Les fibrés de Seifert dans le problème de la simplification par les courbes elliptiques.

Autor(en): **Menini, C. / Parigi, G.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **59 (1984)**

PDF erstellt am: **05.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-45386

Comment. Math. Helvetici 59 (1984) 123–135 0010-2571/84/010123-13$01.50 + 0.20/0

Les fibrés de Seifert dans le problème de la simplification par les courbes elliptiques

C. MENINI et G. PARIGI

Introduction[1]

Soit T un tore complexe; on considère le problème de la simplification par T:

(P) Soient A et B deux variétés analytiques complexes compactes telles que $A \times T \cong B \times T$. $A-t$-on alors $A \cong B$?[2]

On sait qu'en général ce problème n' admet pas une réponse positive: en 1978 Shioda (cfr. [Sh]) a exhibé un contrexemple en construisant trois courbes elliptiques T, T', T'' telles que $T \times T' \cong T \times T''$ mais avec $T' \not\cong T''$. D'autre part, toujours dans [Sh], Shioda a montré:

THÉORÈME. *Soit T une courbe elliptique, avec* $\operatorname{End}(T) \cong \mathbb{Z}$. *S'il existe deux courbes elliptiques T_1, T_2 telles que $T \times T_1 \cong T \times T_2$, alors $T_1 \cong T_2$.*

On est alors conduit au problème suivant:

(P_1) Soit T une courbe elliptique, avec $\operatorname{End}(T) \cong \mathbb{Z}$. S'il existe deux variétés A et B telles que $A \times T \cong B \times T$, est-ce qu'on a alors $A \cong B$?

Dans le présent article nous attaquons le problème en supposant que $A \not\cong B$ et en essayant de doter les variétés A et B d'une structure de fibré localement trivial, de fibre une courbe elliptique $\tilde{T}$, isogène à T, sur le même espace analytique X. Nous sommes ainsi amenés à étudier le problème suivant: (cfr. § 0, (4)).

(P_2) L'application naturelle: $i: H^1(X, \tilde{T}) \to H^1(X, \tilde{T} \times T)$ est-elle injective?

On sait que la réponse est négative dans le cas général: dans [Pa] on construit,

---

[1] Pour une introduction plus détaillée au problème de la simplification, on peut voir: [Br], [Fu], [Pa].

[2] Les mots «analytiques complexes compactes» seront souvent sous-entendus dans la suite. En particulier, $\cong$ désignera toujours un isomorphisme analytique complexe.

pour tout tore complexe T, deux fibrés $F_i(T)$, $i=1,2$, de fibre T sur une surface de Riemann adéquate Z, tels que $F_1 \times T \cong F_2 \times T$, mais avec $F_1 \not\cong F_2$.

Dans le présent travail (cfr. § 1), on démontre:

THÉORÈME. *Soit T une courbe elliptique avec* $\operatorname{End}(T) \cong \mathbb{Z}$. *S'il existe deux variétés A et B telles que $A \times T \cong B \times T$, alors ou bien A est isomorphe à B, ou bien A et B sont des fibrés principaux de Seifert,*[3] *de fibre une même courbe elliptique T, isogène à T, sur un même espace analytique Z.*

Le théorème serait faux si l'on remplaçait fibré de Seifert par fibré localement trivial. On va en effet donner au § 2 un exemple, avec une courbe elliptique quelconque T, où l'obstruction à simplifier par T repose sur la notion de fibration de Seifert. Plus précisément, on va exhiber deux fibrations $\mathcal{H}_1 := (H_1, \pi_1, Y)$, $\mathcal{H}_2 := (H_2, \pi_2, Y)$ telles que:

1) $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont deux fibrés de Seifert ayant comme base le même espace analytique Y et comme fibre type une même courbe elliptique isogène à T.
2) $H_1 \not\cong H_2$, mais $H_1 \times T \cong H_2 \times T$.
3) Il n'existe aucun espace analytique Y' et aucune projection π_i' tels que $\mathcal{H}_i' := (H_i, \pi_i', Y')$, $i=1,2$, soit un fibré localement trivial de fibre une courbe elliptique.

Il découle tout de suite de la définition (cfr. [Ho], definition 1) que pour construire de tels fibrés de Seifert, qui puissent avoir une chance de ne pas être localement triviaux, il faut d'abord exhiber un espace produit de Seifert (qui en représente la situation locale) du style: $\left(\frac{T \times Q}{G}, \pi, \frac{Q}{G}\right)$, G étant un groupe fini d'automorphismes analityques de T qui agit aussi sur la variété Q, mais avec des points fixes. On pose alors $Q := \mathbb{P}_1$ et $G := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \ker\{\cdot 2 : T \to T\}$; un tel G opère sur $\mathbb{P}_1$ avec deux points fixes.

Aprés, on utilise les fibrés F_i, $i=1,2$, définis en [Pa], en posant $H_i := (F_i \times \mathbb{P}_1)/G$, et on démontre que les H_i vérifient les propriétés 1) et 2). Au § 3, enfin, on démontre la propriété 3): la variété $(F_i \times \mathbb{P}_1)/G$, $i=1,2$, n'est jamais, en effet, l'espace total d'une fibration localement triviale ayant comme fibre une courbe elliptique.

Nous remercions vivement André Hirschowitz pour son aide tout le long de ce

---

[3] Dans la suite, les notations et les définitions relatives aux fibrés de Seifert seront toujours cells de [Ho].

travail. Nous tenons aussi à remercier V. Ancona et A. Lascu pour leurs conseils fructueux.

§ 0. Conventions et notations

1) Si T est un tore complexe, on sait que les automorphismes analytiques de T forment un groupe de Lie complexe. On notera ce groupe $\mathrm{Aut}_a(T)$ et $\mathrm{Aut}_g(T)$ le sous-groupe des automorphismes de T qui conservent aussi sa structure de groupe.
2) Si X est une variété analytique complexe, on désigner a par $\mathcal{T}(X)$ son fibré tangent.
3) Soit F un fibré analytique de base X, fibre T et groupe structural $G\subseteq \mathrm{Aut}_a(T)$. On dira alors que F est un G-fibré sur X.
4) Si X est une variété analytique complexe et G un groupe de Lie complexe, on désigne par $\mathbf{G}$ le faisceau des germes d'applications holomorphes $X\to G$.
5) On sait qu'un homomorphisme de faisceaux de groupes abéliens $\rho:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ sur le même espace topologique X induit les homomorphismes:

$$\rho_*:H^0(X,\mathcal{F})\to H^0(X,\mathcal{G});\qquad \rho_*^1:H^1(X,\mathcal{F})\to H^1(X,\mathcal{G})$$

Si $\mathfrak{U}$ est un recouvrement ouvert de X, on convient alors de noter encore ρ_*^1 l'application canonique:

$$\rho_*^1:Z^1(\mathfrak{U},\mathcal{F})\to Z^1(\mathfrak{U},\mathcal{G}).$$

§ 1. Un théorème de structure

THÉORÈME 1.1. *Soit T une courbe elliptique, avec* $\mathrm{End}(T)=\mathbb{Z}$. *S'il esiste deux variétés A et B telles que $A\times T\cong B\times T$, alors ou $A\cong B$, ou bien A et B sont des fibrés principaux de Seifert, de fibre une même courbe elliptique $\tilde{T}$, isogène à T, sur un même espace analitique Z.*

Démonstration. On sait (cfr. [Br_1], lemme 1) que si $X=X_1\times X_2$ est le produit de deux variétés analytiques compactes, tout champ de vecteurs holomorphe ξ sur X est de la forme $\xi=\xi_1\oplus\xi_2$, où ξ_i est un champ de vecteurs holomorphe sur X_i $(i=1,2)$. Soit alors τ un champ de vecteurs holomorphe vertical sur $A\times T$, jamais nul, et $\phi:A\times T\to B\times T$ un isormorphisme analytique.

Si $\mathcal{T}(\phi):\mathcal{T}(A\times T)\to\mathcal{T}(B\times T)$ est l'application linéaire tangente associée a ϕ, $\sigma:=\mathcal{T}(\phi)(\tau)$ est un champ de vecteurs sur $B\times T$, de la forme $\sigma=\sigma_1\oplus\sigma_2$, où σ_1

est un champ sur B et σ_2 un champ sur T. La suite de la demonstration se compose de plusieurs pas.

a) On suppose d'abord qu'il existe un point $b_0 \in B$ tel que $\sigma_1(b_0)=0$.

σ_2 étant un champ sur T jamais nul, une courbe integrale pour σ passant par un point de la forme (b_0, t) n'est rien d'autre que $b_0 \times T$.

Il existe donc $a_0 \in A$ tel que $\Phi(a_0 \times T) = b_0 \times T$. D'autre part, pour tout voisinage de Stein V de b_0 dans B, il existe un voisinage U de a_0 dans A tel que: $\Phi(U \times T) \subseteq V \times T$. En plus pour tout $x' \in U$, si p_B est la projection naturelle $p_B : B \times T \to B$, $p_B(\Phi(x' \times T))$, par le théorème de l'application propre de Remmert (cf. [Re]), n'est qu'un $y' \in B$. Donc, $\Phi(x' \times T) = y' \times T$. On peut alors bien définir un isomorphisme $\tilde{\Phi} : A \cong B$.

b) On va supposer maintenant σ_1 partout normale. Posons, pour tout $a \in A$, $T_a := a \times T$ et pour tout $b \in B$, $T_b := b \times T$. Alors les courbes $\Phi(T_a)$ ne peuvent jamais être tangentes à des courbes du type T_b.

b$_1$) Soit X une variété avec deux isomorphismes $\alpha : A \times T \to X$ et $\beta := \alpha \cdot \Phi^{-1} : B \times T \to X$ qui rendent commutatif le diagramme:

$$\begin{tikzcd} & X & \\ A \times T \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[rr, "\Phi"] & & B \times T \arrow[ul, "\beta"'] \end{tikzcd} \tag{1}$$

Alors, on peut définir sur X une opération holomorphe du produit $T \times T$.

En effet, soit τ un champ de vecteurs holomorphe sur T; τ définit une opération de T sur le produit $A \times T$ (resp. $B \times T$) qu'on peut voir, via l'isomorphisme α (resp. β) comme une opération $\eta_A : T \times X \to X$ (resp. $\eta_B : T \times X \to X$).

Il est par ailleurs évident que, si l'on considére τ comme un champ vertical sur $A \times T$ et $B \times T$ et si on le transporte sur X via les applications linéaires tangentes $\mathcal{T}(\alpha)$ et $\mathcal{T}(\beta)$ et si l'on définit $\nu_1 := \mathcal{T}(\alpha)(\tau)$ et $\nu_2 := \mathcal{T}(\beta)(\tau)$, on aura que le crochet $[\nu_1, \nu_2]$ est nul. Donc, les deux actions de T commutent sur X.

b$_2$) T peut être vu de deux manières différentes comme un sous-groupe de $\mathrm{Aut}_a(X)$, le groupe des isomorphismes analytiques de X. Donc, si δ_i, $i = 1, 2$, sont les applications $\delta_i : T \to \mathrm{Aut}_a(X)$, relatives aux deux actions de T sur X, on pose $T_i := \delta_i(T)$ et on a $T_i \subset \mathrm{Aut}_a(X)$.

b$_3$) Soit $\mathcal{G}$ le sous-groupe de $\mathrm{Aut}_a(X)$ engendré par T_1 et T_2. Alors l'application naturelle $p : T_1 \times T_2 \to \mathcal{G}$ est surjective et a un noyau fini K. On a donc une suite exacte:

$$0 \to K \to T_1 \times T_2 \to \mathcal{G} \to 0.$$

$\mathcal{G}$ étant un quotient de $T_1 \times T_2$ par le groupe fini K, est un tore complexe de dimension 2, isogène à $T_1 \times T_2$.

b$_4$) On peut définir deux injections: $\lambda_i : T_i \hookrightarrow \mathcal{G}$, $(i=1,2)$; si $\tilde{T}_i := \mathcal{G}/T_1$, la suite:

$$0 \to T_i \to \mathcal{G} \to \tilde{T}_i \to 0 \qquad (i=1,2)$$

est scindée. En effet, soit $\mathcal{G}_{A\times T}$ le sous-groupe de $\mathrm{Aut}_a\,(A\times T)$ engendré par T_1 et T_2 en tant que groupes agissant sur $A\times T$. On a donc la suite exacte de groupes:

$$0 \to K \to T_1 \times T_2 \to \mathcal{G}_{A\times T} \to 0.$$

Soit maintenant $\tilde{T}_A$ le groupe qu'on obtient en transportant le champ vertical choisi sur $B\times T$, sur le produit $A\times T$, en le projetant sur A et en considérant le groupe à un paramètre d'automorphismes correspondant. On a donc une surjection $\pi : T_2 \to \tilde{T}_A$, dont le noyau est, par construction, un groupe fini K_1. (K_1 est donc le noyau de l'action de T_2 sur A). On a alors la suite exacte:

$$0 \to K_1 \to T_2 \to \tilde{T}_A \to 0.$$

$\tilde{T}_A$ étant un quotient de la courbe elliptique T_2 par le groupe fini K_1 est une courbe elliptique isogène à T_2 et donc à T. On peut voir á présent qu'on peut définir, d'une façon naturelle, une application: $\rho_1 : T_1 \times \tilde{T}_A \to \mathcal{G}_{A\times T}$ telle que: $\rho_1(t_1, t_a) := t_1 \circ t_a$, et que, par construction, une telle application est un isomorphisme de groupes de Lie complexes. En transportant sur X, via l'isomorphisme α, on $a : T_1 \times T_A \cong \mathcal{G}$. D'autre part, si l'on restreint l'application $p : T_1 \times T_2 \to \mathcal{G}$ à $T_1 \times 0_{T_2}$ on peut bien définir une injection $\lambda_1 : T_1 \to \mathcal{G}$, et il facile à voir que le diagramme:

$$\begin{tikzcd} T_1 \arrow[r, hook] \arrow[d, "\mathrm{id.}"'] & T_1 \times T_A \arrow[d, "\rho_1"] \\ T_1 \arrow[r] & \mathcal{G} \end{tikzcd} \tag{2}$$

est commutatif. Si l'on considère alors le diagramme:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & T_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & T_1 \times \tilde{T}_A \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{T}_A \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\psi_1"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & T_1 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r] & \tilde{T}_1 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{3}$$

on peut déduire de (3) qu'un tel diagramme est commutatif et que l'application induite $\psi_1 : \tilde{T}_A \to \tilde{T}_1$ est un isomorphisme.
Il en découle que la suite:

$$0 \to T_1 \to \mathcal{G} \to \tilde{T}_1 \to 0$$

est scindée. Il est évident aussi qu'on peut définir une courbe elliptique $\tilde{T}_B$ et une surjection $\tilde{\pi}: T_1 \to \tilde{T}_B$, dont le noyau est un groupe fini K_2. On aura aussi un isomorphisme: $T_2 \times \tilde{T}_B \cong \mathcal{G}$; de même il existe un isomorphisme $\psi_2: \tilde{T}_B \to \tilde{T}_2$ et donc la suite exacte:

$$0 \to T_2 \to \mathcal{G} \to \tilde{T}_2 \to 0$$

est scindée. En particulier, on a:

$$T_1 \times \tilde{T}_A \cong T_1 \times \tilde{T} \cong \mathcal{G} \cong \tilde{T}_B \times T_2 \cong \tilde{T}_2 \times T_2,$$

et donc un isomorphisme (de groupes de Lie complexes)

$$\rho: T_1 \times \tilde{T}_1 \to T_2 \times \tilde{T}_2.$$

Or, il est évident que, par construction, on $a: T \cong T_1 \cong T_2$. Comme $\operatorname{End}(T) \cong \mathbb{Z}$, d'après Shioda (cfr. [Sh]) on a aussi: $\tilde{T}_1 \cong \tilde{T}_2$.

Si on pose: $\tilde{T} :\cong \tilde{T}_i$, $(i = 1, 2)$, on a donc un automorphisme:

$$\rho: T_1 \times \tilde{T} \cong T_2 \times \tilde{T}.$$

b$_5$) Par construction, $\tilde{T}_1$ agit effectivement sur A; il s'en suit donc (cfr. [Ho]), que le quotient $A/\tilde{T}$ a une structure complexe canonique et que A est, par rapport à la projection canonique $\pi_A: A \to A/\tilde{T}$, un fibré principal de Seifert ayant $\tilde{T}$ comme groupe de structure.

Or, $\tilde{T} \cong \tilde{T}_2$ agit effectivement sur B, ce qui fait donc de B un fibré principal de Seifert par rapport à la projection $\pi_B: B \to B/\tilde{T}$.

b$_6$) On veut maintenant montrer que l'isomorphisme Φ passe au quotient c'est-a-dire qu'il induit un isomorphisme: $\tilde{\Phi}: A/\tilde{T} \to B/\tilde{T}$.

Mais si l'on décompose le diagramme (1), on obtient:

$$\begin{tikzcd}
A \times T \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "p_A"'] & X \arrow[r, phantom, "="] \arrow[d] & X \arrow[r, phantom, "="] \arrow[dd] & X \arrow[d] & B \times T \arrow[l, "\cong"'] \arrow[d, "p_Y"] \\
A \arrow[d, "\pi_A"'] & X/T_1 \arrow[d] & & X/T_2 \arrow[d] & B \arrow[d, "\pi_Y"] \\
A/\tilde{T} \arrow[r, phantom, "\cong"] & X/T_1 \times \tilde{T} \arrow[r, phantom, "\cong"] & X/\mathcal{G} \arrow[r, phantom, "\cong"] & X/T_2 \times \tilde{T} \arrow[r, phantom, "\cong"] & B/\tilde{T}
\end{tikzcd} \tag{4}$$

Or, par construction, on $a: X/T_1 \times \tilde{T} \cong X/\mathcal{G} \cong X/T_2 \times \tilde{T}$ ce qui achève la démonstration.

§ 2. Un exemple d'obstruction à la simplification par T

On va meintenant donner pour toute courbe elliptique T un example de fibrés de Seifert distincts H_1, H_2 tels que $H_1 \times T \cong H_2 \times T$. L'obstruction à la simplification par T est le fait que H_1, H_2 ne sont pas des fibrés localement triviaux.

Remarque 2.1. Soit T une courbe elliptique et $G := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On $a: G \cong \operatorname{Ker}\{\cdot 2: T \to T\}$. Donc, G opére librement sur T par translations. Par ailleurs, on peut regarder G comme le sous-groupe de $SL(2, \mathbb{Z})$, (qu'on notera encore G), formé par les matrices:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

On peut donc définir d'une façon naturelle une opération holomorphe de G su $\mathbb{P}_1$, une telle action n'étant que la composition de ces matrices avec les éléments $(a, b) \in \mathbb{P}_1$. G agissant sur T et sur $\mathbb{P}_1$, il agit aussi sur $T \times \mathbb{P}_1$ par:

$$g: (t, z) \to (g + t, g - z), \text{ pour tout } t \in T, \ z \in \mathbb{P}_1, \ g \in G.$$

Si $p: (T \times \mathbb{P}_1)/G \to \mathbb{P}_1/G$ est la projection naturelle, le triplet

$$\mathfrak{S} := \left(\frac{T \times \mathbb{P}_1}{G}, p, \frac{\mathbb{P}_1}{G} \right)$$

est, par définition, un espace produit de Seifert avec T comme fibre type.

Remarque 2.2. On sait (cfr. [Pa], propositions 3.4. et 3.7) que si q est un entier impair plus grand que 6 et K_q le noyau de la multiplication par q dans T, il existe une surface de Riemann compacte X, de genre $g = g(X) > 1$, et un élément $\xi \in H^1(X, K_q)$ tels que si F_1 et F_2 sont des fibrés, de fibre T, correspondant à ξ et à $2 \cdot \xi$, alors F_1 et F_2 ne sont pas non plus imomorphes en tant que variétés. Puisque G et K_q commutent entre eux, on peut définir, d'une façon naturelle, une action de G sur les fibrés F_i, $i = 1, 2$, et considérer les quotients correspondants $H_i := (F_i \times \mathbb{P}_1)/G$. On a alors:

PROPOSITION 2.3. *Soit $H_i := (F_i \times \mathbb{P}_1)/G$. Les variétés $H_1 \times T$ et $H_2 \times T$ sont isomorphes.*

Demonstration. Soit $\rho: T\times T \to T\times T$ l'application définie par la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 2+q & r_1 \\ q & r_2 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}),$$

où q est le nombre entier défini en 2.2, et où r_1, r_2 sont des entiers convenables.

Or, $\rho \in \mathrm{Aut}_g\,(T\times T)$ et il est facile à voir (cfr. [Pa], théorème 4.2) que ρ induit un isomorphisme analytique (qu'on note encore ρ) entre les fibrés $F_1\times T$ et $F_2\times T$. On obtient donc un isomorphisme: $\psi: \mathbb{P}_1\times F_1\times T \to \mathbb{P}_1\times F_2\times T$, en posant: $\psi(z, f, \tau) = (z, \rho(f, \tau))$, pour tout $z\in\mathbb{P}_1$, $f\in F_1$, $\tau\in T$. On définit une action de G sur $\mathbb{P}_1\times F_i\times T$, $i = 1, 2$, de la façon suivante:

$$g\cdot(z, f, \tau) = (g\cdot z, g\cdot f, \tau), \text{ pour tout } g\in G.$$

Or, ψ commute à l'action de G; on a donc un isomorphisme $\psi: H_1\times T \to H_2\times T$.

Remarque 2.4. Les F_i, $(i = 1, 2;)$ étant des fibrés sur la surface de Riemann X, on peut définir une application holomorphe:

$$\pi_i : \frac{F_i\times\mathbb{P}_1}{G} \to X\times\frac{\mathbb{P}_1}{G}$$

telle que $\pi_i([(x, t), z]_G) := (x, [z]_G)$. Il découle tout de suite de la définition (cfr. Ho, définition 1) que les triplets

$$\mathcal{H}_i := \left(\frac{F_i\times\mathbb{P}_1}{G}, \pi_i, X\times\frac{\mathbb{P}_1}{G}\right)$$

sont des fibrés de Seifert avec T comme fibre type. On va maintenant montrer que les $H_i = (F_i\times\mathbb{P}_1)/G$ ne sont pas isomorphes.

On aura besoin du lemme suivant:

LEMME 2.5. *Soit T une courbe elliptique, X une surface de Riemann de genre supérieur ou égal à* 1, *H un fibré de Seifert, de fibre type T, sur X. Alors toute application holomorphe $\gamma: \mathbb{P}_1 \to H$ est constante.*

Démonstration. On sait que toute application de $\mathbb{P}_1$ dans une surface de Riemann, de genre supérieur où égal a 1, est constante. Alors si $\pi: H\to X$ désigne le projection canonique de H sur X, l'application holomorphe $\pi\cdot\gamma: \mathbb{P}_1 \to X$ est constante, c'est-à-dire il existe $x\in X$ tel que $\mathrm{Im}\,\gamma\subset H(x)$, la fibre de H sur $x\in X$. Mais $H(x)$ est encore une courbe elliptique, donc γ est constante.

Remarque 2.6. Si $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de X, les classes ξ et $2.\xi$ des deux fibrés F_1 et F_2 seront représentées respectivement par les cocycles $(\xi_{ij}), (2.\xi_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, K_q)$, où avec les identifications prédédentes, pour tout $x \in U_i \cap U_j$, $\xi_{ij}(x)$, (resp. $2.\xi_{ij}(x)$) est toujours vue comme la translation dans T associée à l'élément $\xi_{ij}(x) \in K_q$. (resp. $2.\xi_{ij}(x) \in K_q$). Or, il est facile de voir que F_1/G et F_2/G sont deux fibrés de base X, fibre T/G et cocycles $(\bar{\xi}_{ij})$ et $(\overline{2.\xi_{ij}})$ respectivement, où $\bar{\xi}_{ij}: U_i \cap U_j \to \mathrm{Aut}_a\,(T/G)$ est donnée par $\bar{\xi}_{ij}: x \to [\xi_{ij}(x)]_G$. De même, on définit $\overline{2.\xi_{ij}(x)}$. D'autre part, la multiplication par 2 dans $\mathbb{C}$ définit un isomorphisme de T/G sur T. Donc, les fibrés F_1/G et F_2/G sont isomorphes aus fibrés F_1 et F_2 de base X, fibre T et dont les classes dans $H^1(X, K_q)$ sont respectivement $2.\xi$ et $4.\xi$. On a alors:

LEMMA 2.7. *Les deux fibrés F_1/G et F_2/G définis en* 2.6 *ne sont pas non plus isomorphes en tant que variétés.*

Démonstration. D'aprés 2.6 on peut regarder ces fibrés comme des fibrés sur X de fibre T dont les classes dans $H^1(X, K_q)$ sont $2.\xi$ et $4.\xi$. Il est d'ailleurs évident (cfr. [Pa], proposition 3.7) qu'il suffit de montrer que F_1/G et F_2/G ne sont pas isomorphes en taut que $\mathrm{Aut}_a\,(T)$-fibrés. On sait aussi (cfr. [Pa], théorème 3.4) que la condition suffisante sur ξ pour que F_1 et F_2 ne soient pas isomorphes est que: pour tout $\rho \in \mathrm{Aut}_g\,(T)$, soit:

$$(\rho|_{K_q})^1_*(\xi) \neq 2\xi \tag{*}$$

De même, pour conclure que $F_1/G \not\cong F_2/G$, il suffit de démontrer que pour tout $\rho \in \mathrm{Aut}_g\,(T)$, $(\rho|_{K_q})^1_*(2.\zeta) \neq 4.\zeta$, ce qui est évident d'après (*).

Par ailleurs, on *a*:

Remarque 2.8. Soit

$$p' : \frac{T\times\mathbb{P}_1}{G} \to \frac{T}{G}$$

la projection $p' : [t, z]_G \to [t]_G$. Alors le triplet

$$\mathfrak{S}' := \left(\frac{T\times\mathbb{P}_1}{G}, p', \frac{T}{G}\right)$$

est une fibration localement triviale avec $\mathbb{P}_1$ comme fibre type. On peut donc prouver:

PROPOSITION 2.9. *En tant qu'espaces analytiques, les fibrés de Seifert* H_i, $i=1,2$ (*définis en* 2.4) *ne sont pas non plus isomorphes.*

Démonstration. Évidemment, les H_i, $i=1,2$, sont des fibrés localement triviaux sur F_i/G. D'après le lemme 2.5, in isomorphisme analytique de H_1 sur H_2 induit un isomorphisme analytique de F_1/G sur F_2/G, ce qui n'existe pas d'après le lemme 2.7.

§ 3. Les variétés $(F_i \times \mathbb{P}_1)/G$

Le but de ce paragraphe est de montrer que les variétés $(F_i \times \mathbb{P}_1)/G$, $i=1,2$, ne sont jamais l'espace total d'une fibration localement trivial, ayant comme fibre une courbe elliptique.

3.1. *La situation locale*

G agissant librement et proprement discontinuement sur $T \times \mathbb{P}_1$, $(T \times \mathbb{P}_1)/G$ est une variété lisse. Afin que une telle variété soit l'espace total d'une fibration de fibre une courbe elliptique sur un espace analytique C, il faut que C soit une surface de Riemann compacte.

Plus précisément, on a:

PROPOSITION 3.1.1. *S'il existe une fibration localement triviale* $\Delta = [(T \times \mathbb{P}_1)/G, \delta, C]$ *avec une courbe elliptique* $\tilde{T}$ *comme fibre type, on a:*

i) $C \cong \mathbb{P}_1$

ii) $(T \times \mathbb{P}_1)/G = \mathbb{P}_1 \times \tilde{T}$

iii) *Il existe un isomorphisme* $\chi : \tilde{T} \to T/G$ *qui rend commutatif le diagramme:*

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{T \times \mathbb{P}_1}{G} & = & \tilde{T} \times \mathbb{P}_1 \\ {\scriptstyle p'} \big\downarrow & & \big\downarrow {\scriptstyle pr_{\tilde{T}}} \\ T/G & \longleftarrow & \tilde{T} \end{array} \tag{5}$$

Démonstration. i) On procède par l'absurde, en supposant que le genre $g(C)$ de la courbe C soit supérieur ou égal à 1. Si p' est la projection définie en 2.δ, l'application $\delta : (T \times \mathbb{P}_1)/G \to C$ est constante si on la restreint aux fibres de p'. Donc, chaque fibre de p' serait inclue dans une fibre de δ, ce qui est absurde, car il n'existe pas d'applications non constantes de $\mathbb{P}_1$ dans $\tilde{T}$.

ii) $(T \times \mathbb{P}_1)/G$ étant une surface réglée de base T/G, son premier nombre de

Betti, $b_1[(T \times \mathbb{P}_1)/G]$, est égal à 2. (cfr. e.g. [Be], proposition III, 2.1.). D'autre part, ou peut voir $(T \times \mathbb{P}_1)/G$ comme une surface elliptique sur $\mathbb{P}_1$. Pour une telle surface, (b_1 étant égal à 2), on a alors (cfr. [Su][4], page 306):

$$\frac{T \times \mathbb{P}_1}{G} = \tilde{T} \times \mathbb{P}_1.$$

iii) Évident.

Remarque 3.1.2. Si Δ est une fibration localement triviale, il existe un isomorphisme $f:(T \times \mathbb{P}_1)/G \to T/G \times \mathbb{P}_1$ qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} \frac{T \times \mathbb{P}_1}{G} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p'"'] & & T/G \times \mathbb{P}_1 \arrow[dl, "\bar{p}"] \\ & T/G & \end{tikzcd} \tag{6}$$

où $\bar{p}: T/G \times \mathbb{P}_1 \to T/G$ est la projection canonique. Cependant, on *a*:

LEMME 3.1.3. *Soit E une courbe elliptique, s_1 et s_2 deux sections disjointes d'une surface reglée triviale $E \times \mathbb{P}_1$; alors s_1 et s_2 sont constantes et, en particulier, définissent des diviseurs linéairement équivalents.*

Démonstration. On $a: E \times \mathbb{P}_1 \cong \mathbb{P}(\mathcal{O}_E \oplus \mathcal{O}_E)$. Les sections s_1 et s_2 définissent deux sous-fibrès A et B de $\mathcal{O}_E \oplus \mathcal{O}_E$ et on $a: A \oplus B = \mathcal{O}_E \oplus \mathcal{O}_E$.

D'après [At, théorème 3] A et B sont triviaux, d'où la conclusion. On peut maintenant montrer:

PROPOSITION 3.1.4. *La surface réglée $p':(T \times \mathbb{P}_1)/G \to T/G$ n'est pas triviale.*

Démonstration. D'après le lemme 3.1.3., il suffit de construire deux sections disjointes de la surface dont les diviseurs associés ne soient pas linéairement équivalents.

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{P}_1$ les points coordonnées $(0,1)$ et $(1,0)$. Considérons les sections $s_i: T/G \to (T \times \mathbb{P}_1)/G$ du fibré O' définies par: $s_i([t]_G) := [t, z_i]_G$, $(i=1,2)$ et soient D_1 et D_2 les diviseurs associés. On remarque d'abord que l'application

---

[4] On remercie C. Turrini et A. Lanteri pour nous avoir aimablement indiqué ce travail.

$\lambda : \mathbb{P}_1/G \to \mathbb{P}_1$ donnée par $\lambda([a,b]_G) := (a^2, b^2)$ est un isomorphisme. Si $\nu : (T \times \mathbb{P}_1)/G \to \mathbb{P}_1$ est la fonction méromorphe définie par $\nu([t,(a,b)]) = a^2/b^2$ on $a : 2(D_1 - D_2) = \mathrm{Div}(\nu)$.

Supposons par l'absurde que D_1 et D_2 soint linéairement équivalents. Il existe alors une fonctions méromorphe $h : (T \times \mathbb{P}_1)/G \to \mathbb{P}_1$ telle que $\nu = h^2$. Si $\tilde{\nu}$ et $\tilde{h}$ sont les fonctions méromorphes sur $T \times \mathbb{P}_1$ obtenues en relevant ν et h, on a:

i) $\tilde{h}(g+t, g \cdot z) = \tilde{h}(t,z), \qquad \forall g \in G,\ t \in T,\ z \in \mathbb{P}_1$

ii) $\tilde{\nu} = (\tilde{h})^2$.

Or, ii) entraîne $\tilde{h} = \pm a/b$, ce qui est absurde puisque $\tilde{h}$ est G-invariante tandis que a/b et $-a/b$ ne le sont pas.

En résumant, on a donc prouvé:

THÉORÈME 3.1.5. *Le triplet* $\mathfrak{S} = [(T \times \mathbb{P}_1)/G, p, \mathbb{P}_1/G]$ *est un espace produit de Seifert ayant T comme fibre type. De plus, la variété* $(T \times \mathbb{P}_1)/G$ *n'est pas l'espace total d'une fibration localement triviale, ayant comme fibre type une courbe elliptique.*

3.2. *La situation globale*

$(T \times \mathbb{P}_1)/G$ étant une variété lisse, il en est de même pour $(F_i \times \mathbb{P}_1)/G$, $i = 1, 2$.

En outre, si $(F_i \times \mathbb{P}_1)/G$ est l'espace total d'une fibration, la base de la fibration est une surface lisse compacte.

PROPOSITION 3.2.1. *S'il existe une fibration localement triviale* $\mathcal{F} = [(F_i \times \mathbb{P}_1)/G, \varphi_i, S]$ *de fibre type une courbe elliptique* $\tilde{T}$, *alors il existe une application holomorphe:* $\sigma : S \to X$ *qui rend commutatif le diagramme:*

$$\begin{tikzcd} & \dfrac{F_i \times \mathbb{P}_1}{G} \arrow[dl, "\pi_i"'] \arrow[ddr, "\varphi_i"] & \\ X \times \dfrac{\mathbb{P}_1}{G} \arrow[d, "\mathrm{pr}_X"'] & & \\ X & & S \arrow[ll, "\sigma"'] \end{tikzcd} \tag{7}$$

et dont les fibres sont isomorphes à $\mathbb{P}_1$.

Démonstration. Soient $s \in S$ et ρ une section locale du fibré $\mathcal{F}_i$ définie dans un voisinage ouvert du point s. La restriction de $\mathrm{pr}_x \cdot \pi_i$ à la fibre $\varphi_i^{-1}(s) \cong \tilde{T}$ est holomorphe donc elle est constante. La composition $\mathrm{pr} \cdot \pi_i \cdot \rho$ définit donc une application qui ne dépend pas du choix de ρ. On peut donc construire une

application holomorphe surjective $\alpha : S \to X$ qui rend commutatif le diagramme (7). D'autre part, $\mathcal{H}_i \mid (\varphi_i)^{-1}(\sigma^{-1}(x))$ est un fibré sur $\sigma^{-1}(x)$ de fibre $\tilde{T}$.
On a : $(\varphi_i)^{-1}\sigma^{-1}(x) = T_i^{-1}(\mathrm{pr}_x)^{-1}(x) = \{x\} \times (T \times \mathbb{P}_1)/G$. Donc $(\{x\} \times (T \times \mathbb{P}_1)/G, \varphi_i, \sigma^{-1}(x))$ est un fibré sur $\sigma^{-1}(x)$ de fibre $\tilde{T}$. Alors d'après la proposition 3.1.3., $\sigma^{-1}(x) \cong \mathbb{P}_1$, $\forall x \in X$.

PROPOSITION 3.3.2. *La variété $(F_i \times \mathbb{P}_1)/G$ n'est pas l'espace total d'une fibration ayant comme fibre type une courbe elliptique.*

Démonstration. Si c'était le cas, il existerait une fibration $\varphi : (T \times \mathbb{P}_1)/G \to G$ localement triviale, de fibre une courbe elliptique, ce qui est absurde d'après le théorème 3.1.5.

BIBLIOGRAPHIE

[At] ATIYAH, M. *On the Krull-Schmidt theorem with application to sheaves.* Bull. Soc. Math. France, *84*, 1956; p. 307–317.

[Be] BEAUVILLE, A. *Surfaces algégriques complexes.* Astérisque *54*, 1978.

[Br, 1] BRUN, J. *Sur la simplification par les grassmanniennes.* Fonctions de plusieurs variables complexes. Seminaire F. Norguet, 1975–1976. Lect. Notes in Math, n° 670; Springer, 101–104.

[Br, 2] BRUN, J. *Sur la simplification par les variétés homogènes.* Math. Ann. *230*, 175–182; 1977.

[Fu] FUJITA, T. *Cancellation Problem of complete varieties.* Invent. math. *64*, 119–121; 1981.

[Ho] HOLMANN, H. *Seifertsche Faserräume.* Math. Ann. *157*; 138–166; 1974.

[Pa] PARIGI, G. *Sur la simplification par les tores complexes.* Journal für die reine und angewandte Mathematik. *322*; 42–52; 1981.

[Re] REMMERT, R. *Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Raüme.* Math. Ann. 133; 328–370 (1957).

[Sh] SHIODA, T. *Some remarks on abelian varieties.* Fac. Sc. the University of Tokio, *24*; 11–21; 1977.

[Su] SUWA, T. *On ruled surfaces of genus* 1. Journ. Math. Soc. Japan, *21*; 291–311; 1969.

Università di Ferrara
Istituto di Matematica
Via Machiavelli, 35
I-44100 Ferrara, Italia

Università di Firenze
Instituto di Matematica Applicata
Via. S. Marta, 3
I-50139 Firenze-Italia

Received: May 6, 1982/Sept. 15, 1983