

# Formules intégrales pour certains invariants locaux des espaces analytiques complexes.

Autor(en): **Loeser, Francois**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **59 (1984)**

PDF erstellt am: **11.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-45392>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Formules intégrales pour certains invariants locaux des espaces analytiques complexes

FRANÇOIS LOESER

### Introduction

Soit  $f: (\mathbb{C}^{N+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  un germe de morphisme analytique à singularité isolée en zéro. Un théorème classique du à Langevin [L] dit que l'on a l'égalité:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow 0} \int_{B_\varepsilon \cap f^{-1}(t)} c_N^w(T_f) = (-1)^N (\mu^{(N+1)} + \mu^{(N)}), \tag{1}$$

la double limite signifiant que pour  $\varepsilon > 0$  fixé l'intégrale  $\int_{B_\varepsilon \cap f^{-1}(t)} c_N^w(T_f)$  a une limite quand  $t$  tend vers zéro qui a elle même une limite quand  $\varepsilon$  tend vers zéro. Ici  $\mu^{(N+1-i)}$  désigne le nombre de Milnor d'une section de  $f^{-1}(0)$  par un plan général  $D^i$  de codimension  $i$  passant par zéro,  $c_N^w(T_f)$  la  $N$  ième forme de Chern-Weil du fibré tangent relatif aux fibres lisses  $f^{-1}(t)$  muni de la structure hermitienne induite par celle de  $\mathbb{C}^{N+1}$  et  $B_\varepsilon$  la boule de centre zéro et de rayon  $\varepsilon$ .

On en déduit aussitôt l'égalité

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow 0} \int_{B_\varepsilon \cap f^{-1}(t) \cap D^i} c_{N-i}^w(T_{f/D^i}) = (-1)^{N-i} (\mu^{(N+1-i)} + \mu^{(N-i)}). \tag{1}^i$$

Il est tentant de demander pour  $\mu^{(N+1-i)} + \mu^{(N-i)}$  une formule intégrale non plus sur  $B_\varepsilon \cap f^{-1}(t) \cap D^i$  mais sur  $B_\varepsilon \cap f^{-1}(t)$ . Le candidat naturel pour cela est la formule:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow 0} \int_{B_\varepsilon \cap f^{-1}(t)} c_{N-i}^w(T_f) \wedge \omega^i = (-1)^{N-i} (\mu^{(N+1-i)} + \mu^{(N-i)}) \tag{*}^i$$

où

$$\omega = \frac{i}{2\pi} \partial \bar{\partial} \log \|z\|^2.$$

que Griffiths dans [Gr] déduit de la “formule de Crofton III” suivante:

*Si  $X \subset \mathbb{C}^{N+1}$  est une variété analytique complexe de dimension  $d$  ne passant pas par zéro, alors*

$$\int_X c_{d-i}^w(\Omega_X) \wedge \omega^i = \int_{G(N+1-i, N+1)} \left( \int_{X \cap H^i} c_{d-i}^w(\Omega_{X \cap H^i}) \right) dL$$

*$dL$  étant la mesure de Haar de masse totale 1 sur la grassmannienne  $G(N+1-i, N+1)$  des plans  $H^i$  de codimension  $i$  dans  $\mathbb{C}^{N+1}$  passant par zéro,  $c_{d-i}^w(\Omega_X)$  la  $d-i$  ième forme de Chern-Weil associée à la structure hermitienne de  $X$  et  $c_{d-i}^w(\Omega_{X \cap H^i})$  celle associée à la structure hermitienne de  $X \cap H^i$  induite par celle de  $H^i$ .*

Malheureusement, la démonstration que donne Griffiths de cette formule de Crofton III ne semble pas complète. Nous allons expliquer pourquoi déjà le fait qu’une telle formule est vraie asymptotiquement est non trivial: c’est le théorème de transversalité des variétés polaires relatives ([T1], [H-M]); en effet on peut voir le terme de gauche de la formule de Crofton comme concernant des sections planes d’espaces tangents relatifs et celui de droite comme concernant des espaces tangents relatifs à des sections planes. Il nous faut en fait comparer ces espaces seulement au voisinage de zéro: le théorème de transversalité des variétés polaires relatives permet justement de comparer les limites d’espaces tangents à des sections de limites d’espaces tangents.

On est donc conduit à distinguer deux types de résultats en géométrie intégrale: d’un côté ceux qui permettent de montrer des formules du type (1) et dont les analogues en géométrie analytique sont des résultats de transversalité dimensionnelle permettant de mettre en position générale un objet mobile et un objet fixe en utilisant le théorème de Kleiman et la condition a) de Whitney, de l’autre ceux qui tels la formule de Crofton III ont pour analogue en géométrie analytique un résultat de transversalité fin comme le théorème de transversalité des variétés polaires relatives, qui permet de mettre en position générale deux objets mobiles dépendant du même paramètre, et utilise la dépendance intégrale ([T1]) ou la condition w) de Verdier ([H-M]).

En utilisant ce résultat de transversalité fin (qui il faut le remarquer semble plus “faible” que Crofton III) et les méthodes de Lê et Teissier dans [Lê-T] nous démontrons  $(*)^i$  dans la première partie du présent travail, dans un cadre un peu plus général puisque nous remplaçons  $\mathbb{C}^{N+1}$  par un espace analytique réduit équidimensionnel quelconque, le terme de droite de  $(*)^i$  devant alors être interprété comme une multiplicité d’intersection de  $f^{-1}(0) \cap D^i$  et d’une courbe

polaire. Dans le cas  $i = 0$  une telle formule était déjà connue ([L-Lê], [Du]). Dans [Ke] Kennedy a d'autre part donné une démonstration directe de la formule pour  $\mu^{(N+1)}$  que l'on obtient en sommant les formules  $(*)^i$ .

Dans la seconde partie nous expliquons comment grâce au théorème des résidus de King on peut obtenir l'obstruction d'Euler locale des sections planes générales d'un espace analytique comme limite d'intégrale sur l'intersection de cet espace (et non de la section de cet espace) avec une sphère. On peut interpréter cette formule comme un résultat concernant la structure de contact associée à une singularité, dont l'étude plus approfondie serait intéressante. En codimension zéro on retrouve un résultat énoncé par Varchenko dans [V] pour les surfaces à singularité isolée dans  $\mathbb{C}^3$  et en codimension maximale le théorème de Lelong-Thie-Draper sur la multiplicité d'un ensemble analytique.

Dans la troisième partie nous illustrons le principe que les formules intégrales ne faisant pas intervenir de sections planes sont plus faciles à obtenir que les autres. En effectuant un calcul d'obstruction à la Bott-Chern nous obtenons une formule intégrale explicite pour l'obstruction d'Euler locale qui permet de retrouver directement et de comparer le théorème de Langevin et la formule de Varchenko généralisée ainsi que de retrouver la formule de Gonzalez-Verdier.

Je tiens à remercier vivement B. Teissier pour ses conseils précieux et ses encouragements qui ont rendu possible ce travail.

## 1ere Partie

Soit  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^{N+1}, 0)$  un espace analytique réduit équidimensionnel de dimension  $d$  défini au voisinage de zéro et muni d'un morphisme analytique ouvert  $f: (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ . On note:

- $X(t)^0$  la partie lisse de la fibre  $X(t) = X \cap f^{-1}(t)$ .
- $X^i$  la section de  $X$  par un plan  $D^i$  de codimension  $i$  passant par zéro et au demeurant assez général.
- $\Gamma_f^i$  une courbe polaire relative générale associée au morphisme  $f|_{X^i}: (X^i, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  (cf [T1] ou voir plus loin)

Comme  $f^{-1}(0) \cap X^i = X^i(0)$  est une intersection complète dans  $X^i$  on peut définir la multiplicité d'intersection de  $X^i(0)$  et  $\Gamma_f^i$  en zéro dans  $X^i$  par la formule

$$I_{(X^i, 0)}(\Gamma_f^i, X^i(0)) = \sum_{j \geq 0} (-1)^j \text{long}_{\mathcal{O}_{X^i, 0}} \text{Tor}_j^{\mathcal{O}_{X^i, 0}}(\mathcal{O}_{\Gamma_f^i}, \mathcal{O}_{X^i(0)})$$

il est facile de voir (ce qui sera fait plus loin) que dans le cas présent les  $\text{Tor}_j$  sont nuls pour  $j > 0$ .

On note d'autre part:

- $B_\varepsilon$  la boule fermée de centre zéro et de rayon  $\varepsilon$ .
- $c_{d-1-i}^w(T_f)$  la  $d-1-i$  ème forme de Chern Weil associée au fibré tangent relatif  $T_f$  sur  $X(t)^0$  muni de la structure hermitienne fournie par le plongement de  $X$  dans  $\mathbb{C}^{N+1}$ .
- $\omega = i/2\pi \partial\bar{\partial} \log \|z\|^2$  l'image réciproque sur  $\mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\}$  de la forme de Kähler sur  $\mathbb{P}^N$ .

Le résultat principal de la première partie est:

**THÉORÈME 1.** Soit  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^{N+1}, 0)$  un espace analytique réduit équidimensionnel de dimension  $d$  défini au voisinage de zéro et muni d'un morphisme analytique ouvert  $f: (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ . On a l'égalité, pour  $0 \leq i \leq d-1$ :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow 0} \int_{B_\varepsilon \cap X(t)^0} c_{d-1-i}^w(T_f) \wedge \omega^i = (-1)^{d-1-i} I_{(X,0)}(\Gamma_f^i, X^i(0)).$$

*Remarques.* a) lorsque  $i=0$  ce résultat est du à Langevin-Lê et Dubson ([L-Lê], [D]).

b) lorsque  $X = \mathbb{C}^{N+1}$  et  $f$  présente une singularité isolée en zéro on a  $I_{(X,0)}(\Gamma_f^i, X^i(0)) = \mu^{(N+1-i)} + \mu^{(N-i)}$  d'après Teissier ([T2]) où  $\mu^{(N+1-i)}$  est le nombre de Milnor associé à  $X^i$ . On retrouve donc le résultat de Griffiths ([Gr] 5.22) dont la démonstration reposait jusqu'à présent sur la "formule de Crofton III". En sommant ces égalités on obtient la formule que démontre Kennedy dans [Ke]:

$$1 + (-1)^N \mu^{(N+1)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow 0} \int_{B_\varepsilon \cap X(t)} \sum_{i=0}^N c_{N-i}^w(T_f) \wedge \omega^i.$$

*Démonstration du théorème 1.* On dispose du diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccccc} & & & X \times G & \\ & & & \nearrow & \searrow \\ X \times \mathbb{P}^N \times G \supset E_0 N_f(X) & \xrightarrow{\tilde{e}} & N_f(X) & \xrightarrow{\gamma_f} & G \\ \downarrow \nu_f & & \downarrow \nu_f & & \\ X \times \mathbb{P}^N \supset E_0(X) & \xrightarrow{e} & X & & \\ \downarrow & & & & \\ \mathbb{P}^N & & & & \end{array}$$

où

- $G = G(d-1, N+1)$  est la grassmannienne des  $d-1$  plans de  $\mathbb{C}^{N+1}$
- $\nu_f: N_f(X) \rightarrow X$  est la modification de Nash relative (cf. [T1])
- $e: E_0(X) \rightarrow X$  est l'éclatement dans  $X$  de l'idéal définissant  $\{0\}$ .
- $\tilde{e}: E_0 N_f(X) \rightarrow N_f(X)$  est l'éclatement dans  $N_f(X)$  de  $\nu_f^{-1}(0)$ .
- $\nu'_f: E_0 N_f(X) \rightarrow E_0(X)$  est donné par la propriété universelle de l'éclatement.

On considère dans  $E_0 N_f(X)$ :

- la transformée totale  $\mathfrak{Y}_f$  de  $f^{-1}(0)$ : si  $f^{-1}(0)$  est défini par l'idéal  $\mathcal{I}$  de  $\mathcal{O}_{X(0)}$  le sous-espace  $\mathfrak{Y}_f$  est défini par  $\mathcal{I} \mathcal{O}_{E_0 N_f(X)}$  dans  $E_0 N_f(X)$ .

- La famille  $(\mathfrak{Y}_i)_{i \in I}$  des composantes irréductibles de  $\mathfrak{Y}_f$  dont la projection sur  $X$  est réduite au point zéro et le cycle  $D_f = \sum_{i \in I} m_i \mathfrak{Y}_i$ ,  $m_i$  étant la multiplicité de  $\mathfrak{Y}_f$  au point générique de  $\mathfrak{Y}_i$ .

On remarquera que l'espace réduit sous jacent à  $D_f$  est inclus dans  $\{0\} \times \mathbb{P}^N \times G$ . Sur  $\{0\} \times \mathbb{P}^N \times G$  on considère les fibrés  $T_f$  et  $\xi$  images réciproques respectives des fibrés universels sur  $G$  et sur  $\mathbb{P}^N$ .

Si  $[D_f] \in H_*({0} \times \mathbb{P}^N \times G)$  désigne la classe fondamentale du cycle  $D_f$  les classes de Chern de  $T_f$  et  $\xi$  agissent par cap produit sur  $[D_f]$ . On peut donc considérer l'entier  $\deg(c_{d-1-i}(T_f) \cdot c_1(\xi)^i \cap [D_f])$ .

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer la proposition suivante qui est l'analogie relatif d'un théorème de Lê et Teissier ([Lê-T], Th 5.1.1.)

**PROPOSITION.** *On a l'égalité*

$$\deg(c_{d-1-i}(T_f) \cdot c_1(\xi)^i \cap [D_f]) = (-1)^{d-1} I_{(X^i, 0)}(\Gamma_f^i, X^i(0))$$

*Plan de la démonstration.* On voit tout d'abord le terme de gauche comme une multiplicité d'intersection de cycles dans  $\{0\} \times \mathbb{P}^N \times G$  que l'on calcule par une série de réductions dans  $E_0 N_f X$  puis dans la transformée stricte dans  $E_0 N_f X$  d'une section générique de  $X$ . Le théorème de transversalité des variétés polaires relatives permet alors d'effectuer ce calcul dans la modification de Nash d'une telle section.

*Démonstration.* On considère un drapeau  $\mathcal{D}: D_{N+1} \subset \dots \subset D_0$  de sous espaces vectoriels, avec  $D_i$  de codimension  $i$  dans  $\mathbb{C}^{N+1}$ , et on lui associe le cycle de Schubert de codimension  $k$  dans  $G$ :

$$c_k(\mathcal{D}) = \{E \in G \mid \dim E \cap D_{d-k} \geq k\}.$$

Le théorème de Kleiman (cf. [K1]) que nous utiliserons plusieurs fois nous permet étant donnés deux sous espaces algébriques  $E = \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha$  et  $Z = \bigcup_{\beta \in B} Z_\beta$  de

$\mathbb{P}^N \times G$  munis de stratifications de Whitney  $(E_\alpha)_{\alpha \in A}$  et  $(Z_\beta)_{\beta \in B}$  d'affirmer qu'il existe un ouvert de Zariski dense  $U$  de  $GL(N+1, \mathbb{C}) \times GL(N+1, \mathbb{C})$  tel que pour toute strate  $E_\alpha$  de  $E$  et tout  $\gamma$  de  $U$ , le translaté  $\gamma E_\alpha$  soit transverse à toutes les strates de  $Z$ .

Cet argument prouve en particulier que si  $\mathcal{D}$  est un drapeau assez général et  $H^i$  un plan de codimension  $i$  dans  $\mathbb{P}^N$  assez général également, alors  $\{0\} \times H^i \times c_{d-1-i}(\mathcal{D})$  coupe  $D_f$  proprement dans  $\{0\} \times \mathbb{P}^N \times G$ .

L'interprétation classique des classes de Chern des variétés projectives lisses comme classes d'obstruction nous permet alors d'écrire:

$$\deg(c_{d-1-i}(T_f) \cdot c_1(\xi)^i \cap [D_f]) = (-1)^{d-1} I_{\{0\} \times \mathbb{P}^N \times G}(\{0\} \times H^i \times c_{d-1-i}(\mathcal{D}), D_f)$$

où  $I_{\{0\} \times \mathbb{P}^N \times G}(\ , \ )$  désigne la multiplicité d'intersection de cycles de dimensions complémentaires se coupant proprement dans  $\{0\} \times \mathbb{P}^N \times G$ .

L'associativité de l'intersection sur les espaces lisses nous permet de calculer cette intersection dans  $\mathbb{C}^{N+1} \times \mathbb{P}^N \times G$ , i.e. d'écrire:

$$\deg(c_{d-1-i}(T_f) \cdot c_1(\xi)^i \cap [D_f]) = (-1)^{d-1} I_{\mathbb{C}^{N+1} \times \mathbb{P}^N \times G}(\mathbb{C}^{N+1} \times H^i \times c_{d-1-i}(\mathcal{D}), D_f)$$

Rappelons maintenant le lemme suivant qui résulte de l'ouverture de la transversalité et des conditions de Whitney:

**LEMME 1** ([L-T] 2.2.1.1). *Soit  $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$  une stratification d'un espace analytique complexe qui satisfait les conditions de Whitney. Soient  $x \in X$  et  $X_{\alpha(x)}$  la strate contenant  $x$ . Pour tout plongement local en  $x$  de  $X$  dans un espace euclidien  $\mathbb{C}^D$  et pour tout sous espace non singulier  $Z$  défini dans un voisinage de  $X$  dans  $\mathbb{C}^D$  et transverse à  $X_{\alpha(x)}$  en  $X$ , il existe un voisinage  $U$  de  $x$  dans  $\mathbb{C}^D$  tel que, pour tout  $y \in U$ ,  $Z$  soit transverse en  $y$  à toute strate  $X_\beta$  telle que  $\bar{X}_\beta \supset X_{\alpha(x)}$ .*

Supposons, ce qui est loisible, que  $E_0 N_f(X)$  soit muni d'une stratification de Whitney telle que  $D_f$  et  $\mathcal{Y}_f$  soient réunion de strates. Supposons de même que  $H^i \times c_{d-1-i}(\mathcal{D})$  soit muni d'une stratification de Whitney. D'après le théorème de Kleiman tel qu'il a été rappelé, pour  $\mathcal{D}$  et  $H^i$  assez généraux, les espaces stratifiés  $\{0\} \times H^i \times c_{d-1-i}(\mathcal{D})$  et  $D_f$  sont transverses dans  $\{0\} \times \mathbb{P}^N \times G$ .

D'après le lemme précédent pour un tel choix de  $H^i$  et de  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{Y}_f$  est transverse à  $\mathbb{C}^{N+1} \times H^i \times c_{d-1-i}(\mathcal{D})$  sur un voisinage de  $\{0\} \times \mathbb{P}^N \times G$  dans  $\mathbb{C}^{N+1} \times \mathbb{P}^N \times G$ . Pour des raisons de dimension, sur un tel voisinage  $\mathcal{Y}_f$  ne peut rencontrer  $\mathbb{C}^{N+1} \times H^i \times c_{d-1-i}(\mathcal{D})$  qu'en un nombre fini de points. Il y a donc un voisinage de  $\{0\} \times \mathbb{P}^N \times G$  sur lequel  $\mathcal{Y}_f$  ne rencontre  $\mathbb{C}^{N+1} \times H^i \times c_{d-1-i}(\mathcal{D})$  qu'en des points de  $D_f$ . Quitte à choisir un représentant plus petit de  $X$  (dépendant de  $H$  et de  $\mathcal{D}$ ) on

peut donc supposer que  $\mathcal{Y}_f$  ne rencontre  $\mathbb{C}^{N+1} \times H^i \times c_{d-1-i}(\mathcal{D})$  qu'en des points de  $D_f$ . C'est ce qu'on suppose dans la suite de ce travail.

Nous allons maintenant montrer que pour  $\mathcal{D}$  et  $H^i$  assez généraux  $I = I_{\mathbb{C}^{N+1} \times \mathbb{P}^N \times G}(\mathbb{C}^{N+1} \times H^i \times c_{d-1-i}(\mathcal{D}), D_f)$  est égal à la somme des multiplicités de l'idéal  $\mathcal{I}$  dans les anneaux locaux  $\mathcal{O}_{E_0 N_f(X) \cap \mathbb{C}^{N+1} \times H^i \times c_{d-1-i}(\mathcal{D}), P}$  pour  $P$  décrivant  $D_f \cap \mathbb{C}^{N+1} \times H^i \times c_{d-1-i}(\mathcal{D})$  que l'on note  $\text{mult}(\mathcal{I} \mathcal{O}_{E_0 N_f(X) \cap \mathbb{C}^{N+1} \times H^i \times c_{d-1-i}(\mathcal{D})})$ . Pour cela on remarque que  $I = I_{\mathbb{C}^{N+1} \times \mathbb{P}^N \times G}(\mathbb{C}^{N+1} \times H^i \times c_{d-1-i}(\mathcal{D}), \mathcal{Y}_f)$  et que d'après le théorème de Kleiman pour  $H^i$  et  $\mathcal{D}$  assez généraux les hypothèses du lemme suivant sont vérifiées avec  $Y = \mathbb{C}^{N+1} \times \mathbb{P}^N \times G$ ,  $Z = \mathbb{C}^{N+1} \times H^i \times c_{d-1-i}(\mathcal{D})$ ,  $X = E_0 N_f(X)$  et  $D = \mathcal{Y}_f$ .

LEMME 2 (d'après [L-T] 5.1.3.7 et [H-M-S] 4.4.3.). *Soit  $Y$  une variété analytique lisse,  $Z$  et  $X$  deux sous-espaces analytiques réduits de  $Y$  et  $D \subset X$  un diviseur défini par l'idéal  $\mathcal{I}$ . Soit  $n: \bar{X} \rightarrow X$  la normalisation de  $X$ , et  $A$  un fermé analytique de  $D$  d'intérieur vide tel que:*

- 1)  $D \setminus A$  est lisse
- 2) les points de  $n^{-1}(D \setminus A)$  sont des points lisses de  $n^{-1}(D \setminus A)$  et de  $\bar{X}$
- 3) la restriction de  $n$  à  $n^{-1}(D \setminus A) \rightarrow D \setminus A$  est étale

(un tel fermé existe nécessairement). *Si  $Z$  ne rencontre  $D$  qu'en des points de  $D \setminus A$  et ceci transversalement dans  $Y$ , alors  $I_Y(D, Z)$  est égal à la somme des multiplicités de l'idéal  $\mathcal{I}$  dans les anneaux locaux  $\mathcal{O}_{X \cap Z, P}$  pour  $P$  décrivant  $Z \cap D$ .*

*Démonstration.* Soit  $(D_i)_{i \in I}$  les composantes irréductibles de  $D$  et  $m_i$  la multiplicité de  $D$  au point générique de  $D_i$ . On a  $I_Y(D, Z) = \sum_{i \in I} n_i m_i$  si  $n_i$  est le nombre de points d'intersection de  $Z$  avec  $D_i$ . Mais  $\sum_{i \in I} n_i m_i$  est aussi égal au nombre de points d'intersection de  $n^{-1}(X \cap Z)$  avec  $n^{-1}(D)$  car le degré du morphisme étale  $n^{-1}(D_i \setminus A) \rightarrow D_i \setminus A$  est  $n_i$ .

Vérifions que  $n^{-1}(X \cap Z)$  est lisse au voisinage de ses points d'intersection avec  $n^{-1}(D)$ : en effet au voisinage d'un point  $P$  d'intersection de  $Z$  et  $D$  on peut trouver un système régulier de paramètres  $y_1, \dots, y_p$  de  $\mathcal{O}_{D, P}$  tel que  $Z$  soit défini par  $y_1 = \dots = y_p = 0$  au voisinage de ce point; comme au voisinage de  $P$ ,  $n^{-1}(D) \rightarrow D$  est étale les  $y'_i = y_i \circ n$  forment un système régulier de paramètres dans les  $\mathcal{O}_{n^{-1}(D), P}$ , avec  $n(P_j) = P$ . Comme au voisinage de ces points  $\bar{X}$  est lisse, les  $y'_i$  font partie d'un système régulier de paramètres de  $\mathcal{O}_{\bar{X}, P_j}$  et donc  $n^{-1}(X \cap Z)$  qui est défini par  $y'_1 = \dots = y'_p = 0$  au voisinage de  $P_j$  est lisse au voisinage de ces points.

La multiplicité de  $\mathcal{I}$  en chacun des  $\mathcal{O}_{n^{-1}(X \cap Z), P_j}$  est donc un, et leur somme est égale à  $I$ . D'après le théorème de projection des multiplicités de Zariski-Samuel [Z-S Th. 24 ch. 8] appliqué au morphisme fini:  $n^{-1}(X \cap Z) \rightarrow X \cap Z$  on a donc que  $I$  est égal à la somme des multiplicités de  $\mathcal{I}$  dans les anneaux locaux  $\mathcal{O}_{X \cap Z, P}$



pour  $P$  décrivant  $Z \cap D$ . D'autre part  $E_0 N_f(X) \cap \mathbb{C}^{N+1} \times H^i \times G$  est par définition la transformée totale par  $\nu'_f$  de  $E_0 X \cap \mathbb{C}^{N+1} \times H^i$ . Si on appelle  $H^i$  le plan passant par zéro dans  $\mathbb{C}^{N+1}$  correspondant au plan projectif  $H^i$ ,  $(E_0 X \cap \mathbb{C}^{N+1} \times H^i)_{\text{red}}$  est par définition la transformée stricte de  $X \cap H^i$  par l'éclatement  $e$ .

**LEMME 3.** *Si  $H^i$  est assez général  $(E_0 N_f(X) \cap \mathbb{C}^{N+1} \times H^i \times G)_{\text{red}}$  est la transformée stricte de  $(E_0 X \cap \mathbb{C}^{N+1} \times H^i)$  par  $\nu'_f$ .*

*Démonstration.* C'est mutatis mutandis celle du Lemme 5.1.3.2. de [Lê-T].

Dans le cas où la conclusion du lemme est vérifiée, si  $\widehat{X}_f^i$  est le transformé strict de  $(X \cap H^i)_{\text{red}}$  par  $\nu'_f$ ,  $(E_0 N_f(X) \cap \mathbb{C}^{N+1} \times H^i \times G)_{\text{red}}$  est le transformé strict de  $\widehat{X}_f^i$  par  $\tilde{e}$  car  $\nu_f \circ \tilde{e} = e \circ \nu'_f$ .

On pose  $\chi_f^i = (E_0 N_f(X) \cap \mathbb{C}^{N+1} \times H^i \times G)_{\text{red}}$ ; on sait donc que pour  $H^i$  général le lieu exceptionnel de  $\tilde{e} | \chi_f^i: \chi_f^i \rightarrow \widehat{X}_f^i$  est de codimension au moins un dans  $\chi_f^i$ .

D'après le théorème de Kleiman et le lemme 1, quitte à choisir un représentant de  $X$  plus petit, pour  $\mathcal{D}$  assez général  $E_0 N_f(X) \cap \mathbb{C}^{N+1} \times H^i \times c_{d-1-i}(\mathcal{D})$  est une courbe dans  $\chi_f^i$  qui coupe transversalement en des points lisses le lieu exceptionnel de  $\tilde{e} | \chi_f^i$ , c'est-à-dire en au plus un nombre fini de points.

Le morphisme  $\tilde{e} | \chi_f^i \cap \tilde{e}^{-1}(\gamma_f^{-1}(c_{d-1-i}(\mathcal{D})))$ :

$$\chi_f^i \cap \tilde{e}^{-1}(\gamma_f^{-1}(c_{d-1-i}(\mathcal{D}))) \rightarrow \widehat{X}_f^i \cap \gamma_f^{-1}(c_{d-1-i}(\mathcal{D}))$$

est donc fini si  $H^i$  et  $\mathcal{D}$  sont assez généraux.

Dans ce cas d'après ([Z-S] Th. 24 Ch. 8), on a, si  $\mathcal{I}$  désigne l'idéal définissant  $f^{-1}(0)$  dans  $X$ :

$$\text{mult}(\mathcal{I}\mathcal{O}_{\chi_f^i \cap \tilde{e}^{-1}(\gamma_f^{-1}(c_{d-1-i}(\mathcal{D}))})} = \text{mult}(\mathcal{I}\mathcal{O}_{\widehat{X}_f^i \cap \gamma_f^{-1}(c_{d-1-i}(\mathcal{D}))}).$$

Le terme de gauche étant égal par définition à ce qui était noté

$$\text{mult}(\mathcal{I}\mathcal{O}_{E_0 N_f(X) \cap \mathbb{C}^{N+1} \times H^i \times c_{d-1-i}(\mathcal{D})}).$$

Mais on a le théorème de transversalité des variétés polaires relatives de B. Teissier ([T1] Th. 5.1.B et Prop. 5.3.1) qui permet de comparer les limites d'espaces tangents à  $X$  en des points de  $X^i$  aux limites d'espaces tangents à  $X^i$ :

**THÉORÈME.** *Il existe un ouvert de Zariski dense de la grassmannienne des plans de codimension  $i$  passant par l'origine dans  $\mathbb{C}^{N+1}$  tel que, si  $H^i$  appartient à*

cet ouvert:

a) si on pose  $c_{d-i}(H^i) = \{E \in G(d-1, N+1) / \dim E \cap H^i \geq d-i\}$  on a  $\gamma_f^{-1}(c_{d-i}(H^i)) \cap \widehat{X}_f^i = \emptyset$ ; on a alors un morphisme défini sur la partie de  $X^i$  où  $f$  est lisse  $x \rightarrow (x, T_{f^{-1}(f(x))} \cap H^i)$  à valeurs dans  $X^i \times G^i$ ,  $G^i$  étant la grassmannienne des  $d-1-i$  plans de  $H^i$

b) Ce morphisme s'étend en un morphisme de  $\widehat{X}_f^i$  sur  $X^i \times G^i$  dont l'image dans  $X^i \times G^i$  est le modifié de Nash relatif associé à la restriction de  $f$  à  $X^i$  noté  $N_f(X^i)$ .

c) Le morphisme  $\widehat{X}_f^i \rightarrow N_f(X^i)$  alors défini est un morphisme fini biméromorphe.

On en déduit, toujours d'après Zariski-Samuel que:

$$\text{mult}(\mathcal{FO}_{X_f^i \cap \gamma_f^{-1}(c_{d-1-i}(\mathcal{D}))}) = \text{mult}(\mathcal{FO}_{(\gamma_f^i)^{-1}(c_{d-1-i}(\mathcal{D}[i]))})$$

pour  $H^i$  assez général,  $\gamma_f^i$  étant le morphisme de Gauss:  $N_f(X^i) \rightarrow G^i$  et  $\mathcal{D}[i]$  un drapeau de  $H^i$  qui se prolonge en  $\mathcal{D}$ .

Il nous reste à montrer que

$$\text{mult}(\mathcal{FO}_{(\gamma_f^i)^{-1}(c_{d-1-i}(\mathcal{D}[i]))}) = I_{(X^i, 0)}(\Gamma_f^i(\mathcal{D}), X^i(0))$$

pour  $\mathcal{D}$  général, mais pour cela il suffit de montrer que pour  $\mathcal{D}$  général:

$$\text{mult}(\mathcal{FO}_{\gamma_f^{-1}(c_{d-1}(\mathcal{D}))}) = I_{(X, 0)}(\Gamma_f(\mathcal{D}), X(0)).$$

Comme pour  $\mathcal{D}$  général  $\gamma_f^{-1}(c_{d-1}(\mathcal{D}))$  est une courbe et la restriction de  $\nu_f$  à  $\gamma_f^{-1}(c_{d-1}(\mathcal{D}))$  est un isomorphisme local sur un ouvert de Zariski dense de  $\gamma_f^{-1}(c_{d-1}(\mathcal{D}))$ , d'après le théorème de Kleiman et le lemme 1, quitte à choisir un représentant de  $X$  plus petit, la restriction de  $\nu_f$  à  $\gamma_f^{-1}(c_{d-1}(\mathcal{D}))$  est un morphisme fini sur son image par  $\nu_f$  qui est par définition la courbe polaire  $\Gamma_f(\mathcal{D})$ . On a donc, toujours d'après Zariski-Samuel, l'égalité:

$$\text{mult}(\mathcal{FO}_{\gamma_f^{-1}(c_{d-1}(\mathcal{D}))}) = \text{mult}(\mathcal{FO}_{\Gamma_f(\mathcal{D})}) \text{ pour } \mathcal{D} \text{ général.}$$

Il nous reste à montrer l'égalité:

$$\text{mult}(\mathcal{FO}_{\Gamma_f(\mathcal{D})}) = I_{(X, 0)}(\Gamma_f(\mathcal{D}), X(0)).$$

Comme  $\Gamma_f(\mathcal{D})$  est une courbe réduite elle est de Cohen Macaulay. On a donc  $\text{mult}(\mathcal{FO}_{\Gamma_f(\mathcal{D})}) = \text{long}_{\mathcal{O}_{\Gamma_f(\mathcal{D}), 0}}(\mathcal{O}_{\Gamma_f(\mathcal{D})} / f\mathcal{O}_{\Gamma_f(\mathcal{D})})$ . D'autre part la suite exacte;

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{f} \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X / f\mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

donne sur  $\Gamma_f(\mathcal{D})$  une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\Gamma_f(\mathcal{D})} \xrightarrow{f} \mathcal{O}_{\Gamma_f(\mathcal{D})} \rightarrow \mathcal{O}_{\Gamma_f(\mathcal{D})}/f\mathcal{O}_{\Gamma_f(\mathcal{D})} \rightarrow 0$$

puisque  $f$  n'est pas un diviseur de zéro dans  $\mathcal{O}_{\Gamma_f(\mathcal{D})}$ . On a donc  $I_{(X,0)}(\Gamma_f(\mathcal{D}), X(0)) = \text{long}_{\mathcal{O}_{X,0}}(\mathcal{O}_{\Gamma_f(\mathcal{D})}/f\mathcal{O}_{\Gamma_f(\mathcal{D})})$  d'où l'égalité puisque chacune de ces longueurs est égale à  $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{\Gamma_f(\mathcal{D}),0}/f\mathcal{O}_{\Gamma_f(\mathcal{D}),0})$ .

Sur  $\mathbb{C}^{N+1} \times \mathbb{P}^N \times G$  on dispose de prolongements naturels  $T'_f$  et  $\xi'$  de  $T_f$  et  $\xi$  qui sont les images réciproques respectives sur  $\mathbb{C}^{N+1} \times \mathbb{P}^N \times G$  des fibrés universels sur  $G$  et  $\mathbb{P}^N$ ; ils sont munis d'une structure hermitienne naturelle donnée par le plongement de  $X$  dans  $\mathbb{C}^{N+1}$ .

On dispose alors sur  $\mathbb{C}^{N+1} \times \mathbb{P}^N \times G$  de la forme différentielle  $\varphi$  de type  $(d-1, d-1)$  produit de formes de Chern-Weil:

$$\varphi = c_{d-1-i}^w(T'_f) \wedge c_1^w(\xi')^i$$

Posant  $\mathfrak{X}_{\varepsilon,t} = (\nu_f \circ \tilde{e})^{-1}(B_\varepsilon \cap X(t))$  on sait d'après un théorème de Barlet ([B]) que  $\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathfrak{X}_{\varepsilon,t}} \varphi = \int_{\mathfrak{X}_{\varepsilon,0}} \varphi$ , le théorème de convergence dominée montrant alors que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathfrak{X}_{\varepsilon,0}} \varphi = \int_{\mathfrak{Y}_f \cap (\nu_f \circ \tilde{e})^{-1}(0)} \varphi,$$

et puisque  $[\mathfrak{Y}_f \cap (\nu_f \circ \tilde{e})^{-1}(0)] \setminus D_f$  est de dimension strictement inférieure à celle de  $D_f$ , nous avons montré le

LEMME 4.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathfrak{X}_{\varepsilon,t}} \varphi = \int_{D_f} \varphi$$

On a d'autre part le lemme suivant:

LEMME 5. Si  $0 < |t| \ll \varepsilon \ll 1$  alors  $\int_{\mathfrak{X}_{\varepsilon,t}} \varphi = (-1)^i \int_{B_\varepsilon \cap X(t)^0} c_{d-1-i}^w(T_f) \wedge \omega^i$ ,  $X(t)^0$  désignant la partie lisse de  $X(t)$ ,  $T_f$  le fibré tangent relatif défini sur  $X(t)^0$  et  $\omega = i/2\pi \partial\bar{\partial} \log \|z\|^2$ .

*Démonstration.* Si  $0 < |t| \ll \varepsilon \ll 1$  la restriction de  $\nu_f \circ \tilde{e}$  à  $\mathfrak{X}_{\varepsilon,t}$  est un isomorphisme sur  $B_\varepsilon \cap X(t)^0$  en dehors d'un fermé de codimension réelle au moins deux. Le lemme résulte alors de ce que les structures hermitiennes choisies sont compatibles avec l'image réciproque et de ce que le diagramme suivant est

commutatif:

$$\begin{array}{ccc}
 E_0N(X)\setminus\mathcal{Y}_f & \xrightarrow{\pi_1} & \mathbb{P}^N \\
 \downarrow & \nearrow \pi_2 & \\
 X\setminus\{0\} & & 
 \end{array}$$

ainsi que des égalités:  $-\pi_1^*(\Omega) = c_1^w(\xi)$  et  $\pi_2^*(\Omega) = \omega$ ,  $\Omega$  étant la forme de Kähler sur  $\mathbb{P}^N$

LEMME 6. On a l'égalité  $\int_{D_f} \varphi = \text{deg} (c_{d-1-i}(T_f) \cdot c_1(\xi)^i \cap [D_f])$

*Démonstration.* Sur une variété projective lisse telle que  $\{0\} \times \mathbb{P}^N \times G$  les classes duales aux classes de Chern par la dualité de Poincaré sont représentées dans la cohomologie de De Rham par les formes de Chern-Weil ([G-H] p. 413) et à l'intersection des cycles dans l'homologie correspond le cup produit dans la cohomologie de De Rham ([G-H] p. 59).

La conjonction des trois lemmes et de la proposition prouve le Théorème 1.

*Remarque.* Soit  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_l$  une suite décroissante d'entiers naturels avec  $\sum_{1 \leq j \leq l} a_j = d - 1 - i$ . Pour un drapeau  $\mathcal{D}$  de  $G$  on définit le cycle de Schubert:

$$\sigma_{a_1, a_2, \dots, a_l}(\mathcal{D}) = \{E \in G / \dim E \cap D_{d-1-j+a_j} \geq j \forall 1 \leq j \leq l\}.$$

A la suite  $a_1, \dots, a_l$  on associe la suite duale  $a_1^*, \dots, a_l^*$  qui est par définition la plus petite suite d'entiers naturels pour l'ordre lexicographique telle que  $a_{a_j}^* \geq j$  pour tout  $1 \leq j \leq l$ .

Pour  $\mathcal{D}$  général,  $\nu_f(\gamma_f^{-1}(\sigma_{a_1, \dots, a_l}(\mathcal{D})))$  définit un sous espace de  $X$  vide ou de codimension pure  $d - 1 - i$  noté  $\Sigma_{a_1, \dots, a_l}(\mathcal{D})$  et appelé variété polaire relative de symbole  $a_1, \dots, a_l$ .

La démonstration que nous avons donnée dans le cas où  $a_1 = \dots = a_l = 1$ ,  $l = d - 1 - i$ , peut s'adapter sans changement, comme le lecteur le vérifiera, pour donner:

THÉORÈME 1'. On a:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow 0} \int_{B_\varepsilon \cap X(t)^0} c_{a^*}^w(T_f) \wedge \omega^i = (-1)^{d-1-i} I_{(X^i, 0)}(\Sigma_{a_1, \dots, a_l}, X^i(0))$$

où  $c_{a^*}^w(T_f)$  est donnée par la formule de Giambelli:

$$c_{a^*}^w(T_f) = \det |c_{a_j^* - j + k}^w(T_f)|_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq k \leq m}}$$

$X^i$  est une section de  $X$  par un plan général de codimension  $i$  passant par l'origine.

$\Sigma_{a_1, \dots, a_i}$  est une courbe polaire relative générale de symbole  $a_1, \dots, a_i$  associée au morphisme  $f|_{X^i}: X^i \rightarrow \mathbb{C}$ .

### 2ème Partie

Dans cette partie nous démontrons un résultat absolu qui généralise la formule de Lelong–Thie–Draper ([Th], [Dr]) ainsi que celle de Varchenko ([V]).

**THÉORÈME 2.** Soit  $(X, 0)$  un espace analytique réduit équidimensionnel de dimension  $d$  plongé dans  $(\mathbb{C}^N, 0)$ . On a la formule suivante pour  $0 \leq k \leq d - 1$ :

$$Eu_0(X \cap D^k) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{X^0 \cap S_\varepsilon} \frac{\langle dz \cdot z \rangle}{\|z\|^2} \wedge c_{d-1-k}^w(\Theta) \wedge \omega^k$$

où:

- $\mathbb{C}^N$  est muni de la structure hermitienne standard, le produit hermitien étant noté  $\langle . \rangle$  et  $S_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}^N / \|z\| = \varepsilon\}$ .
- $Eu_0(X \cap D^k)$  désigne l'obstruction d'Euler locale en zéro de  $X \cap D^k$  où  $D^k$  est un plan passant par zéro générique de codimension  $k$  (voir [MP], [Lê–T]).
- $\Theta$  est le sous-fibré de rang  $d - 1$  du fibré tangent à la partie lisse  $X^0$  de  $X$  dont la fibre en chaque point est composée de l'unique  $(d - 1)$  plan complexe tangent à  $X$  et à la sphère centrée en zéro passant par ce point.
- $c_{d-1-k}^w(\Theta)$  désigne la  $d - 1 - k$  ème forme de Chern–Weil associée à la structure hermitienne sur  $\Theta$  donnée par le plongement de  $X$  dans  $\mathbb{C}^N$ .
- $\omega = i/2\pi \partial\bar{\partial} \log \|z\|^2$  est l'image réciproque sur  $\mathbb{C}^N \setminus \{0\}$  de la forme de Kähler sur  $\mathbb{P}^{N-1}$ .

### Corollaires

1) Dans le cas où  $N = 3$ ,  $d = 2$  et  $X$  a une singularité isolée en zéro,  $\Theta$  est un fibré en droites et  $2\pi/i c_1(\Theta)$  est égal à la courbure de  $\Theta$ . On retrouve donc le résultat énoncé par Varchenko dans [V] car dans ce cas  $Eu_0(X) = 1 - \mu^{(2)}$ ,  $\mu^{(2)}$  étant le nombre de Milnor d'une section hyperplane générique de  $X$  (d'après la Proposition 6.2.2 de [Lê–T], ou [Pi], [Kato], [Du]).

2) Dans le cas où  $k = d - 1$ , on a  $Eu_0(X \cap D^{d-1}) = \text{mult}_0(X)$  d'après [Lê-T] 5.1.2, et d'autre part

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{X \cap S_\varepsilon} \frac{\langle dz \cdot z \rangle}{\|z\|^2} \wedge \omega^{d-1} &= \left( \frac{i}{2\pi\varepsilon^2} \right)^d \int_{X \cap S_\varepsilon} \langle z \cdot dz \rangle \wedge (\langle dz \cdot dz \rangle)^{d-1} \\ &= \left( \frac{i}{2\pi\varepsilon^2} \right)^d \int_{X \cap B_\varepsilon} \langle dz \cdot dz \rangle^d \end{aligned}$$

or  $\langle dz \cdot dz \rangle^d / (-2i)^d d!$  coincide avec la forme volume sur  $X \cap B_\varepsilon$  et  $\pi^d \varepsilon^{2d} / d! = \text{vol}(B_\varepsilon \cap H)$  où  $H$  est un plan de dimension  $d$  passant par zéro. On retrouve donc la formule de Lelong–Thie–Draper:

$$\text{mult}_0(X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\text{vol}(X \cap B_\varepsilon)}{\text{vol}(H \cap B_\varepsilon)}.$$

La démonstration est similaire à celle du théorème 1 mais moins fatigante car on dispose du Théorème 5.1.1 de [Lê-T].

Considérons le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} E_0N(X) & & \\ \downarrow \tilde{\varepsilon} & \text{où:} & \bullet N(X) \xrightarrow{\nu} X \text{ est la modification de Nash de } X \\ N(X) & & \bullet E_0N(X) \xrightarrow{\tilde{\varepsilon}} NX \text{ est l'éclatement dans } NX \text{ de } \tilde{Y}, \text{ la} \\ & & \text{transformée totale de zéro par } \nu. \\ \downarrow \nu & & \bullet \mathfrak{Y} \text{ est le diviseur exceptionnel } \tilde{\varepsilon}^{-1}(\tilde{Y}). \\ X & & \end{array}$$

D'après le Corollaire 5.1.2 de [Lê-T] on a:

$$Eu_0(X \cap D^k) = \sum_{i=0}^{d-k-1} (-1)^{d-1-i-k} \text{mult}_0(P'_{d-1-i-k})$$

où  $P'_{d-1-i-k}$  est une variété polaire générale de codimension  $d-1-i-k$  dans  $X \cap D^k$ .

Mais d'après le lemme de transversalité des variétés polaires ([Lê-T] 4.1.9.), si  $D^k$  est suffisamment général la multiplicité de  $P'_{d-1-i-k}$  en zéro est aussi celle de  $P_{d-1-i-k}$  en zéro, où  $P_{d-1-i-k}$  est une variété polaire générale de codimension  $d-1-i-k$  de  $X \cap D^k$ . Par définition  $\mathfrak{Y}$  est une sous variété de  $\{0\} \times \mathbb{P}^{N-1} \times G$ ,  $G$  désignant la grassmannienne des  $d$  plans de  $\mathbb{C}^N$ . Si on appelle  $T$  et  $\xi$  les fibrés sur  $\{0\} \times \mathbb{P}^{N-1} \times G$  images réciproques respectives des fibrés tautologiques sur  $G$  et

$\mathbb{P}^{N-1}$ , on peut écrire d'après le théorème 5.1.1 de [Lê-T], si  $D^k$  est assez général:

$$Eu_0(X \cap D^k) = \sum_{i=0}^{d-1-k} (-1)^{i+k} \deg (c_{d-1-i-k}(T) \cdot c_1(\xi)^{i+k} \cap [\mathfrak{Y}])$$

le degré étant calculé dans  $\{0\} \times \mathbb{P}^{N-1} \times G$ .

Si on considère  $T$  et  $\xi$  comme des fibrés hermitiens, la structure hermitienne étant donnée par le plongement de  $X$  dans  $\mathbb{C}^N$ , on en déduit pour les raisons invoquées dans la démonstration du lemme 6 de la première partie que pour  $D^k$  assez général on a:

$$Eu_0(X \cap D^k) = (-1)^k \int_{\mathfrak{Y}} \left( \sum_{i=0}^{d-1-k} (-1)^i c_{d-1-i-k}^w(T) \wedge c_1^w(\xi)^{i+k} \right)$$

les  $c_i^w(T)$  et  $c_i^w(\xi)$  étant les formes de Chern-Weil associées aux fibrés hermitiens  $T$  et  $\xi$ . D'après un lemme classique de Whitney ([G] 4.4.3.), sur  $\mathfrak{Y}$ ,  $\xi$  est un sous fibré de  $T$ . Quitte à remplacer  $X$  par un représentant plus petit du même germe on peut supposer que sur  $E_0N(X)$  la projection orthogonale de  $\xi$  sur  $T$  (sur  $E_0N(X)$   $T$  et  $\xi$  sont tous deux des sous fibrés hermitiens de l'image réciproque du fibré tangent à  $\mathbb{C}^N$  par  $\nu \circ \tilde{e}$  munie de sa structure hermitienne naturelle) définit un sous fibré de rang un  $\xi'$  qui coïncide avec  $\xi$  sur  $\mathfrak{Y}$ . On peut prolonger  $\xi'$  en un fibré hermitien qui continue à s'appeler  $\xi'$  sur un voisinage tubulaire de  $\mathfrak{Y}$  dans  $\mathbb{C}^N \times \mathbb{P}^{N-1} \times G$  et donc obtenir une forme différentielle  $\alpha \in C^\infty$  à support compact qui coïncide avec  $c_{d-1-k}^w(T|_{\xi'}) \wedge c_1^w(\xi)^k$  sur un voisinage de  $\mathfrak{Y}$  dans  $\mathbb{C}^N \times \mathbb{P}^{N-1} \times G$ .

Comme  $\xi$  et  $\xi'$  coïncident sur  $\mathfrak{Y}$ , on a:

$$Eu_0(X \cap D^k) = (-1)^k \int_{\mathfrak{Y}} \alpha.$$

Rappelons maintenant l'utile théorème des résidus de King ([K]):

**THÉORÈME.** *Si  $X$  est un sous-espace analytique réduit de dimension pure  $k$  de l'espace analytique  $W$  de dimension pure  $n > k$  et est le lieu des zéros d'une section holomorphe  $s$  d'un fibré holomorphe sur  $W$ , posant  $\eta = (1/2\pi i) \partial \log \|s\|^2$  et  $\omega = \bar{\partial} \eta$ , on a:*

- 1) les formes  $\eta \wedge \omega^{n-k-1}$  et  $\omega^{n-k}$  sont localement intégrables sur  $W$
- 2) il existe des nombres complexes  $n_i$  tels que l'on aie l'égalité de courants:

$$\sum n_i [X_i] = d(\eta \wedge \omega^{n-k-1}) - \omega^{n-k}$$

les  $X_i$  étant les composantes irréductibles de  $X$  et  $d(\eta \wedge \omega^{n-k-1})$  le bord du courant défini par  $\eta \wedge \omega^{n-k-1}$

3)  $n_i$  est égal à la multiplicité de  $s$  en un point général de  $X_i$ .

*Remarques.* a) l'assertion 1) du théorème peut se voir comme un énoncé de finitude sur un espace analytique complexe. On peut la rapprocher du résultat en apparence évident suivant qui est en fait la difficulté principale dans la démonstration du théorème de Thie: si  $x$  est un point d'un espace analytique  $X \subset \mathbb{C}^N$  et  $V(\varepsilon)$  est l'ensemble des points d'intersection de la sphère de centre  $x$  et de rayon  $\varepsilon$  avec les sécantes joignant  $x$  à un point de  $X$  situé à une distance au plus  $\varepsilon$  de  $x$ , alors le volume de  $V(\varepsilon)$  a pour limite zéro quand  $\varepsilon$  tend vers zéro. Ce résultat a lui même un air de famille avec le résultat de Barlet utilisé dans la 1ère partie: si  $X$  est un espace analytique de dimension  $n+1$  et  $f$  un morphisme analytique ouvert de  $X$  dans le disque unité alors pour toute forme  $C^\infty$   $\varphi$  de type  $(n, n)$  et à support  $f$ -propre on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{f^{-1}(t)} \varphi = \int_{f^{-1}(0)} \varphi.$$

Remarquons enfin qu'en appliquant ce dernier résultat à la déformation sur le cône normal on peut également retrouver le théorème de Thie.

b) d'autre part l'ingrédient clef de l'assertion 3) est le théorème de Thie-Draper (King dit seulement des  $n_i$  qu'ils sont entiers, mais il suffit dans la démonstration de 3) d'appliquer le théorème de projection des multiplicités pour les obtenir comme multiplicités). Comme nous n'utilisons le théorème de King que dans le cas où  $X$  est une hypersurface de  $W$ , il suffit de connaître le théorème de Thie-Draper dans le cas des courbes, cas pour lequel nous donnons une démonstration directe dans la troisième partie puisque pour les courbes la multiplicité est égale à l'obstruction d'Euler locale.

Revenons à la démonstration. Si  $\eta = (\tilde{e} \circ \nu)^*((1/2\pi i) \partial \log \|z\|^2)$  on a d'après le théorème ci-dessus

$$\int_{\mathfrak{Y}} \alpha = \int_{E_0 N(X)} \eta \wedge d\alpha - \int_{E_0 N(X)} \bar{\partial} \eta \wedge \alpha,$$

mais comme l'orientation de  $(\nu \circ \tilde{e})^{-1}(S_\varepsilon)$  comme bord de  $(\nu \circ \tilde{e})^{-1}(X \setminus B_\varepsilon)$  est l'opposée de celle induite par l'orientation de  $X \cap S_\varepsilon$ , on a d'après le théorème de Stokes:

$$\int_{(\nu \circ \tilde{e})^{-1}(S_\varepsilon)} \eta \wedge \alpha = - \int_{(\nu \circ \tilde{e})^{-1}(X \setminus B_\varepsilon)} (d\eta \wedge \alpha - \eta \wedge d\alpha)$$



comme  $d\eta = \bar{\partial}\eta$  puisque  $\partial \circ \bar{\partial} = 0$  on obtient donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{(\nu \circ \tilde{e})^{-1}(S_\varepsilon)} \eta \wedge \alpha = (-1)^k Eu_0(X \cap D^k) \tag{*}$$

puisque

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{(\nu \circ \tilde{e})^{-1}(B_\varepsilon)} d\eta \wedge \alpha - \eta \wedge d\alpha = 0$$

vu que  $d\eta \wedge \alpha$  et  $\eta \wedge d\alpha$  sont intégrables et que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{vol}((\nu \circ \tilde{e})^{-1}(B_\varepsilon)) = 0$ . Pour  $\varepsilon > 0$  assez petit,  $S_\varepsilon$  est transverse à une stratification de Whitney de  $X$  et donc la restriction de  $\nu \circ \tilde{e}$  à  $(\nu \circ \tilde{e})^{-1}(X \cap S_\varepsilon)$  est un isomorphisme sur son image en dehors du complémentaire de fermés de codimension réelle au moins deux. On a donc pour  $\varepsilon > 0$  assez petit:

$$\begin{aligned} & (-1)^k \frac{1}{2\pi i} \int_{(X \cap S_\varepsilon)^0} \frac{\langle dz \cdot z \rangle}{\|z\|^2} \wedge c_{d-1-k}^w(\Theta) \wedge \omega^k \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(\nu \circ \tilde{e})^{-1}(S_\varepsilon)} (\nu \circ \tilde{e})^{-1} \frac{\langle dz \cdot z \rangle}{\|z\|^2} \wedge c_{d-1-k}^w(T|_{\xi'}) \wedge c_1(\xi)^k \end{aligned} \tag{**}$$

puisque:

- $T|_{\xi'}$  se projette par  $\nu \circ \tilde{e}$  en  $\Theta$  sur  $(X \cap S_\varepsilon)^0$
- les structures hermitiennes choisies sont compatibles aux images réciproques
- le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E_0N(X) & \xrightarrow{\pi_1} & \mathbb{P}^{N-1} \\ \nu \circ \tilde{e} \downarrow & \nearrow \pi_2 & \\ X \setminus \{0\} & & \end{array} \quad \text{est commutatif}$$

et l'on a  $-\pi_1^*(\Omega) = c_1^w(\xi)$  et  $\omega = \pi_2^*(\Omega)$  où  $\Omega$  est la forme de Kähler sur  $\mathbb{P}^{N-1}$ . En joignant (\*) à (\*\*) on obtient le résultat désiré.

### 3ème Partie

Dans cette partie nous montrons comment un calcul d'obstruction à la Bott-Chern dans une désingularisation dominant la modification de Nash permet d'obtenir très simplement une formule exacte pour l'obstruction d'Euler. Cette

formule explicite nous permet de comparer directement les formules de Langevin et de Varchenko et de retrouver la formule de Gonzalez–Verdier.

Rappelons la définition de l'obstruction d'Euler locale (cf [G], [M–P]):

- Si  $(A, B)$ ,  $B \subset A$  est une paire d'espaces topologiques,  $E$  un fibré vectoriel réel de rang  $r$  sur  $A$  et  $s$  une section de  $E$  au dessus de  $B$  qui ne s'annule pas, on définit une classe d'obstruction appartenant à  $H^r(A, B)$  de la manière suivante: si  $S$  est le fibré en  $S^{r-1}$  sphères associé à  $E$ ,  $s$  définit une application de  $B$  dans  $S$  et l'image réciproque  $s^*U$  de la classe de Thom  $U$  appartenant à  $H^{r-1}(S)$  est un élément de  $H^{r-1}(B)$  dont l'image par l'application bord appartient à  $H^r(A, B)$ : c'est par définition la classe d'obstruction associée à  $s$ .

- $(X, 0)$  est un espace analytique plongé dans  $(\mathbb{C}^N, 0)$  de dimension pure  $d$  réduit.  $N(X) \xrightarrow{\nu} X$  est la modification de Nash;  $E_0N(X) \xrightarrow{\tilde{e}} N(X)$  est l'éclatement dans  $N(X)$  de la transformée totale de l'idéal définissant  $0$  dans  $X$  par  $\nu$  et  $\tilde{X} \xrightarrow{\tilde{e}} E_0N(X)$  est une désingularisation de  $E_0N(X)$ .  $\mathfrak{Y}$  est la transformée totale de zéro par  $\nu \circ \tilde{e}$ .

Sur  $X$  on dispose de la restriction  $E$  du fibré tangent à  $\mathbb{C}^N$ , sur  $N(X)$  du fibré tangent de Nash  $T$  et sur  $E_0N(X)$  du fibré  $\xi$  normal à  $\mathfrak{Y}$ . Le plongement de  $X$  dans  $\mathbb{C}^N$  munit  $E, T, \xi$  et leurs diverses images réciproques de structures hermitiennes naturelles.

- la section radiale  $\rho$  de  $T$  est la projection orthogonale sur  $T$  de la section  $\nu^*\overline{OM}$  de  $\nu^*E$ . Les conditions de Whitney entraînent que pour  $\varepsilon > 0$  petit  $\rho$  ne s'annule pas sur  $\nu^{-1}(X \cap S_\varepsilon)$ . La construction précédente nous donne une classe d'obstruction appartenant à  $H^{2d}(\nu^{-1}(B_\varepsilon \cap X), \nu^{-1}(S_\varepsilon \cap X))$  et on peut définir  $Eu_0X$  comme l'évaluation de cette classe sur la classe fondamentale de  $[\nu^{-1}(B_\varepsilon \cap X), \nu^{-1}(S_\varepsilon \cap X)]$ .

*Remarque.* Vu la functorialité de la classe de Thom pour les images réciproques de fibrés et comme le degré d'une modification analytique est toujours égal à un, on peut remplacer dans la définition de  $Eu_0X$  la modification de Nash par n'importe quelle autre modification la dominant:

si  $\tilde{X} \xrightarrow{\varphi} N(X)$  est une modification de  $N(X)$ , pour  $\varepsilon > 0$  assez petit  $\varphi^*\rho$  est une section de  $\varphi^*T$  qui ne s'annule pas sur  $(\nu \circ \varphi)^{-1}(X \cap S_\varepsilon)$  et l'évaluation de sa classe d'obstruction sur  $[(\nu \circ \varphi)^{-1}(X \cap B_\varepsilon), (\nu \circ \varphi)^{-1}(X \cap S_\varepsilon)]$  coïncide avec  $Eu_0X$ .

D'après un lemme classique de Whitney ([G] Prop. 4.4.3.) la restriction de  $\xi$  à  $\mathfrak{Y}$  est un sous fibré de  $\tilde{e}^*(T)$ . Quitte à remplacer  $X$  par un représentant plus petit du même germe on peut supposer que sur  $E_0N(X)$  la projection orthogonale de  $\xi$  sur  $\tilde{e}^*T$  définit un sous fibré de rang un  $\xi'$  de  $\tilde{e}^*T$  qui coïncide avec  $\xi$  sur  $\mathfrak{Y}$ ,  $\xi'^\perp$  l'orthogonal de  $\xi'$  dans  $\tilde{e}^*T$  se projette sur la partie lisse de  $X$  en le fibré  $\Theta$  défini dans la deuxième partie. Remarquons enfin que  $\tilde{e}^*\rho$  est une section de  $\xi'$ .

LEMME 1. Soit  $\rho'$  la section de  $T$  au-dessus de  $N(X) \setminus \nu^{-1}(0)$  définie par  $\rho'(x) = \frac{\|\nu(x)\|}{\|\rho(x)\|} \rho(x)$  alors, pour  $\varepsilon > 0$  assez petit,  $\rho'$  est une section de  $T$  au-dessus de  $\nu^{-1}(X \cap S_\varepsilon)$  qui ne s'annule pas et l'évaluation de sa classe d'obstruction sur  $[\nu^{-1}(X \cap B_\varepsilon), \nu^{-1}(X \cap S_\varepsilon)]$  coïncide avec  $Eu_0(X)$ .

*Démonstration.* Comme

$$\lim_{\nu(x) \rightarrow 0} \frac{\|\nu(x)\|}{\|\rho(x)\|} = 1,$$

toujours d'après le même lemme de Whitney, pour  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit,  $\rho$  et  $\rho'$  sont homotopes parmi les sections de  $T$  sur  $\nu^{-1}(X \cap S_\varepsilon)$  qui ne s'annulent pas.

LEMME 2. Il existe une section  $s$  de  $(\tilde{e} \circ \mu)^*T$  sur  $\bar{X}_\varepsilon = (\nu \circ \tilde{e} \circ \mu)^{-1}(X \cap B_\varepsilon)$  qui coïncide avec  $(\tilde{e} \circ \mu)^*\rho'$  sur  $\partial\bar{X}_\varepsilon = (\nu \circ \tilde{e} \circ \mu)^{-1}(X \cap S_\varepsilon)$  et n'a que des zéros isolés à l'intérieur de  $\bar{X}_\varepsilon$ .

*Démonstration.* On peut prolonger  $(\tilde{e} \circ \mu)^*\rho'$  en une section  $\rho''$  de  $\mu^*\xi'$  sur  $\bar{X}_\varepsilon$  qui ne s'annule que sur  $\mu^{-1}(\mathcal{Y})$ : si  $\alpha$  est une fonction  $C^\infty$  qui vaut un au voisinage de  $\partial\bar{X}_\varepsilon$  et zéro au voisinage de  $\mu^{-1}(\mathcal{Y})$  il suffit de prendre  $\rho'' = \alpha(\tilde{e} \circ \mu)^*\rho' + (1-\alpha)\tilde{e}^*\rho$  car  $\tilde{e}^*\rho$  et  $\tilde{e}^*\rho'$  sont par définition de l'éclatement des sections de  $\xi'$ . D'autre part en utilisant le théorème de Sard et des partitions de l'unité on obtient une section  $\sigma$  du fibré  $\mu^*(\xi'^\perp)$  nulle au voisinage de  $\partial\bar{X}_\varepsilon$  et ne possédant que des zéros isolés à l'intérieur de  $X_\varepsilon$ . On peut alors poser  $s = \sigma + \rho''$ .

Rappelons maintenant un lemme classique de théorie de l'obstruction:

LEMME 3.  $\varepsilon$  étant choisi suffisamment petit pour que  $(\tilde{e} \circ \mu)^*\rho$  ne s'annule pas sur  $\partial\bar{X}_\varepsilon$ , l'évaluation de sa classe d'obstruction sur  $[\bar{X}_\varepsilon, \partial\bar{X}_\varepsilon]$  est égale à la somme des indices des zéros isolés de  $s$  dans  $\bar{X}_\varepsilon$ .

La conjonction des lemmes 1 et 3 et de la remarque nous permet d'identifier  $Eu_0X$  à la somme des indices des zéros isolés de  $s$  dans  $\bar{X}_\varepsilon$ .

LEMME 4. Pour  $\varepsilon > 0$  assez petit  $\partial\bar{X}_\varepsilon$  est lisse.

*Démonstration.* Si  $r$  est la fonction distance  $\sum_{i=1}^N z_i \bar{z}_i$  nous allons montrer qu'il existe un voisinage  $V$  de  $\mu^{-1}(\mathcal{Y})$  tel que  $\nu \circ \tilde{e} \circ \mu \circ r$  n'a pas de points critiques sur  $V \setminus \mu^{-1}(\mathcal{Y})$ .

Si  $\Sigma$  est le lieu critique de  $\nu \circ \tilde{e} \circ \mu \circ r$  d'après ([H], théorème p. 215) on peut munir  $\Sigma$  et son image  $Z$  par  $\nu \circ \tilde{e} \circ \mu$  de stratifications sous analytiques réelles  $(\Sigma_\alpha)_{\alpha \in A}$  et  $(Z_\alpha)_{\alpha \in A}$  telles que pour chaque  $\alpha$  de l'ensemble fini  $A$  la restriction de

$\nu \circ \tilde{e} \circ \mu$  à  $\Sigma_\alpha$  soit une submersion sur son image  $Z_\alpha$ . Il suffit alors de montrer qu'il n'y a pas de strate  $Z_\alpha$  passant par zéro de dimension réelle strictement positive. Pour cela il suffit de remarquer que si  $Z_\alpha$  est une telle strate la sphère  $S_\varepsilon$  est transverse à  $Z_\alpha$  pour  $\varepsilon$  assez petit, et donc qu'au voisinage de zéro  $dr$  ne s'annule identiquement sur aucun plan tangent à  $Z_\alpha$  et donc  $\nu \circ \tilde{e} \circ \mu|_{\Sigma_\alpha}$  étant une submersion, la restriction de  $(\nu \circ \tilde{e} \circ \mu)^* dr$  aux plans tangents à  $Z_\alpha$  ne s'annule identiquement sur aucun plan tangent à  $\Sigma_\alpha$  au voisinage de  $\mu^{-1}(\mathcal{Y})$  ce qui contredit la définition de  $\Sigma$ .

Nous pouvons maintenant appliquer la théorie de Bott et Chern, la Proposition 6.4. de l'article [B-C] nous permettant d'écrire pour  $\varepsilon > 0$  assez petit:

$$Eu_0X = \int_{\bar{X}_\varepsilon} c_d^w((\tilde{e} \circ \mu)^*T) + \int_{\partial\bar{X}_\varepsilon} \frac{i}{4\pi} (\bar{\partial} - \partial) \log \|s\|^2 \wedge c_{d-1}^w(\mu^*\xi'^\perp) + \int_{\partial\bar{X}_\varepsilon} \psi'$$

où:

- $c_d^w((\tilde{e} \circ \mu)^*T)$  et  $c_{d-1}^w(\mu^*\xi'^\perp)$  sont les formes de Chern-Weil associées aux fibrés hermitiens  $(\tilde{e} \circ \mu)^*T$  et  $\mu^*\xi'^\perp$

- $\psi' = \frac{i}{4\pi} (\bar{\partial} - \partial) \left( \sum_{\alpha > 0} \alpha^{-1} \det^\alpha ((\Omega(\mu^*\xi'^\perp), \Omega_{\mu^*\xi'^\perp}((\tilde{e} \circ \mu)^*T) - \Omega(\mu^*\xi'^\perp)) \right)$

où:

$$\frac{2\pi}{i} \Omega(\mu^*\xi'^\perp) \quad \text{et} \quad \frac{2\pi}{i} \Omega_{\mu^*\xi'^\perp}((\tilde{e} \circ \mu)^*T)$$

sont respectivement la courbure de  $\mu^*\xi'^\perp$  et celle de  $(\tilde{e} \circ \mu)^*T$  restreinte à  $\mu^*\xi'^\perp$  et  $\det(A + \lambda B) = \sum_{\alpha > 0} \lambda^\alpha \det^\alpha(A, B)$ .

On obtient donc pour  $\varepsilon > 0$  assez petit pour que  $S_\varepsilon$  soit transverse à une stratification de Whitney de  $X$  (cf. la 2ème partie), vu que  $\|s(x)\| = \|\nu \circ \tilde{e} \circ \mu(x)\|$ :

$$Eu_0X = \int_{(X \cap B_\varepsilon)^0} c_d^w(T) + \int_{(X \cap S_\varepsilon)^0} \frac{i}{4\pi} (\bar{\partial} - \partial) \log \|x\|^2 \wedge c_{d-1}^w(\Theta) + \int_{(X \cap S_\varepsilon)^0} \psi$$

avec  $\psi = 1/4\pi (\bar{\partial} - \partial) (\sum_{\alpha > 0} \alpha^{-1} \det^\alpha (\Omega(\Theta), \Omega_\Theta(T) - \Omega(\Theta)))$  où  $(2\pi/i)\Omega(\Theta)$  et  $(2\pi/i)\Omega_\Theta(T)$  sont respectivement la courbure de  $\Theta$  et celle de  $T$  restreinte à  $\Theta$ ,  $T$  étant le fibré tangent à la partie lisse de  $X$ , ce que l'on peut réécrire:

**THÉORÈME 3.** *On a l'égalité:*

$$Eu_0X = \int_{(X \cap B_\varepsilon)^0} c_d^w(T) + \frac{1}{2\pi i} \int_{(X \cap S_\varepsilon)^0} \frac{\langle dz, z \rangle}{\|z\|^2} \wedge c_{d-1}^w(\Theta) + \int_{(X \cap S_\varepsilon)^0} \psi$$

*Application 1.* Comme sur  $\bar{X}$  les formes différentielles  $\psi'$  et  $c_d^w((\tilde{e} \circ \mu)^*T)$  sont localement bornées on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial \bar{X}_\varepsilon} \psi' = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{X}_\varepsilon} c_d^w((\tilde{e} \circ \mu)^*T) = 0$$

car les volumes de  $\bar{X}_\varepsilon$  et de  $\partial \bar{X}_\varepsilon$  ont pour limite zéro quand  $\varepsilon$  tend vers zéro.

On retrouve donc directement la formule:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{(X \cap S_\varepsilon)^0} \frac{\langle dz \cdot z \rangle}{\|z\|^2} \wedge c_{d-1}^w(\Theta) = Eu_0 X. \tag{*}$$

et le théorème des résidus de King, nous permet en effectuant en sens inverse le cheminement de la deuxième partie d'obtenir directement la formule de Gonzalez-Verdier:

$$Eu_0 X = \deg \left( \sum_{i=0}^{d-1} (-1)^i (c_{d-1-i}(T) \cdot c_1(\xi)^i) \cap [\mathfrak{Y}] \right),$$

les notations étant celles de la deuxième partie.

*Application 2.* Nous allons montrer ici le lien entre la formule (\*) et la formule de Langevin (cf. [L]) lorsque  $X$  est une hypersurface à singularité isolée en zéro définie par l'équation  $f=0$  dans  $\mathbb{C}^{N+1}$ .

Dans ce cas on peut faire le calcul d'obstruction sur la fibre de Milnor. Plus précisément:

Soit  $\varepsilon > 0$  et  $t \neq 0$  avec  $0 < |t| \ll \varepsilon \ll 1$   $F_{t,\varepsilon} = B_\varepsilon \cap \{f=t\}$ , sur  $F_{t,\varepsilon}$  on dispose du fibré tangent  $T$  muni d'une section radiale  $\rho'(x) = \|x\|/\|\rho\| \rho$  au-dessus de  $F_{t,\varepsilon} \setminus \{\text{zéros de } \rho\}$ ,  $\rho$  étant la projection de  $\overrightarrow{OM}$  sur  $T$ . Pour  $\varepsilon$  petit et  $|t| \ll \varepsilon$ ,  $\partial F_{t,\varepsilon}$  et  $S_\varepsilon$  sont transverses donc  $\rho'$  ne s'annule pas sur  $\partial F_{t,\varepsilon}$ . Comme de plus  $\rho'$  pointe vers l'extérieur de  $\partial F_{t,\varepsilon}$  la théorie classique de Gauss-Bonnet nous dit que l'entier d'obstruction de  $\rho'$  est égal à  $\chi(F_{t,\varepsilon})$ . Comme  $\rho'$  est un champ de vecteurs sur  $F_{t,\varepsilon} \setminus \{\text{zéros de } \rho\}$  il existe sur  $F_{t,\varepsilon}$  un champ de vecteurs à zéros isolés qui coïncide avec  $\rho'$  sur un voisinage de  $\partial F_{t,\varepsilon}$ .

On peut donc à nouveau appliquer la théorie de Bott-Chern pour obtenir:

$$\chi(F_{t,\varepsilon}) = \int_{F_{t,\varepsilon}} c_N^w(T) + \int_{\partial F_{t,\varepsilon}} \psi_1 + \int_{\partial F_{t,\varepsilon}} \psi_2$$

avec

$$\psi_1 = \frac{i}{4\pi} (\bar{\partial} - \partial) \log \|x\|^2 \wedge c_{N-1}^w(\xi'^{\perp})$$

$$\psi_2 = \frac{i}{4\pi} (\bar{\partial} - \partial) \left( \sum_{\alpha > 0} \alpha^{-1} \det^{\alpha} (\Omega(\xi'^{\perp}), \Omega_{\xi'^{\perp}}(T) - \Omega(\xi'^{\perp})) \right)$$

$\xi'$  désignant le fibré engendré par  $\rho'$  sur  $\partial F_{t,\varepsilon}$  et  $\xi'^{\perp}$  son orthogonal dans  $T$ .

Soient  $\varepsilon > 0$  et  $t_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  choisis tels que si  $|t| \leq t_0$ ,  $\{f = t\}$  soit transverse à  $S_{\varepsilon}$ . Alors  $T_{t_0} = \bigcup_{0 \leq \lambda \leq 1} \partial F_{\lambda t_0, \varepsilon}$  est une variété lisse compacte dont le bord est réunion de  $X \cap S_{\varepsilon}$  et de  $\partial F_{t_0, \varepsilon}$ . Il est alors clair que le volume de  $T_{t_0}$  a pour limite zéro quand  $t_0$  tend vers zéro.

D'après le théorème de Stokes  $\psi_1$  et  $\psi_2$  étant bornées au voisinage de  $X \cap S_{\varepsilon}$  on a donc puisque

$$\lim_{|t_0| \rightarrow 0} \text{vol } T_{t_0} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\partial F_{t,\varepsilon}} \psi_1 + \psi_2 = \int_{X \cap S_{\varepsilon}} \psi_1 + \psi_2.$$

Comme d'après Milnor  $\chi(F_{t,\varepsilon}) = 1 + (-1)^N \mu^{(N+1)}(X)$  et que nous avons vu que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{X \cap S_{\varepsilon}} \psi_2 = 0$ , on obtient:

$$1 + (-1)^N \mu^{(N+1)}(X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{X \cap S_{\varepsilon}} \psi_1 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow 0} \int_{F_{t,\varepsilon}} c_N^w(T)$$

ce qui prouve que deux des trois résultats suivants permettent de retrouver le troisième:

1) La formule de Langevin

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow 0} \int_{F_{t,\varepsilon}} c_N^w(T) = (-1)^N (\mu^{(N+1)} + \mu^{(N)})$$

2) La formule

$$Eu_0(X) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{X \cap S_{\varepsilon}} \frac{\langle dz \cdot z \rangle}{\|z\|^2} \wedge c_{N-1}^w(\Theta)$$

3)  $Eu_0(X) = 1 + (-1)^{N-1} \mu^{(N)}$ .

## REFERENCES

- [B] D. BARLET, *Convexité de l'espace des cycles*, Bull. Soc. Math. France 106 (1978), 373–397.
- [B–C] R. BOTT et S. S. CHERN, *Hermitian vector bundles and the equidistribution of the zeroes of their holomorphic sections*, Acta Math, 114 (1965), 71–112.
- [Dr] R. N. DRAPER, *Intersection theory in analytic geometry*, Math. Annalen 180 (1969), 175–204.
- [Du] A. DUBSON, *Calcul des invariants numériques des singularités et applications*, SFB Theoretische Mathematik Universitat Bonn (1981).
- [G] G. GONZALEZ-SPRINBERG, *L'obstruction locale d'Euler et le théorème de MacPherson in séminaire de géométrie analytique de l'E.N.S.*, 1978–1979 Astérisque n° 82–83.
- [Gr] P. GRIFFITHS, *Complex differential and integral geometry and curvature integrals associated to singularities of complex analytic varieties*, Duke Math Journal vol. 45 n° 3 (1978), 427–512.
- [Gr–H] P. GRIFFITHS et J. HARRIS, *Principles of algebraic geometry*, Wiley-Interscience (1978).
- [H] H. HIRONAKA, *Stratification and Flatness in Real and complex singularities* Oslo 1976 Sijthoff and Noordhoff (1977).
- [H–M] J. P. HENRY et M. MERLE, *Limites d'espaces tangents et transversalité de variétés polaires*. Actes de la conférence sur les singularités de la Rabida. Springer Lecture Notes 961 (1982).
- [H–M–S] J. P. HENRY, M. MERLE et C. SABBAH, *Sur la Condition de Thom stricte pour un morphisme analytique complexe*. Prépublication de l'Ecole Polytechnique (Août 1982).
- [Ka] M. KATO, *Singularities and some global topological properties*, Proc. R.I.M.S. Singularities Symposium, Kyoto University (April 1978).
- [Ke] G. KENNEDY, *Griffiths' integral formula for the Milnor number*, Duke Math Journal vol. 48 n° 1 (1981), 159–165.
- [K] J. R. KING, *A residue formula for complex subvarieties*, Proc. Carolina Conf. on Holomorphic Mappings and minimal surfaces. (Chapel Hill N.C. 1970) Department of Mathematics, University of North Carolina, Chapel Hill N.C. (1970), 43–56.
- [K1] S. KLEIMAN, *On the transversality of a general translate*, Compositio Math. 28 (1974), 287–297.
- [L] R. LANGEVIN, *Courbure et singularités complexes*. Comm. Math. Helv. 54 (1976), 6–16.
- [L–Lê] R. LANGEVIN et D. T. LÊ, *Courbure au voisinage d'une singularité*. CRAS 290 (1980) 95–98.
- [Lê–T] D. T. LÊ et B. TEISSIER, *Variétés polaires locales et classes de Chern des variétés singulières*. Annals of Maths, 114 (1981), 457–491.
- [M–P] R. MACPHERSON, *Chern classes for singular algebraic varieties*. Annals of Math, 100 (1974) 423–432.
- [Pi] R. PIENE, *Cycles Polaires et classes de Chern*. Séminaire sur les singularités des surfaces 1977–78, Ecole Polytechnique, Palaiseau, France.
- [T1] B. TEISSIER, *Variétés polaires II*. Actes de la Conférence de la Rabida Springer Lecture Notes 961 (1982).
- [T2] B. TEISSIER, *Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney* in “Singularités à Cargèse” 1972. Astérisque n° 7–8 (1973).
- [Th] P. R. THIE, *The Lelong number of a point of a complex analytic set*, Math. Annalen 172 (1967), 269–312.
- [V] A. N. VARCHENKO, *The integrality of the limit of the curvature integral along the boundary of an isolated singularity of a surface in  $\mathbb{C}^3$* , Russian Math. Surveys 33: 6 (1978), 263–264.
- [Z–S] O. ZARISKI et P. SAMUEL, *Commutative Algebra Tome 2*, Van Nostrand, New-York (1960).

20, rue d'Annam  
F-75020 Paris

Reçu le 9 mai 1983