Zu einem hyperbolischen Gitterpunktproblem (Berichtigung, Zusatz).

Comment. Math. Helvetici 59 (1984) 313–318
0010–2571/84/020313–06$01.50 + 0.20/0

Zu einem hyperbolischen Gitterpunktproblem (Berichtigung, Zusatz)

PETER THURNHEER

Berichtigung

Alle im weiteren verwendeten Bezeichnungen und Numerierungen beziehen sich auf den Artikel mit obigem Titel in den Comment. Math. Helvetici 56 (1981), S. 240–271. Von Professor H.-J. Bartels wurde ich freundlicherweise darauf aufmerksam gemacht, dass mit der auf Seite 264 hergeleiteten Formel

$$\int_{\mathfrak{F}} |(d/ds)^m G^0(\Lambda, p, q, s)|^2 \, d\omega_q = \mathcal{O}(|t|^{-2+2\omega})$$

$$\text{gleichmässig in } \sigma \text{ mit } |\sigma \pm 1| \geq \kappa, \ (\kappa \text{ beliebig positiv}), \qquad (104)$$

welche für beliebiges $\omega, \omega > 1/(4m+10)$ gilt, die Beziehung (19) noch nicht bewiesen ist. Das hat zur Folge, dass Satz 6 ersetzt werden muss durch das Analogon zu einer von D. G. Kendall [20] im zweidimensionalen euklidischen Fall bewiesenen Aussage, nämlich durch

SATZ 6*. *Sei δ beliebig positiv und $y_1, y_2, \ldots$ eine monoton gegen ∞ wachsende Folge von Zahlen grösser als* 1, *wobei $\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\delta y_\nu/4}$ konvergiere. Für jedes $k \geqslant 0$ und fast alle $q \in \mathfrak{F}$ (bezüglich des durch die Metrik in H induzierten Masses) existiert dann ein positives $c(q)$, so dass gilt*

$$|R^k(\Lambda, p, q, y_\nu)| \leqslant c(q) e^{(1+\delta)y_\nu}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots.$$

Zusatz

Auch eine andere, von D. G. Kendall in [20] eingeführte Idee kann auf den hyperbolischen Fall übertragen werden. Dazu betrachtet man um jeden – mit seiner Vielfachheit gezählten – Gitterpunkt Tp, $T \in \Lambda$, eine hyperbolische Kugel $\mathfrak{K}_T$ von positivem Radius r. Ist V(r) das Volumen einer solchen Kugel, so gilt nach [10, Seite 409]: $V(r)=\pi\{\mathrm{Sinh}\,(2r)-2r\}$. Es wird vorausgesetzt, dass gilt

$$0<r<r_0:=\min_{T\in\Lambda-\Lambda_p}\rho(p,Tp). \tag{105}$$

Es bezeichne $M(\Lambda, p, q, x, r)$ das totale, in der hyperbolischen Kugel vom Radius x um q eingeschlossene Volumen der Kugeln $\mathfrak{K}_T$.

SATZ 7. *Es ist*

$$\frac{1}{V(r)}M(\Lambda,p,q,x,r)=\frac{\pi}{2\,|\mathfrak{F}|}e^{2x}+\pi\sum_{0<\lambda_n<1}\frac{K_n(p,q)}{\alpha_n(\alpha_n+1)}e^{(\alpha_n+1)x}b_n(r)$$
$$+2\pi K^*(p,q)e^x(x-1)b(r)+R_1(\Lambda,p,q,x,r),$$

mit

$$R_1(\Lambda,p,q,x,r)=\mathcal{O}(e^x)\ \textit{für jedes feste } r,\ 0<r<r_0$$

und

$$b_n(r)=\frac{a_n^0(r)}{V(r)}=\frac{2\pi}{\alpha_n V(r)}\left[\frac{\mathrm{Sinh}\,((1+\alpha_n)r)}{\alpha_n+1}-\frac{\mathrm{Sinh}\,((1-\alpha_n)r)}{\alpha_n-1}\right]=1+\mathcal{O}(r^2),$$
$$0<\lambda_n<1,$$

$$b(r)=\frac{4\pi}{V(r)}\{r\,\mathrm{Cosh}\,r-\mathrm{Sinh}\,r\}=1+\mathcal{O}(r^2),\ \text{gleichmässig in } r,$$
$$0\le r\le r_0-\varepsilon<r_0.$$

Beweis von Satz 6*. Für $s\notin P$ setzt man $(d/ds)^m G^0(\Lambda,p,q,s):=G^{(m)}(\Lambda,p,q,s)$, $m=0,1,\ldots$. Nach (74) gilt

$G^{(m)}(\Lambda,p,q,s)$ ist analytisch für $\sigma>1$ bis auf $(m+1)$-fache Pole bei $s_j=1+\alpha_j$ mit den Hauptteilen $v_j/(s-s_j)^{m+1}$, $v_j=(-1)^m\pi m!\ K_j(p,q)/\alpha_j(\alpha_j+1)$ für alle j mit $\lambda_j<1$. (106)

Im weiteren bezeichnen $c_4, c_5, \ldots$ positive Schranken und sei m eine feste natürliche Zahl, für die $1/(4m+10)<\delta/8$ ist, das heisst, m ist so gross, dass in (104) $\omega<\delta/8$ gewählt werden darf. Sei $U_\nu:=2e^{2y_\nu}$. Nach Voraussetzung konvergiert $\sum_{\nu=1}^{\infty}U_\nu^{-\delta/8}$. Mit den von D. G. Kendall in [20, §3] angewandten Ueberlegungen, das heisst mit dem Satz von Borel-Cantelli, folgert man aus (104), dass für $\nu=1,2,\ldots$, genügend kleines positives δ und für fast alle $q\in\mathfrak{F}$ gilt

$$\begin{gathered}|G^{(m)}(\Lambda,p,q,\sigma+iU_\nu)|\leq c_4(q),\ \text{gleichmässig in } \sigma \text{ mit } |\sigma\pm 1|\geq\kappa,\\ \left|\int_0^U G^{(m)}(\Lambda,p,q,\sigma+it)e^{ity_\nu}\,dt\right|\leq c_5(q)U_\nu^{\delta/4},\ \sigma\notin P,\ \text{gleichmässig in } 0\leq U\leq U_\nu.\end{gathered}\tag{107}$$

Zum Beweis der ersten Ungleichung unter (107) setzt man

$$\begin{aligned}&G_\nu(q):=|G^{(m)}(\Lambda,p,q,\sigma+iU_\nu)|^2, \qquad \kappa_\nu:=\int_{\mathfrak{F}} G_\nu(q)\,d\omega_q,\\ &V(\nu_0):=\{q\in\mathfrak{F}\mid G_\nu(q)\leq\kappa_\nu U_\nu^{\delta/8},\ \text{für alle } \nu\geq\nu_0\}, \qquad \nu_0>0,\\ &E(\nu):=\{q\in\mathfrak{F}\mid G_\nu(q)>\kappa_\nu U_\nu^{\delta/8}\}.\end{aligned}$$

Für eine Teilmenge M von $\mathfrak{F}$ sei M^* das Komplement von M bezüglich $\mathfrak{F}$ und $|M|$ bezeichne das hyperbolische Mass von M. Da gilt

$$\kappa_\nu>\int_{E(\nu)}\kappa_\nu U_\nu^{\delta/8}\,d\omega_q=|E(\nu)|\,\kappa_\nu U_\nu^{\delta/8},$$

ist

$$|E(\nu)|<U_\nu^{-\delta/8}.$$

Mit $V(\nu_0)=E^*(\nu_0)\cap E^*(\nu_0+1)\cap\cdots$, das heisst $V^*(\nu_0)=\bigcup_{j=\nu_0}^\infty E_j$, erhält man daraus

$$|V^*(\nu_0)|\leq\sum_{j=\nu_0}^\infty U_j^{-\delta/8}.$$

Da die Reihe auf der rechten Seite konvergiert, folgt

$$|V^*(\nu_0)|\to 0,\ \nu_0\to\infty.$$

Würde also für die Menge

$$V:=\{q\in\mathfrak{F}\mid G_\nu(q)\leq\kappa_\nu U_\nu^{\delta/8},\ \text{für alle genügend grossen } \nu\}$$

gelten $|V|=|\mathfrak{F}|-\varepsilon<|\mathfrak{F}|$, so ergäbe sich ein Widerspruch. Also ist für fast alle

$q \in \mathfrak{F}$ $G_\nu(q) \leq c_6(q)\kappa_\nu U_\nu^{\delta/8}$, was zusammen mit der Abschätzung (104) für κ_ν die erste Formel unter (107) beweist. Mit (104) hat man auch

$$\int_{\mathfrak{F}} \left| \int_0^U |G^{(m)}(\Lambda, p, q, \sigma + it)e^{ity_\nu}\, dt \right| d\omega_q \leq \int_{\mathfrak{F}} \int_0^{U_\nu} |G^{(m)}(\Lambda, p, q, \sigma + it)|\, dt\, d\omega_q$$
$$\leq c_7 U_\nu^{\delta/8},$$

gleichmässig in $0 \leq U \leq U_\nu$.

Analog wie die erste, lässt sich damit auch die zweite Beziehung unter (107) herleiten. Man kann sich überlegen, dass mit dem Hilfssatz (Seite 256) auch das folgende Lemma gilt

LEMMA. *Seien die Funktionen* $A(x), f(s)$ *und* $R(x)$ – *und damit die Zahlen* β_1, γ – *definiert wie im Hilfssatz. Dasselbe gelte für die Funktion* w *und die Zahl* ξ *und sei* $w(y + e^{-\xi y}) = O(w(y))$. *Sei* $y_1, y_2, \ldots$ *eine monoton gegen* ∞ *wachsende Folge positiver Zahlen, und für* $\nu = 1, 2, \ldots$ *gelte mit* $U_\nu := 2e^{2\xi y_\nu}$:

(a) $|f(\sigma + iU_\nu)| \leq c_8$, *gleichmässig in* $\sigma \in [\gamma, \beta_1 + 1]$,

(b) $\left| \int_0^U f(\sigma + it)e^{ity_\nu}\, dt \right| \leq c_9 w(y_\nu)$, *gleichmässig in* $0 \leq U \leq U_\nu$.

Dann ist

$$|R(y_\nu)| \leq c_{10} e^{\gamma y_\nu} w(y_\nu), \qquad \nu = 1, 2, \ldots.$$

Zur Herleitung des Lemmas genügt es, die im Beweis des Hilfssatzes auftretenden Grössen x und y durch y_ν zu ersetzen.

Mit den beiden Formeln (107) sind die Voraussetzungen des Lemmas erfüllt für die Wahl $A(x) := x^m N^0(\Lambda, p, q, x)$; $f(s) := G^{(m)}(\Lambda, p, q, s)$; $\sigma_0 = \beta_1 = 2$; $1 < \gamma < 1 + \delta/2$, $\gamma \notin P$; $\xi = 1$; $a_j = m$, $s_j = 1 + \alpha_j$, für alle j mit $\lambda_j < 1$; $w(y) = e^{\delta y/2}$.

Beachtet man (106) und die Definition (6) von $Q^0(\Lambda, p, q, x)$, so ergibt sich Satz 6* für $k = 0$ aus dem Lemma. Satz 2 zeigt, dass (104) richtig bleibt, wenn man $G^0(\Lambda, p, q, s)$ ersetz durch $G^k(\Lambda, p, q, s)$ für beliebiges $k > 0$, so dass sich Satz 6* für jedes $k > 0$ in anaolger Art beweisen lässt.

Beweis von Satz 7. Für irgend eine Menge $M \subset H$, bezeichne $\bar{M}$ den Abschluss von M. Sei $\mathfrak{F}_p$ ein Fundamentalbereich von Λ_p und $\mathfrak{G} := \{z \in H \mid \rho(p, z) < \rho(Tp, z)$ für alle $T \in \Lambda - \Lambda_p\}$. Dann gilt:

Sind $v \in \mathfrak{G}$, $w \in \mathfrak{G}$ und $v = Tw$, $T \in \Lambda$, so ist $T \in \Lambda_p$. (108)

Zu $v \in H$ existiert ein $w \in \bar{\mathfrak{G}}$ und ein $T \in \Lambda$ mit $v = Tw$. (109)

$$\bigcup_{T \in \Lambda_p} T(\mathfrak{F}_p \cap \mathfrak{G}) = \mathfrak{G}. \tag{110}$$

Zum Beweis von (108) nimmt man an, es sei $Tp \neq p$, was auf einen Widerspruch führt, da man dann hat $\rho(p, v) = \rho(p, Tw) > \rho(p, w) = \rho(p, T^{-1}v) = \rho(Tp, v) > \rho(p, v)$.

Nun beweist man (109). Sei $T \in \Lambda$ eine Abbildung, für die gilt $\rho(Tp, v) \leq \rho(Up, v)$ für alle $U \in \Lambda$. Dann ist $w := T^{-1}v \in \bar{\mathfrak{G}}$, denn es gilt $\rho(p, T^{-1}v) = \rho(Tp, v) \leq \rho(Up, v) = \rho(T^{-1}Up, T^{-1}v)$, also $\rho(p, T^{-1}v) \leq \rho(Sp, T^{-1}v)$ für alle $S \in \Lambda$.

Aus der Definition von $\mathfrak{G}$ sieht man, dass $T(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}$ ist für alle $T \in \Lambda_p$, woraus (110) folgt.

Die Aussagen (108) bis (110) implizieren, dass $\mathfrak{F}_p \cap \mathfrak{G}$ ein Fundamentalbereich von Λ ist. Also kann man

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_p \cap \mathfrak{G} \tag{111}$$

wählen. Sei $\mathfrak{K} := \{v \in H \mid \rho(p, v) \leq r\}$. Für $x > 0$, $v \in H$, $q \in H$ setzt man

$$\chi(v, q, x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \rho(v, q) \leq x. \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $\chi(v, q, x) = \chi(q, v, x)$; $\chi(Tv, q, x) = \chi(v, T^{-1}q, x)$, $T \in \Lambda$, sowie

$$N^0(\Lambda, p, q, x) = \sum_{T \in \Lambda} \chi(Tp, q, x) \quad \text{und} \quad M(\Lambda, p, q, x, r) = \sum_{T \in \Lambda} \int_{\mathfrak{K}} \chi(Tv, q, x)\, d\omega_v.$$

Damit wird

$$M(\Lambda, p, q, x, r) = \int_{\mathfrak{K}} N^0(\Lambda, v, q, x)\, d\omega_v.$$

Beachtet man die Voraussetzung (105) und die Definition von $\mathfrak{G}$, sieht man, dass gilt

$$N^0(\Lambda, v, p, r) = \begin{cases} \operatorname{Ord} \Lambda_p, & v \in \mathfrak{K}. \\ 0, & v \in \mathfrak{G} - \mathfrak{K}. \end{cases}$$

Wählt man also $\mathfrak{F}$ wie in (111), so ergibt sich mit (110) auf Grund der Invarianz von $d\omega$ sowie der Automorphie von $N^0(\Lambda, v, q, z)$ bezüglich Λ:

$$M(\Lambda, p, q, x, r) = \operatorname{Ord} \Lambda_p \int_{\mathfrak{F}} N^0(\Lambda, v, q, x) \frac{N^0(\Lambda, v, p, r)}{\operatorname{Ord} \Lambda_p} \, d\omega_v.$$

Also ist mit (29)

$$\int_0^r \int_0^x (r - r_1)(x - x_1) M(\Lambda, p, q, x_1, r_1) \, dx_1 \, dr_1$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{F}} N^2(\Lambda, v, q, x) N^2(\Lambda, v, p, r) \, d\omega_v = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2(x) a_n^2(r) K_n(p, q).$$

Die zweite Gleichung folgt aus Satz 1 und der Orthogonalitätsrelation (1). Unter Beachtung von (40) erhält man daraus

$$M(\Lambda, p, q, x, r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^0(x) a_n^0(r) K_n(p, q), \tag{112}$$

denn die Reihe auf der rechten Seite dieser Gleichung ist absolut konvergent. Dies ersieht man aus (38) zusammen mit der aus (9) folgenden Abschätzung

$$a_n^0(y) = \mathcal{O}(1/|\alpha_n|^2), \text{ gleichmässig in } n \text{ mit } \lambda_n > 1.$$

Nach (9) können die Terme $a_n^0(y)$ sogar explizit berechnet werden, wobei sich durch Einsetzten in (112) Satz 7 ergibt.

LITERATURANGABE

[20] D. G. KENDALL. *On the number of lattice points inside a random oval.* Quart. J. Math. Oxford Ser. *19* (1948), 1–26.

Fondation Suisse
7K. Bd. Jourdan
F-75690 Paris Cedex 14

Erhalten 10 November 1983