T(m)}(m) = s(m) \cdot m$$

Il est clair que $T(m)$ et $s(m)$ ne dépendent en fait que de la projection $\Pi(m)$ de m dans la base de la fibration basique. En fait, le lemme de trivialisation 2-2 et le lemme 3-1 montrent que $s(m)$ ne dépend pas de m. Nous pouvons alors construire une action de S^1 sur M par:

$$\begin{aligned} &\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \hat{M} \to \hat{M} \\ &(\theta, m) \mapsto (-\theta s(m)) \cdot \Psi_{\theta T(m)}(m) \end{aligned}$$

(A priori $\theta s(m)$ ne signifie rien puisque $\theta \in \mathbb{R}$ et $s \in T^{n-1} = \mathbb{R}^{n-1}/\mathbb{Z}^{n-1}$, mais nous choisissons un représentant quelconque de $s(m)$ dans $\mathbb{R}^{n-1}$, ce qui ne pose aucune difficulté puisque $s(m)$ est en fait constant).

Ceci est bien une action de S^1 telle que nous la souhaitions.

Avant d'étudier le cas I_b, rappelons un résultat de [Car–Ghy], obtenu aussi sous une forme un peu différente dans [Joh–Whi].

PROPOSITION 3-3. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage totalement géodésique de codimension 1. Si $\mathcal{F}$ a une feuille compacte, alors $\mathcal{F}$ est transverse à une action localement libre de S^1.*

(Il suffit de remarquer que la feuille compacte est une section globale pour le flot $\mathcal{F}^\perp$ et celui ci est donc défini par la suspension d'une isométrie d'une variété compacte donc approchable par une isométrie périodique.)

Pour démontrer la proposition 3–2 dans le cas I_b, il nous suffit donc de démontrer le

LEMME 3-4. *Si $(\hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathcal{F}}^\perp)$ est de type I_b, alors $\hat{\mathcal{F}}$ (et donc $\mathcal{F}$) possède une feuille compacte.*

Fixons une fibre F de la fibration basique et soient m_1 et m_2 deux points de F. Commençons par montrer le résultat suivant:

LEMME 3-5. *Si m_1 et m_2 appartiennent à la même feuille de $\hat{\mathcal{F}}$, alors il existe un difféomorphisme h de F tel que $h(m_1)=m_2$ et h préserve $\hat{\mathcal{F}}_{|F}$ et $\hat{\mathcal{F}}^\perp_{|F}$.*

DEMONSTRATION DU LEMME 3-5. Si $\gamma:[0,1]\to\hat{M}$ est un chemin de $\hat{M}$ tangent à $\hat{\mathcal{F}}$ et reliant m_1 et m_2, la projection de γ dans $\hat{B}$ nous fournit un lacet $\gamma':S^1\to\hat{B}$. L'image réciproque de la fibration basique par γ' nous donne un T^n-fibré au dessus de S^1 dont la monodromie est le difféomorphisme souhaité. (On peut supposer cette monodromie dans Diff $(F, \hat{\mathcal{F}}_{|F}, \hat{\mathcal{F}}^\perp_{|F})$ d'après le corollaire 2.3).

Si l'on fait la même construction que dans le lemme précédent dans le cas où $m_1=m_2$ et γ un lacet tangent à $\hat{\mathcal{F}}$, et si l'on utilise le lemme 3-1, on obtient le

LEMME 3-6. *Si c est un lacet de F tangent à $\hat{\mathcal{F}}_{|F}$, alors c considéré comme lacet d'une feuille de $\hat{\mathcal{F}}$, est dans le centre du groupe fondamental de cette feuille de $\hat{\mathcal{F}}$.*

DEMONSTRATION DU LEMME 3-4. (et donc de la proposition 3-2 dans le cas I_b via la proposition 3-3).

Rappelons tout d'abord que $\hat{\mathcal{F}}_{|F}$ peut être défini par la suspension de $(n-1)$ difféomorphismes du cercle de classe C^∞ et commutant deux à deux.

Soit $K\subset F$ la réunion des feuilles compactes de $\hat{\mathcal{F}}_{|F}$. D'après les hypothèses, K est un fermé qui n'est ni vide ni égal à F. Soit K_1 la frontière de K. Tout difféomorphisme de F préservant $\hat{\mathcal{F}}_{|F}$ préserve K et donc K_1. D'après le lemme 3-5, K_1 est la trace sur F d'un fermé de $\hat{M}$ qui est saturé par $\hat{\mathcal{F}}$. Ce fermé doit contenir un ensemble minimal de $\hat{\mathcal{F}}$. Si l'on suppose que $\hat{\mathcal{F}}$ ne possède pas de feuilles compactes, c'est donc que K_1 contient la trace sur F d'un minimal exceptionnel de $\hat{\mathcal{F}}$.

D'après le théorème de Sacksteder ([Sac]) une feuille de ce minimal contient un lacet dont l'holonomie est hyperbolique (c'est à dire dont la dérivée au point fixe est différente de 1). D'après [Ste], on peut supposer que ce germe d'holonomie est linéaire. Rappelons par ailleurs que tout germe de difféomorphisme qui commute avec une contraction linéaire est lui même linéaire et donc hyperbolique s'il n'est pas l'identité.

Observons que l'holonomie des feuilles de $K_1 \subset F$ est non triviale car arbitrairement près d'une feuille de K_1, il y a des feuilles non compactes. En combinant l'observation faite précédemment avec le lemme 3-6, on en déduit qu'il existe un lacet c tangent à une feuille de K_1 dont l'holonomie est hyperbolique. Soit λ la dérivée de cette holonomie au point fixe. Remarquons que toutes les feuilles compactes de $\hat{\mathcal{F}}_{|F}$ sont des tores T^{n-1} et que leurs groupes fondamentaux sont tous canoniquement isomorphes. Dans chaque feuille compacte de $\hat{\mathcal{F}}_{|F}$, nous pouvons construire un lacet homotope à c et considérer l'holonomie de ce lacet. On obtient ainsi un germe de difféomorphisme de $\mathbb{R}$ ayant un point fixe. Soit $K_2 \subset K_1$ la réunion des feuilles de K_1 telles que la dérivée de ce germe soit égale à λ en son point fixe. Il est clair que K_2 est invariant par tout difféomorphisme de F préservant $(\hat{\mathcal{F}}_{|F}, \hat{\mathcal{F}}^{\perp}_{|F})$ (On utilise ici encore le lemme 3-1 impliquant qu'un tel difféomorphisme doit préserver la classe d'homotopie de c.)

Mais K_2 ne peut contenir qu'un nombre fini de feuilles compactes de $\hat{\mathcal{F}}_{|F}$. En effet, le difféomorphisme C^∞ du cercle associé à c ne peut avoir qu'un nombre fini de points fixes où sa dérivée est égale à λ. (La variation totale de la dérivée doit être finie.)

Nous avons donc trouvé un nombre fini de feuilles compactes de $\hat{\mathcal{F}}_{|F}$ invariantes par tous les difféomorphismes de F préservant $(\hat{\mathcal{F}}_{|F}, \hat{\mathcal{F}}^{\perp}_{|F})$. Cette réunion finie contient la trace sur F d'une feuille compacte de $\hat{\mathcal{F}}$ d'après 3.5.

IV. Réduction du groupe structural dans le cas II

De même que pour le cas I, il nous faut obtenir des informations sur les homéomorphismes des fibres basiques préservant le couple de feuilletages $(\hat{\mathcal{F}}_{|F}, \hat{\mathcal{F}}^{\perp}_{|F})$.

LEMME 4-1. *Soit h un homéomorphisme du tore T^n tel que*

1°) *h préserve les orbites du flot linéaire parallèle au vecteur v à coordonnées linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$.*

2°) *h préserve le feuilletage linéaire de codimension 1 transverse à v, à feuilles denses, défini par la forme linéaire $\omega = 0$.*

Alors h est en fait un difféomorphisme affine du type $h(x) = Ax + b$ où $A \in G(v, \omega) \subset SL(n, \mathbb{Z})$ et $b \in T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.

DEMONSTRATION. Il est bien connu que le feuilletage de T^n d'équation $\omega = 0$ possède, à une constante multiplicative près, une unique mesure transverse invariante (au sens de [Pla]). Cette mesure n'est autre que celle obtenue par intégration de ω. Par conséquent, cette mesure transverse est multipliée par une constante λ sous l'action de l'homéomorphisme h. C'est-à-dire que h est "transversalement affine." Puisque h préserve les orbites du flot linéaire parallèle à v, on en déduit que la restriction de h à toute droite parallèle à v est affine de pente λ.

Soit d'autre part A la matrice de $SL(n, \mathbb{Z})$ induite par h sur $H_1(T^n, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^n$. Comme h préserve deux feuilletages linéaires, il est facile de voir que A préserve les "nombres de rotation" de ces feuilletages. Plus précisément v est vecteur propre de A (car v est le "vecteur de rotation" du feuilletage linéaire de dimension 1 parallèle à v). De même ω est vecteur propre de ${}^tA$ (car ω est la "forme de rotation" du feuilletage défini par ω). Il est même clair que ${}^tA(\omega) = \lambda\omega$ d'après l'interprétation de ω comme mesure transverse faite plus haut.

Considérons maintenant l'homéomorphisme $h' = A^{-1} \circ h$. Il préserve le couple de feuilletages et, restreint à chaque orbite du flot parallèle à v, c'est une translation. En composant h' avec une translation adéquate, on obtient un homéomorphisme h'' ayant un point fixe, donc toute une droite dense parallèle à v formée de points fixes, donc h'' est l'identité. Par conséquent h était affine.

Introduisons maintenant un entier k dont le rôle sera important par la suite. Les feuilles de $\omega = 0$ sont obtenues par une action localement libre de $\mathbb{R}^{n-1}$, ce sont donc des "cylindres" du type $T^k \times \mathbb{R}^{n-1-k}$. Nous appellerons k l'"invariant de $(\hat{\mathscr{F}}, \hat{\mathscr{F}}^\perp)$." De manière équivalente si ω s'écrit $\sum_{i=1}^n a_i\, dx_i$ dans une base rationnelle de $\mathbb{R}^n$, alors $n - k$ est le rang sur $\mathbb{Q}$ du système $\{a_i\}$.

Résumons maintenant les lemmes 2-1, 2-2 et 4-1 en indiquant ce qu'ils signifient pour la fibration basique $\Pi : \hat{M} \to \hat{B}$. Tout point x de $\hat{B}$ admet un voisinage trivialisant V et une carte (lemme 2-2)

$$V \times F \to \Pi^{-1}(V)$$

Identifiant F à T^n à l'aide de l'homéomorphisme "linéarisant" du lemme 2-1, nous obtenons une carte

$$V \times T^n \to \Pi^{-1}(V)$$

Sur l'intersection de deux ouverts trivialisants V_1 et V_2, les changements de cartes doivent être du type:

$$(x, m) \in V_1 \times T^n \mapsto (x, \psi_x(m)) \in V_2 \times T^n$$

pour x dans $V_1 \cap V_2$. D'après 4-1, $\psi_x(m)$ s'écrit $\psi_x(m) = A_x(m) + b(x)$, où $b(x) \in \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ et $A_x \in G(v, \omega)$. Puisque le changement de carte doit préserver le feuilletage $\hat{\mathcal{F}}$, on voit que la courbe

$$x \in V \mapsto b(x) \in \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$$

doit rester tangente à un hyperplan parallèle à $\omega = 0$.

Nous allons munir $\tilde{G}(v, \omega)$ d'une topologie de la manière suivante. Le groupe de Lie T^n est feuilleté par $\omega = 0$, il peut donc être muni de la topologie des feuilles. On peut alors munir $\tilde{G}(v, \omega)$ (qui ensemblistement est $G(v, \omega) \times T^n$) d'une topologie en donnant à $G(v, \omega)$ la topologie discrète et à T^n la topologie des feuilles. Nous appellerons cette topologie la "topologie des feuilles de $\tilde{G}(v, \omega)$."

Ce paragraphe peut maintenant se résumer:

PROPOSITION 4.2. *Le groupe structural de la fibration basique associée à un feuilletage de type II peut se réduire à $\tilde{G}(v, \omega)$ muni de la "topologie des feuilles."*

REMARQUE 4-3. A priori, les cartes que nous avons construites pour la fibration basique ne sont que continues. Cependant, nous pouvons les utiliser pour transporter la structure différentiable de $V \times T^n$ dans $\hat{M}$. Nous obtenons ainsi une nouvelle structure différentiable dans $\hat{M}$ pour laquelle $\hat{\mathcal{F}}$ et $\hat{\mathcal{F}}^\perp$ restent différentiables. De même l'action naturelle de $SO(p)$ sur $\hat{M}$ préservant $\hat{\mathcal{F}}$ et $\hat{\mathcal{F}}^\perp$, le lemme 4-1 nous dit que cette action reste elle aussi différentiable dans cette nouvelle structure. Dorénavant, nous supposerons $\hat{M}$ muni de cette structure. Nous verrons cependant dans la partie VI que ce changement de structure était en fait inutile.

REMARQUE 4-4. La composante connexe de l'identité de $\tilde{G}(v, \omega)$ munie de la topologie des feuilles est homéomorphe à $T^k \times \mathbb{R}^{n-1-k}$. Par conséquent le groupe fondamental de $\tilde{G}(v, \omega)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^k$ et les groupes d'homotopie d'ordres supérieurs sont nuls. L'invariant k est donc l'unique obstruction à ce que $\tilde{G}(v, \omega)$ ait le type d'homotopie d'un groupe discret. Notre but est de ramener l'étude des feuilletages de type II aux feuilletages modèles pour lesquels le groupe structural de la fibration basique est discret. Ceci explique l'importance de l'invariant k dans ce qui suit.

V. Déformation du flot orthogonal

Le but de ce paragraphe est de montrer que si l'invariant k est non nul, on peut déformer $\hat{\mathcal{F}}^{\perp}$ à travers les flots riemanniens pour obtenir un flot $\hat{\mathcal{G}}$ tel que l'invariant k associé à $(\hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathcal{G}})$ soit nul. En d'autres termes, nous allons perturber la métrique sur la variété de telle sorte que l'adhérence d'une orbite du flot orthogonal baisse de dimension et que la trace de $\hat{\mathcal{F}}$ sur ces nouveaux tores soit par plans (et non par cylindres $T^k \times \mathbb{R}^{n-k-1}$). Evidemment cette déformation de métrique se fait à travers des métriques rendant $\hat{\mathcal{F}}$ totalement géodésique.

Le groupe $\tilde{G}(v, \omega)$ se surjecte sur $\pi_0(\tilde{G}(v, \omega))$ et donc sur $G(v, \omega)$. Ceci permet de construire un morphisme "d'holonomie" de la fibration basique:

$$H: \pi_1(\hat{B}) \to G(v, \omega)$$

Remarquons que si w est un vecteur propre pour toutes les matrices $H(\gamma)$, nous pouvons sans difficulté construire sur les fibres de la fibration basique, un feuilletage de dimension 1 dont les feuilles sont les droites parallèles à w ce qui a un sens intrinsèque puisque $\mathbb{R} \cdot w$ est fixe par $H(\gamma)$. Notre but est de montrer qu'il existe effectivement de tels vecteurs dès que k est non nul, ce qui nous permettra d'effectuer la déformation souhaitée de $\hat{\mathcal{F}}^{\perp}$. Pour cela, nous utiliserons quelques lemmes d'algèbre linéaire.

LEMME 5-1. *Si $k \neq 0$ et si $A \in G(v, \omega)$, soit λ le réel tel que $A(v) = \lambda v$. Alors λ est un nombre algébrique de degré strictement inférieur à n.*

DEMONSTRATION. Par définition de l'entier k, la forme ω ne dépend que de $n-k$ coordonnées dans une certaine base rationnelle $(e_i)_{i=1,n}$ de $\mathbb{R}^n$. C'est-à-dire que ω s'écrit

$$\omega = \sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i e_i^*$$

où e_i^* représente la base duale de e_i et α_i est un réel.

Puisque ω est vecteur propre de ${}^tA$ et $\omega(v) \neq 0$, il est clair que ${}^tA\ \omega = \lambda\omega$. Si l'on note (a_{ij}) les coefficients de ${}^tA$ dans la base e_i^*, cette dernière égalité ainsi que l'écriture de ω montrent que λ est aussi valeur propre de la sous-matrice de ${}^tA$ formée des a_{ij} avec i et j compris entre 1 et $n-k$. Par conséquent, λ est algébrique de degré inférieur à $n-k$.

LEMME 5-2. *Si $k \neq 0$ et si $A \in G(v, \omega)$, alors v n'est pas un vecteur propre simple de A.*

DEMONSTRATION. On suppose toujours que les coordonnées de v sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$. Si v était un vecteur propre simple, les $(n-1)$ dernières lignes du système

$$A(v_1, \dots, v_n) = \lambda(v_1, \dots, v_n)$$

avec v_1 fixé et $v_2, \dots, v_n$ inconnus, formeraient un système de Cramer. Par conséquent les coordonnées $v_2, \dots, v_n$ pourraient être calculées rationnellement à l'aide de v_1 et de λ. C'est-à-dire que les rapports $\frac{v_2}{v_1}, \dots, \frac{v_n}{v_1}$ appartiendraient au corps $\mathbb{Q}(\lambda)$. Celui-ci étant de dimension strictement inférieure à n, il existe des rationnels α_i tels que

$$\alpha_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \frac{v_i}{v_1} = 0.$$

Ceci contredit le fait que les v_i sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

Les deux lemmes précédents nous ont permis de trouver d'autres vecteurs propres pour chaque A de $G(v, \omega)$. Notre but cependant est de trouver un vecteur propre *commun* à tous les $H(\gamma)$ qui soit différent de v. La situation est en fait très simple grâce au

LEMME 5-3. *$G(v, \omega)$ est un groupe abélien libre de rang au plus $n-1$.*

DEMONSTRATION. Considérons le morphisme θ de $G(v, \omega)$ dans $\mathbb{R}^*$ associant à chaque matrice A de $G(v, \omega)$ la valeur propre λ telle que $A(v) = \lambda v$. Ce morphisme est injectif; en effet, si $A(v) = v$, alors le noyau de A-Id est un sous-espace rationnel de $\mathbb{R}^n$ contenant v, c'est donc $\mathbb{R}^n$ tout entier (nous disons qu'un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ est rationnel s'il possède une base formée de vecteurs rationnels). Ceci montre que $G(v, \omega)$ est abélien. On montre de même que si $\theta(A)$ est rationnel, alors $A = id$.

Ecrivons l'égalité $A(v) = \lambda v$ sous la forme

$$\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \cdot & \cdots & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Ceci permet d'écrire

$$\lambda = a_1 + a_2 \frac{v_2}{v_1} + \cdots + a_n \frac{v_n}{v_1}.$$

L'image de θ est donc contenue dans un $\mathbb{Q}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ de dimension au plus n. Le groupe $G(v, \omega)$ est donc abélien libre de rang au plus n. Si ce rang était exactement n, on trouverait une matrice A de $G(v, \omega)$ non triviale avec $\theta(A)$ rationnel.

REMARQUE 5-4. Pour v et ω "génériques," le groupe $G(v, \omega)$ est trivial. Lorsqu'il est non trivial, le rang de $G(v, \omega)$ peut effectivement atteindre $n-1$. En effet, soit A une matrice entière dont le polynôme caractéristique est $(-1)^n X(X-b_1) \cdots (X-b_{n-1})+1$ où les b_i sont des entiers arbitraires. Alors, les matrices A, $A-b_1\, I, \ldots, A-b_{n-1}\, I$ sont de déterminant 1 et commutent deux à deux. Le produit de ces n matrices est $(-1)^{n+1}\, I$, mais on peut choisir les entiers b_i de telle sorte qu'elles engendrent un groupe abélien libre de rang $n-1$. On peut par ailleurs choisir les b_i de telle sorte que A soit diagonalisable. On appelle alors v l'un des vecteurs propres et ω la forme linéaire valant 1 sur v et s'annulant sur tous les autres vecteurs propres. On obtient ainsi un exemple où $G(v, \omega)$ est de rang $n-1$.

Les trois lemmes précédents nous mènent alors au

LEMME 5-5. *Si $k \geq 1$, il existe w non multiple de v tel que w soit un vecteur propre commun à tous les éléments de $G(v, \omega)$.*

DEMONSTRATION. Le groupe $G(v, \omega)$ opère sur $\mathbb{R}^n$; par hypothèse la droite $\mathbb{R} \cdot v$ est fixe ainsi que le noyau de ω. Nous avons donc une action

$$G(v, \omega) \times \operatorname{Ker} \omega \to \operatorname{Ker} \omega$$

D'après le lemme 5-2, le vecteur propre v n'est pas simple. Chaque élément de $G(v, \omega)$ admet donc dans Ker ω un vecteur propre correspondant à la même valeur propre que v. Puisque $G(v, \omega)$ est abélien, le théorème de Lie permet de conclure.

Nous en arrivons au résultat principal de ce paragraphe.

PROPOSITION 5-6. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage totalement géodésique tel que $(\hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathcal{F}}^{\perp})$ soit du type II. Alors, il existe une (autre) métrique riemannienne sur M telle que si $\mathcal{G}$ est le nouveau flot orthogonal à $\mathcal{F}$ et $\hat{\mathcal{G}}$ le nouveau flot orthogonal à $\hat{\mathcal{F}}$,* *on ait:*

1°) *ou bien $\mathscr{G}$ est défini par une action localement libre du cercle.*

2°) *ou bien la fibration basique correspondante à $(\hat{\mathscr{F}}, \hat{\mathscr{G}})$ a un groupe structural réductible à un groupe discret.*

DEMONSTRATION. Le groupe structural de la fibration basique peut se réduire à $\tilde{G}(v, \omega)$ muni de la topologie des feuilles. Ce groupe a le type d'homotopie d'un groupe discret dès que k est nul.

Si $k(\hat{\mathscr{F}}, \hat{\mathscr{F}}^{\perp})$ est non nul, le lemme 5-5 nous fournit un plan de dimension deux formé de vecteurs propres communs à toutes les matrices $H(\gamma)$. Ce plan contient, arbitrairement près de v, un vecteur w tel que les adhérences des orbites du flot linéaire de T^n parallèle à w sont des tores T^{n-1}. A ce vecteur correspond un flot riemannien $\hat{\mathscr{G}}$ transverse à $\hat{\mathscr{F}}$. Remarquons que ce flot est invariant par l'action de $SO(p)$ sur $\hat{M}$ car cette action préserve $(\hat{\mathscr{F}}, \hat{\mathscr{F}}^{\perp})$ et elle est donc affine sur les fibres (lemme 4-1).

Le feuilletage $\hat{\mathscr{G}}$ provient donc d'un feuilletage $\mathscr{G}$ riemannien sur M, transverse à $\mathscr{F}$. Les fibres de la fibration basique de $(\hat{\mathscr{F}}, \hat{\mathscr{G}})$ sont maintenant de dimension $n-1$.

Si $(\hat{\mathscr{F}}, \hat{\mathscr{G}})$ est de type I_a ou I_b, on utilise la proposition 3-3 et $\mathscr{F}$ est donc transverse à une action localement libre de S^1.

Si $(\hat{\mathscr{F}}, \hat{\mathscr{G}})$ est de type II, on itère le procédé jusqu'à obtenir un couple $(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ pour lequel l'invariant $k(\hat{\mathscr{F}}, \hat{\mathscr{G}})$ est nul.

Une fois cette déformation effectuée, le groupe structural de la fibration basique est réduit à un groupe ayant le type d'homotopie d'un groupe discret. Soit π_0 le quotient de $\tilde{G}(v, \omega)$ par la composante connexe de l'identité (isomorphe à $\mathbb{R}^{n-1}$). Si nous possédons une section s à la projection naturelle de $\tilde{G}(v, \omega)$ sur π_0, qui soit un homomorphisme de groupes, nous pouvons réduire le groupe structural au sous groupe discret $s(\pi_0)$ de $\tilde{G}(v, \omega)$ (En effet $\tilde{G}(v, \omega)/s(\pi_0)$ est contractile et homéomorphe à $\mathbb{R}^{n-1}$). Pour terminer la démonstration de la proposition, il nous suffit donc de montrer le

LEMME 5-8. *La projection naturelle de $\tilde{G}(v, \omega)$ sur π_0 admet une section qui est un homomorphisme de groupes.*

DEMONSTRATION. Notons τ le groupe $T^n/\operatorname{Ker}\omega$. Le groupe $G(v, \omega)$ opère sur T^n tout en préservant $\operatorname{Ker}\omega$, il opère donc sur τ. Un élément de π_0 s'écrit donc comme un couple (A, β) où A appartient à $G(v, \omega)$ et β à τ. Le produit de (A, β) et de (A', β') est $(AA', A\beta' + \beta)$ où $A\beta'$ désigne l'action de A sur β'. Soit pr la projection naturelle de T^n sur τ.

Trouver une section de π_0 dans $\tilde{G}(v, \omega)$ revient donc à trouver une section de

pr, de τ dans T^n, qui soit équivariante sous les actions de $G(v, \omega)$ sur T^n et τ.

Remarquons tout d'abord que la restriction de pr au sous-groupe de torsion de T^n (noté Tor (T^n)) est un isomorphisme sur le sous-groupe de torsion de τ (noté Tor (τ)). En effet, l'élément $(x_1, \ldots, x_n) \bmod \mathbb{Z}^n \oplus \operatorname{Ker} \omega$ est de torsion dans τ s'il existe un entier p tel que:

$$p(x_1, \ldots, x_n) = (k_1, \ldots, k_n) + (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

avec

$$(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n \text{ et } (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \operatorname{Ker} \omega.$$

Dans l'image réciproque de $(x_1, \ldots, x_n) \bmod \mathbb{Z}^n \oplus \operatorname{Ker} \omega$ par pr, il y a un unique élément de torsion, en l'occurrence

$$\left(x_1 - \frac{\alpha_1}{p}, \ldots, x_n - \frac{\alpha_n}{p}\right) \bmod \mathbb{Z}^n$$

La section s que nous cherchons est donc parfaitement définie sur Tor (τ).

D'autre part, la droite $\mathbb{R} \cdot v$ se plonge dans T^n. Ce plongement noté i, suivi de la projection pr de T^n sur τ donne une application surjective $pr \circ i$ de $\mathbb{R}$ sur τ. Le noyau de $pr \circ i$ est un groupe abélien libre engendré par n réels $\xi_1, \ldots, \xi_n$, linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

Le groupe $G(v, \omega)$ opère sur $\mathbb{R} \cdot v$ et sur τ. Bien entendu, l'application $pr \circ i$ est équivariante sous ces actions. Soient $A_1, \ldots, A_k$ un système de générateurs de $G(v, \omega)$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les valeurs propres correspondantes, i.e. $A_i v = \lambda_i v$. Il est clair que $\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z} \cdot \xi_i$ est invariant par multiplication par λ_i puisque c'est le noyau de l'application équivariante $pr \circ i$. Par conséquent, le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Q} \cdot \xi_i$ est aussi invariant par multiplication par λ_i. Soit K le sous-corps de $\mathbb{R}$ engendré par les réels λ_i. La droite $\mathbb{R}$ apparaît comme un K-espace vectoriel et $\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Q} \cdot \xi_i$ comme un K-sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$. Soit E un supplémentaire du K-sous-espace $\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Q} \cdot \xi_i$ dans $\mathbb{R}$. Nous avons alors:

$$\mathbb{R} = E \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Q} \xi_i \right)$$

$$\tau = \mathbb{R} / \operatorname{Ker}(pr \circ i) \simeq E \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \cdot \xi_i \right)$$

C'est à dire

$$\tau = pr \circ i(E) \oplus \mathrm{Tor}\,(\tau)$$

La section équivariante s que nous cherchons de τ dans T^n est maintenant définie par:

$$s(pr \circ i(e)) = i(e) \quad \text{si} \quad e \in E$$
$$s(\tau) = (pr \circ i_{|\mathrm{Tor}(T^n)})^{-1}(\tau) \quad \text{si} \quad \tau \in \mathrm{Tor}\,(\tau)$$

Cette section est clairement équivariante par l'action de $G(v, \omega)$ car E est un K-espace vectoriel. Ceci termine la démonstration du lemme 5-8 et donc de la proposition 5-7.

VI. Interprétation des résultats dans M

Partant du feuilletage $\mathcal{F}$ sur M, nous supposerons effectuée la déformation de la métrique dont il était question au paragraphe précédent. Nous nous placerons de plus dans le seul cas qui nous reste à étudier, c'est à dire celui où la fibration basique possède un groupe structural discret (cas 2 de la proposition 5-6). Nous noterons de nouveau $\hat{\mathcal{F}}^\perp$ pour $\hat{\mathcal{G}}$ car nous n'utiliserons plus l'ancienne métrique (non perturbée).

Puisque le groupe structural est discret, nous pouvons décrire $(\hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathcal{F}}^\perp)$ par:

$$\hat{M} = \tilde{\hat{B}} \times T^n/(x, m) \sim (\gamma \cdot x, \varphi(\gamma)(m))$$

où $\tilde{\hat{B}}$ est le revêtement universel de la base $\hat{B}$ de la fibration basique, γ un élément quelconque de $\pi_1(\hat{B})$ et φ un morphisme de $\pi_1(\hat{B})$ dans $\tilde{G}(v, \omega)$. Cet élément $\varphi(\gamma)$ s'écrit:

$$\varphi(\gamma)(m) = H(\gamma)(m) + b(\gamma)$$

où $b(\gamma) \in T^n$ et H est le "morphisme d'holonomie" déjà considéré. (Ici encore v et ω ne sont plus les mêmes qu'avant la perturbation de la métrique).

Dans cette description, le feuilletage $\hat{\mathcal{F}}$ est décrit par l'équation $\omega = 0$ et le feuilletage $\hat{\mathcal{F}}^\perp$ est donné, dans chaque $\{*\} \times T^n$ par la direction v.

On peut toujours supposer qu'il existe γ tel que $\varphi(\gamma)$ n'est pas une translation de T^n car sinon la fibration basique serait principale et l'on trouverait une action localement libre de S^1 transverse à $\mathcal{F}$.

Nous disposons donc d'une description explicite de $\hat{\mathcal{F}}$. Pour étudier $\mathcal{F}$, il faut étudier l'action de $SO(p)$ sur $\hat{M}$. Bien entendu cette action en induit une autre sur $\hat{B}$ puisqu'elle préserve la fibration basique. Nous nous proposons de montrer que $SO(p)$ opère librement sur $\hat{B}$ ce qui fera apparaître $(M, \mathcal{F})$ comme un modèle dont la base B est le quotient de $\hat{B}$ par $SO(p)$.

L'action de $SO(p)$ sur $\hat{M}$ se relève en une action de Spin (p) (le revêtement universel de $SO(p)$) sur $\tilde{\hat{B}} \times T^n$. Notons $R(x, m)$ l'image de l'élément (x, m) de $\tilde{\hat{B}} \times T^n$ sous l'action de l'élément R de Spin (p).

LEMME 6-1. *L'action de* Spin (p) *sur* $\tilde{\hat{B}} \times T^n$ *s'écrit sous la forme*:

$$R(x, m) = (R(x), m + u(R, x))$$

où $R(x)$ *désigne l'action de* Spin (p) *sur* $\tilde{\hat{B}}$ *et* $u(R, x)$ *est un vecteur du noyau de* ω.

DEMONSTRATION. Ecrivons tout d'abord que l'action étudiée préserve la fibration basique

$$R(x, m) = (R(x), f(R, x, m))$$

Pour x et R fixés, l'application $m \mapsto f(R, x, m)$ préserve le feuilletage, donc

$$R(x, m) = (R(x), A(R, x)m + u(R, x))$$

où $A(R, x) \in G(v, \omega)$ et $u(R, x) \in T^n$.

Par continuité $A(R, x) = id$. Si m et R sont fixés et x varie, $R(x, m)$ doit rester sur une même feuille de $\hat{\mathcal{F}}$. De même, si m et x sont fixés et R varie, $R(x, m)$ doit rester sur une même feuille de $\hat{\mathcal{F}}$. Par conséquent, lorsque R et x varient, $u(R, x)$ reste sur une feuille du feuilletage linéaire de T^n défini par ω. Puisque $u(id, x) = 0$, $u(R, x)$ reste sur la feuille passant par 0 et peut donc être identifié à un vecteur du noyau de ω. On a donc bien la description souhaitée de l'action:

$$R(x, m) = (R(x), m + u(R, x)) \quad \text{où} \quad u(R, x) \in \operatorname{Ker} \omega.$$

Nous nous proposons de simplifier encore cette écriture en montrant que l'on peut toujours supposer $u(R, x) \equiv 0$. La description que nous avons donnée de $(\hat{M}, \hat{\mathcal{F}})$ comme quotient de $\tilde{\hat{B}} \times T^n$ n'est évidemment pas unique. Si h est un difféomorphisme de $\tilde{\hat{B}} \times T^n$ préservant les deux feuilletages et commutant avec l'action de $\pi_1(\hat{B})$ sur $\tilde{\hat{B}} \times T^n$, nous pouvons considérer h comme un "changement de coordonnées" sur $\tilde{\hat{B}} \times T^n$ compatible avec nos données.

LEMME 6-2: *Il existe un tel difféomorphisme h, envoyant le point (x, m) sur le point de coordonnées (x_1, m_1) tel que, dans ces nouvelles coordonnées, l'action de* Spin (p) *s'écrive*

$$R(x_1, m_1) = (R(x_1), m_1).$$

Autrement dit, quitte à changer les coordonnées dans $\tilde{\hat{B}} \times T^n$, on peut toujours supposer que $u(R, x)$ est identiquement nul.

DEMONSTRATION. Il est clair que $u(R, x)$ vérifie les relations suivantes:

$$u(R_1R_2, x) = u(R_2, x) + u(R_1, R_2(x))$$
$$u(R, \gamma \cdot x) = H(\gamma)u(R, x)$$

exprimant le fait que $R(x, m)$ définit effectivement une action et que cette action commute à celle de $\pi_1(\hat{B})$. Si l'on pose

$$u(x) = \int_{\mathrm{Spin}\ (p)} u(R, x)\, dR \in \operatorname{Ker} \omega$$

et si l'on définit h par:

$$h : (x, m) \mapsto (x_1, m_1) = (x, m + u(x))$$

on obtient évidemment le difféomorphisme cherché.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer une version presque complète du théorème principal:

PROPOSITION 6-3. *Si $\mathcal{F}$ est un feuilletage totalement géodésique de codimension* 1, *orientable sur une variété compacte orientable M, alors*
1°) *soit $\mathcal{F}$ est transverse à une action localement libre de S^1*
2°) *soit $\mathcal{F}$ est topologiquement conjugué à un feuilletage modèle $(M_D, \mathcal{F}_D)$.*

DEMONSTRATION. D'après le lemme 6-2, les points fixes de l'action de Spin (p) sur $\tilde{\hat{B}}$ correspondent aux points fixes de l'action de Spin (p) sur $\hat{B} \times T^n$. Remarquant que $\hat{M}$ est un $SO(p)$ fibré principal, on en déduit que l'action de $SO(p)$ sur $\hat{B}$ est elle aussi libre. Si B est le quotient de $\hat{B}$ sous cette action, on en déduit la description de $(M, \mathcal{F})$ sous la forme

$$M = \tilde{B} \times T^n/(x, m) \sim (\gamma \cdot x, \varphi(\gamma)(m))$$

(Remarquons que $\varphi : \pi_1(\hat{B}) \to \tilde{G}(v, \omega)$ se factorise à travers $\pi_1(B)$ car, d'après 6-2, le groupe $SO(p)$ opère trivialement sur T^n.) Ceci est précisément un modèle $(M_D, \mathcal{F}_D)$.

VII. Fin de la démonstration du théorème principal

Il nous reste essentiellement à nous débarrasser du changement de structure différentiable (Remarque 4-3) et à étudier le cas où M n'est pas compacte.

Observant qu'une action continue et localement libre du cercle, peut être lissée sans difficulté, il nous faut étudier le cas des feuilletages modèles.

LEMME 7-1. *On peut toujours se limiter à l'étude des modèles pour lesquels les coordonnées $\omega_1, \ldots, \omega_n$ de ω dans la base canonique de $(\mathbb{R}^n)^*$ sont telles que $\frac{\omega_i}{\omega_1}$ est algébrique.*

DEMONSTRATION. Si ω n'est pas vecteur propre simple de ${}^tA$ avec $A \in G(v, \omega)$, alors v n'est pas non plus vecteur propre simple de A. Nous avons déjà observé au paragraphe 5 que si v est vecteur propre multiple de tous les éléments de $G(v, \omega)$, nous pouvons déformer la métrique et faire baisser la dimension de la fibration basique. Cette déformation étant faite, ω peut être supposé vecteur propre simple. Les réels $\frac{\omega_2}{\omega_1}, \ldots, \frac{\omega_n}{\omega_1}$ peuvent alors être calculés rationnellement en fonction des coefficients d'une matrice A de $G(v, \omega)$ et de la valeur propre λ correspondante. Ils sont donc algébriques.

PROPOSITION 7-2. *Le changement de structure différentiable effectué en* 4-3 *était en fait inutile.*

DEMONSTRATION. Le feuilletage $\hat{\mathcal{F}}_{|F}$ initial était obtenu par $n_0 - 1$ difféomorphismes du cercle commutant deux à deux. Lorsque nous avons effectué la déformation de la métrique, la dimension des fibres est passée de n_0 à n et la trace de $\hat{\mathcal{F}}$ sur ces nouvelles fibres est obtenue par la suspension de $n - 1$ difféomorphismes du cercle dont les nombres de rotation sont $\frac{\omega_2}{\omega_1}, \ldots, \frac{\omega_n}{\omega_1}$. Par conséquent parmi les $n_0 - 1$ difféomorphismes initiaux, certains avaient un nombre de rotation algébrique. On conclut à l'aide de [Her] qui montre qu'un groupe abélien de difféomorphismes C^∞ du cercle dont un élément a un nombre de rotation irrationnel algébrique, est C^∞-conjugué à un groupe de rotations.

Pour terminer, il nous faut traiter le cas où M est non compacte mais complète. Le feuilletage $\mathscr{F}^{\perp}$ reste riemannien, et $\hat{\mathscr{F}}^{\perp}$ reste transversalement parallélisable complet, les théorèmes 1-2 et 1-4 restent valables. Nous devons trouver l'équivalent de 1-3 lorsque M n'est pas compacte.

PROPOSITION 7-3. *Soit $\mathscr{G}$ un flot transversalement de Lie modelé sur le groupe de Lie G, sur une variété N (orientable mais éventuellement non compacte). On suppose que les orbites de $\mathscr{G}$ sont denses et que la structure transverse est complète. Alors deux cas sont possibles.*

1) *soit N est compacte.*

2) *soit $N=\mathbb{R}$ et le flot est de codimension zéro.*

DEMONSTRATION. Supposons que la dimension de N est supérieure à deux et montrons que N est compacte. On suppose $\mathscr{G}$ engendré par le groupe à un paramètre φ_t. Pour chaque point x de N, l'orbite positive ou l'orbite négative de x est dense dans N. En remarquant que le groupe des automorphismes de $\mathscr{G}$ agit transitivement sur N (la structure est complète), et en inversant au besoin l'orientation des orbites, on peut donc supposer que, pour tout x de N, l'orbite positive de x est dense dans N.

Soit D_1 un disque fermé, plongé dans N et transverse à $\mathscr{G}$, et soit x un point de l'intérieur de D_1. Ce disque s'identifie à un voisinage de l'élément neutre du groupe transverse G. Soit $D_2 \subset D_1$ le disque de centre x et de rayon ε où la métrique utilisée est une métrique invariante à gauche sur G et où ε est choisi de telle sorte que le disque de centre x et de rayon 2ε soit entièrement contenu dans D_1. Soit $D_3 \subset D_2$ le disque de centre x et de rayon $\varepsilon/3$. Enfin soient $x_1, \ldots, x_k$ k points de D_2 tels que les disques Δ_i de centre x_i et de rayon $\varepsilon/3$ recouvrent D_2 (remarquons que $\Delta_i \subset D_1$). Pour chaque i, il existe un réel t_i positif, tel que $\varphi_{t_i}(x_i)$ appartienne à D_3 car les orbites de φ_t sont positivement denses. Considérons l'holonomie du chemin joignant x_i à $\varphi_{t_i}(x_i)$. C'est un germe de translation à gauche de G et donc un germe d'isométrie. De par le choix des rayons de D_2, D_3 et Δ_i, cette isométrie se prolonge en une isométrie h_i définie sur Δ_i tout entier et à valeurs dans D_2. Puisque la structure transverse à $\mathscr{G}$ est complète, il est clair que pour tout y de Δ_i, les points y et $h_i(y)$ appartiennent à la même feuille de $\mathscr{G}$. De manière plus précise, il existe k fonctions continues $t_i(y)$ définies sur Δ_i telles que:

$$t_i(x_i) = t_i$$
$$\varphi_{t_i(y)}(y) = h_i(y) \in D_2$$

Soit

$$T_i = \underset{y \in \Delta_i}{\mathrm{Max}} |t_i(y)| \quad \text{et} \quad T > \underset{i}{\mathrm{Max}}\, T_i$$

Pour tout y de D_2, la portion de l'orbite de y située entre y et $\varphi_T(y)$ recoupe au moins une fois D_2. Si l'on considère l'ensemble des points de N de la forme $\varphi_t(y)$ avec $y \in D_2$ et $0 \leqslant t \leqslant T$, on obtient un compact invariant par les φ_t avec $t \geqslant 0$. Puisque toutes les orbites positives de φ_t sont denses, ce compact est N tout entier et, en particulier, N est compact.

Soit $(M, \mathcal{F})$ un feuilletage totalement géodésique sur une variété non compacte. Si l'adhérence d'une orbite de $\mathcal{F}^\perp$ est compacte, on est tenté de reproduire intégralement la démonstration qui vient d'être donnée dans le cas compact. La difficulté est alors de démontrer la proposition 3-2. Cette proposition est elle même basée sur la proposition 3-3 et sur le lemme 3-4. Ces deux derniers résultats sont les seuls qui ne s'étendent pas clairement lorsque M est non compacte.

PROPOSITION 3-3 (cas non compact). *Si l'adhérence d'une orbite de $\mathcal{F}^\perp$ est compacte et si $\mathcal{F}$ a une feuille fermée, alors $\mathcal{F}$ est transverse à une action localement libre du cercle.*

DEMONSTRATION: Soit F cette feuille fermée. Par hypothèse chaque orbite de $\mathcal{F}^\perp$ rencontre F une infinité de fois; soit Ψ: $F \to F$ l'application de premier retour. C'est une isométrie de F. L'adhérence H du groupe engendré par Ψ est un sous-groupe de Lie abélien du groupe des isométries de F. Par conséquent H est isomorphe à $T^k \times R^l \times \Gamma$ où Γ est abélien discret. Puisque H contient un sous-groupe monogène dense, on en déduit que H est isomorphe à 0, $\mathbb{Z}$ ou à $T^k \times \Gamma$ où Γ est un groupe fini. Le premier cas signifie que $\Psi = id$ c'est à dire que les orbites de $\mathcal{F}^\perp$ sont des cercles. Dans le second cas le groupe engendré par Ψ est fermé ce qui impliquerait que les orbites de $\mathcal{F}^\perp$ seraient fermées mais non compactes, et nous avons exclu ce cas. Enfin, dans le dernier cas, Ψ est approchable par un élément de torsion de $T^k \times \Gamma$, et donc par une isométrie périodique. $\mathcal{F}^\perp$ est alors approchable par une action localement libre du cercle.

En ce qui concerne le lemme 3-4, nous ne sommes parvenus à le généraliser au cas où M est non compacte que sous certaines conditions.

LEMME 3-4 (cas non compact). *Supposons que l'adhérence d'une orbite de*

$\mathcal{F}^\perp$ est compacte et que l'une des conditions suivantes est réalisée

1) *le groupe fondamental de M est de type fini.*

2) *le feuilletage $\mathcal{F}$ est analytique.*

alors, si $\mathcal{F}$ est de type I_b, $\mathcal{F}$ possède une feuille fermée.

DEMONSTRATION. Si le groupe fondamental de M est de type fini, la démonstration du lemme 3-4 donnée au paragraphe III est valable puisque le théorème de Sacksteder s'applique aux pseudo-groupes de type fini. Si le feuilletage est analytique réel, la réunion des feuilles compactes de $\hat{\mathcal{F}}_{|F}$ ne peut contenir qu'un nombre fini de feuilles compactes. Cette réunion finie contient donc la trace sur F d'une feuille fermée de $\hat{\mathcal{F}}$ d'après 3-5.

Nous pouvons donc décrire les feuilletages $\mathcal{F}$ totalement géodésiques sur les variétés riemanniennes complètes non compactes en imposant l'une des deux conditions 1) et 2) du lemme précédent.

Si l'adhérence d'une orbite de $\mathcal{F}^\perp$ est compacte, le problème se traite exactement comme nous l'avons fait dans le cas où M est compacte. Sinon toutes les orbites sont fermées et celles-ci définissent une fibration de M de fibre $\mathbb{R}$ et de base B, transverse à $\mathcal{F}$. Puisque M est supposée complète, toute feuille de $\mathcal{F}$ apparaît comme un revêtement de B. On peut donc écrire

$$M = \tilde{B} \times \mathbb{R}/(x, y) \sim (\gamma \cdot x, \varphi(\gamma)(y))$$

où

$$\varphi : \pi_1(B) \to \mathrm{Diff}^+(\mathbb{R})$$

est le morphisme d'holonomie. Les feuilles de $\mathcal{F}$ sont définies par l'équation $y = \mathrm{Cst}$. Ceci achève la démonstration du théorème 2.

VIII. Remarques finales

Les corollaires qui suivent sont des conséquences immédiates du théorème principal. Certains d'entre eux peuvent d'ailleurs se démontrer directement. Rappelons tout d'abord un résultat de [Car–Ghy].

PROPOSITION 8-1. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage totalement géodésique, de codimension* 1, *transversalement orientable, sur une variété riemannienne complète M. Soit $\tilde{M}$ le revêtement universel de M, $\tilde{\mathcal{F}}$ le relevé de $\mathcal{F}$ dans $\tilde{M}$ et $\tilde{\mathcal{F}}^\perp$ le flot orthogonal à $\tilde{\mathcal{F}}$. Alors $(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{F}}^\perp)$ est un produit, c'est à dire qu'il existe un difféomorphisme de $\tilde{M}$ sur $L \times \mathbb{R}$ envoyant les feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}$ sur $L \times \{*\}$ et celles de $\tilde{\mathcal{F}}^\perp$ sur $\{*\} \times \mathbb{R}$.*

COROLLAIRE 8-2. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage totalement géodésique de codimension* 1 *sur la variété riemannienne complète M, alors*

- *ou le groupe fondamental de M contient un sous-groupe distingué abélien libre non trivial*
- *ou M est un produit $B \times \mathbb{R}$ et le feuilletage est transverse aux fibres $\{*\} \times \mathbb{R}$.*

Ce corollaire, ainsi que celui qui suit est déjà dans [Car 1], lorsque M est supposée compacte.

DEMONSTRATION. Dans le cas où les adhérences des orbites de $\mathcal{F}^{\perp}$ sont non compactes, nous savons que M est un produit $B \times \mathbb{R}$. Sinon, l'adhérence d'une orbite de $\mathcal{F}^{\perp}$ est un tore T^n $(n > 1)$. L'image du groupe fondamental de ce tore dans celui de M est alors un sous-groupe distingué abélien. Ce sous-groupe est non trivial car certaines classes d'homotopie de T^n correspondent à des transversales fermées à $\mathcal{F}$ et celles ci ne peuvent être triviales d'après 8-1.

COROLLAIRE 8-3. *Si M admet une métrique riemannienne à courbure strictement positive ou si M est compacte et admet une métrique à courbure strictement négative, alors, il n'existe aucun feuilletage totalement géodésique sur M* (*même pour une autre métrique de M*).

DEMONSTRATION. Une variété à courbure strictement positive est compacte et possède un groupe fondamental fini. Le corollaire 8-2 exclut donc la possibilité d'existence d'un feuilletage totalement géodésique sur une telle variété.

Le groupe fondamental d'une variété compacte à courbure strictement négative ne peut contenir de sous-groupe abélien de rang 2 et son centre est trivial. Les modèles ainsi que les fibrés de Seifert ne peuvent donc pas être des variétés compactes à courbure strictement négative.

En ce qui concerne le comportement qualitatif des feuilles, nous avons le

COROLLAIRE 8-4. *Si $\mathcal{F}$ est totalement géodésique sur une variété compacte M et si $\mathcal{F}$ possède une feuille compacte ou un minimal exceptionnel, alors $\mathcal{F}$ est transverse à une action du cercle. Sinon, toutes les feuilles sont denses et le feuilletage possède une structure transverse affine* (*c'est-à-dire que le pseudo-groupe transverse peut se réduire à un pseudo-groupe de transformations affines de* $\mathbb{R}$). *En particulier, dans ce dernier cas, le premier nombre de Betti de M est non nul* (cf. [Fed–Fur]).

Il est bien connu que la classe des feuilletages transverses à des fibrations en cercles est très diversifiée; presque tous les phénomènes qualitatifs rencontrés en codimension 1 se rencontrent dans cette classe. Les feuilletages modèles possèdent par contre une remarquable propriété de rigidité:

COROLLAIRE 8-5. *Soit* $(M_D, \mathcal{F}_D)$ *un feuilletage modèle compact pour lequel* v *est vecteur propre simple (d'après* 7-1, *on peut toujours se limiter à ces modèles). Alors* $(M_D, \mathcal{F}_D)$ *possède un "module de stabilité" fini, c'est à dire que l'on peut décrire les feuilletages voisins de* $\mathcal{F}_D$ *à l'aide d'un nombre fini de paramètres (à conjugaison* C^∞ *près).*

DEMONSTRATION. Un feuilletage proche d'un feuilletage totalement géodésique est encore totalement géodésique (pour une autre métrique). Si $\mathcal{F}'$ est proche de $\mathcal{F}_D$, grâce à l'hypothèse faite sur v, on voit facilement que $\mathcal{F}'$ doit aussi être conjugué à un modèle associé à $(D') = (n, v', \omega', B, \varphi')$ correspondant au même entier n et à la même base B que (D). Le morphisme φ' s'écrit

$$\varphi'(\gamma)(m) = H'(\gamma)(m) + b'(\gamma)$$

avec

$$H'(\gamma) \in SL(n, \mathbb{Z}) \quad \text{et} \quad b'(\gamma) \in T^n.$$

De la proximité de $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}_D$, on déduit que $H' = H$, $\omega = \omega'$ et $v = v'$. Par conséquent, φ' et φ ne différent que par le terme $b'(\gamma)$. Les valeurs de $b'(\gamma)$ pour γ décrivant un système de générateurs de $\pi_1(B)$ fournissent un nombre fini de paramètres décrivant les feuilletages voisins de $\mathcal{F}_D$.

Sans vouloir faire une étude détaillée des déformations des feuilletages modèles, donnons un exemple typique. Supposons que le groupe fondamental de B soit le groupe libre à deux générateurs α, β noté $L(\alpha, \beta)$ et soit $(M, \mathcal{F})$ le feuilletage modèle correspondant au morphisme φ défini par

$$\varphi(\alpha) = (A, 0) \in \tilde{G}(v, \omega)$$
$$\varphi(\beta) = (id, 0) \in \tilde{G}(v, \omega)$$

Les feuilletages proches peuvent être décrits par deux paramètres u_1, u_2 de T^n. Le feuilletage $\mathcal{F}_{u_1,u_2}$ est associé au morphisme φ_{u_1,u_2} défini par:

$$\varphi_{u_1,u_2}(\alpha) = (A, u_1) \in \tilde{G}(v, \omega)$$
$$\varphi_{u_1,u_2}(\beta) = (id, u_2) \in \tilde{G}(v, \omega)$$

Bien entendu, deux couples (u_1, u_2) et (u_1', u_2') peuvent correspondre à des feuilletages conjugués. Par exemple, soit x_0 tel que $Ax_0 + u_1 = x_0$, si l'on conjugue φ_{u_1,u_2} par la translation (id, x_0), on obtient φ_{0,u_2}. On peut donc se limiter aux déformations pour lesquelles $u_1 = 0$. De même, si u_2 est un petit élément de $\operatorname{Ker}(\omega) \subset T^n$, le feuilletage $\mathcal{F}_{0,u_2}$ est conjugué à $\mathcal{F}_{0,0}$. Cependant, il existe effectivement des déformations non triviales. Pour le constater, calculons le groupe fondamental de la feuille de $\mathcal{F}_{u_1,u_2}$ passant par le point x de T^n. Ce groupe est le sous-groupe de $L(\alpha, \beta)$ défini par:

$$\{\gamma \in L(\alpha, \beta),\ \varphi_{u_1,u_2}(\gamma)(x) - x \in \operatorname{Ker}(\omega)\}$$

Si $(u_1, u_2) = (0, 0)$ et $x = 0$, ce groupe est $L(\alpha, \beta)$ tout entier.

C'est à dire que la feuille de $\mathcal{F}_{0,0}$ passant par $0 \in T^n$ est un fibré en $\mathbb{R}^{n-1}$ au dessus de B. Si b désigne la dimension de B, le b-ème nombre de Betti de cette feuille est donc non nul. Si $u_1 = 0$ et $u_2 \notin \operatorname{Ker}(\omega)$, pour tout x de T^n, le groupe fondamental de la feuille de $\mathcal{F}_{u_1,u_2}$ passant par x ne contient pas β, c'est donc un sous-groupe strict de $L(\alpha, \beta)$. Cette dernière feuille est donc un fibré en $\mathbb{R}^{n-1}$ au dessus d'une variété B' qui est un revêtement non trivial de B. Si B' est non compacte, le b-ème nombre de Betti de cette feuille est nul; si B' est compacte, le groupe fondamental de cette feuille est un sous-groupe strict d'indice fini de $L(\alpha, \beta)$, c'est donc un groupe libre ayant au moins 3 générateurs. Quoiqu'il en soit, si $u_2 \notin \operatorname{Ker}(\omega)$, aucune feuille de $\mathcal{F}_{0,u_2}$ n'est homéomorphe à la feuille de $\mathcal{F}_{0,0}$ passant par 0. Les feuilletages $\mathcal{F}_{0,0}$ et $\mathcal{F}_{0,u_2}$ ne sont donc pas conjugués.

BIBLIOGRAPHIE

[ABE] K. ABE., *Applications of a Ricatti type differential equation to riemannian manifolds with totally geodesic distributions.* Tohoku Math. J., *25* (1973) pp. 425–444.

[BLU–HEB] R. A. BLUMENTHAL et J. J. HEBDA, De Rham decomposition theorems for foliated manifolds, preprint.

[BRI] F. BRITO, *Une obstruction géométrique à l'existence de feuilletages totalement géodésiques de codimension* 1., J. Differential Geometry, *16* (1981) pp. 675–684.

[CAR–CAR] P. CARON et Y. CARRIÈRE, *Flots transversalement de Lie* $\mathbb{R}^n$, *flots transversalement de Lie minimaux,* C. R. Acad. Sc. Paris, t. 291, Série A – pp. 477–478.

[CAR 1] Y. CARRIÈRE, *Flots riemanniens et feuilletages géodésibles de codimension* 1, Thèse de 3ème cycle. Université des Sciences et Techniques de Lille I (1981).

[CAR 2] Y. CARRIÈRE, Flots riemanniens – présenté aux journées sur les structures transverses de Toulouse (1982), à paraître. dans Astérisque.

[CAR–GHY] Y. CARRIÈRE et E. GHYS, *Feuilletages totalement géodésiques,* An. Acad. Brasil Ciênc. (1981), *53* (3) pp. 427–432.

[DOM] P. DOMBROWSKI, *Jacobi fields, totally geodesic foliations and geodesic differential forms,* Resultate Math., *1,* 156–194 (1978).

[FED–FUR] E. FÉDIDA et P. FURNESS, *Transversally affine foliations,* Glasgow Maths J., *17* (2) (1976) pp. 106–111.

[FER] D. FERUS, *Totally geodesic foliations*, Math. Ann., *188* (1970) pp. 313–316.

[GHY–SER] E. GHYS et V. SERGIESCU, *Stabilité et conjugaison différentiable pour certains feuilletages*, Topology, *19* (1980) pp. 179–197.

[HAE] A. HAEFLIGER, *Some remarks on foliations with minimal leaves*, J. Differential Geometry, *15* (1980) pp. 269–284.

[HER] M. HERMAN, *Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations*, IHES Publ. Math., *49* (1979), 5–234.

[JOH–NAV] D. L. JOHNSON et A. N. NAVEIRA, *A topological obstruction to the geodesibility of a foliation of odd dimension*. Preprint.

[JOH–WHI] D. L. JOHNSON et L. B. WHITT. *Totally geodesic foliations*, Journal of Diff. Geom., *15* (1980) pp. 225–235.

[MOL] P. MOLINO. *Feuilletages transversalement complets et applications*, Ann. Ec. Norm. Sup., *10* (1977) pp. 289–307.

[MOR–TSU] S. MORITA et T. TSUBOI, *The Godbillon–Vey class of codimension one foliation without holonomy*, Topology *19* (1980) pp. 43–49.

[PLA] J. PLANTE, *Foliations with measure preserving holonomy*. Ann. of Math., *102* (1975) pp. 327–361.

[REI] B. REINHART, *Foliated manifolds with bundle-like metrics*, Ann. of Math., *69* (1959) pp. 119–132.

[RUM] H. RUMMLER, *Quelques notions simples en géométrie riemannienne et leurs applications aux feuilletages compacts*, Com. Mat. Helv., *54* (1979) pp. 224–239.

[SAC] R. SACKSTEDER, *Foliations and pseudo-groups*, Ann. of Math., *87* (1965) pp. 79–102.

[STE] S. STERNBERG, *Local C^n transformations of the real line*, Duke Math. J. *24* (1957) pp. 97–102.

[SUL] D. SULLIVAN, *A homological characterization of foliations consisting of minimal leaves*, Com. Math. Helv., *54* (1979) pp. 218–223.

Université des Sciences et Techniques de Lille I,
U.E.R. de Mathématiques Pures et Appliquées
59655 Villeneuve d'Ascq Cédex, France

Reçu le 24 mai 1982/26 avril 1983