Caractéristiques d'euler et groupes fondamentaux des variétés de dimension 4.

Autor(en): **Hausmann, J.-C. / Weinberger, Shmuel**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **60 (1985)**

PDF erstellt am: **16.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-46305

Comment. Math. Helvetici 60 (1985) 139–144 0010-2571/85/010139-06$01.50 + 0.20/0

Caractéristiques d'Euler et groupes fondamentaux des variétés de dimension 4

JEAN-CLAUDE HAUSMANN et SHMUEL WEINBERGER[(1)]

Dans cet article, on établit des relations entre la caractéristique d'Euler d'une variété close orientable de dimension 4 et l'homologie de certains sous-groupes de son groupe fondamental. Ceci nous permet de produire les premiers examples de groupes qui sont des groupes fondamentaux de sphères d'homologie en dimension ≥ 5 mais pas 4. On obtient aussi de nouveaux exemples de groupes de noeuds multidimensionnels qui n'apparaissent pas comme groupe de noeuds en dimension 4.

1. Resultats generaux

Soit X un CW-complexe. Pour F un corps, on définit $b_i^F(X) = \dim_F H_i(X; F)$. Si G est un groupe, on note $b_i^F(G) = \dim_F H_i(K(G, 1); F)$. Considérons une présentation finie $\mathcal{P}$ d'un groupe G, avec g générateurs et r relateurs. La *déficience* $d(\mathcal{P})$ de $\mathcal{P}$ est définie par $d(\mathcal{P}) = g - r$. On sait que $d(\mathcal{P}) \leq b_1^F(G) - b_2^F(G)$ (voir [1]). La *déficience* d_G de G est le maximum des $d(\mathcal{P})$ pour toutes les présentations finies $\mathcal{P}$ de G.

Soit G un groupe de présentation finie. On définit

$$q(G) = \inf\{\chi(M) \mid M \text{ variété close orientable lisse de dimension 4 et } \pi_1(M) = G\}$$

où $\chi(M)$ est la caractéristique d'Euler de M. A priori, on a $q(G) \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$. En fait, on a:

THÉORÈME 1. *Pour tout groupe G de présentation finie et tout corps F, on a:*

$$2 + b_2^F(G) - 2b_1^F(G) \leq q(G) \leq 2(1 - d_G)$$

[1] Le second auteur est au bénéfice d'une "NSF Postdoctoral Fellowship".

EXEMPLE. Pour $G=1$, on obtient $2\leqslant q(1)\leqslant 2$; les deux inégalités étant des égalités, ceci prouve que l'énoncé du Théorème 1 ne peut pas être amélioré en général.

Démonstration. Sout M une variété close orientable de dimension 4 avec $\pi_1(M)=G$. Par dualité de Poincaré, on a $b_0^F(M)=b_4^F(M)=1$ et $b_1^F(M)=b_3^F(M)$. D'autre part, on a $b_1^F(M)=b_1^F(G)$ et $b_2^F(M)\geqslant b_2^F(G)$. Ce dernier fait provient de ce que, pour tout complexe X, on a $K(\pi_1(X),1)=X\cup\{\text{cellules de dim} \geqslant 3\}$, d'où $H_2(X;F)\to H_2(K(\pi_1(X);F)$ est surjective. On a donc:

$$\chi(M)=2+b_2^F(M)-2b_2^F(M)\geqslant 2+b_2^F(G)-2b_1^F(G)$$

ce qui montre la première inégalité. Pour l'autre inégalité, soit $\langle a_1,\dots,a_g \mid m_1,\dots,m_r\rangle$ une présentation de G avec $g-r=d_G$. Soit W_1 la variété de dimension 4 orientable obtenue par attachement de g anses d'indice 1 à la boule B^4. Les mots m_i représentent des éléments de $\pi_1(\partial W_1)=\pi_1(W_1)$ sur lesquels on peut attacher des anses d'indice 2. La variété W^4 ainsi obtenue satisfait $\pi_1(W)=G$ et $\pi_1(\partial W)\to\pi_1(W)$ est surjectif. Soit M le double de W (i.e. le recollement de deux copies de W le long de leur bord). La variété M est équipée d'une décomposition en anses avec: une anse d'indice 0, g anses d'indice 1, $2r$ anses d'indice 2, g anses d'indice 3 et une anse d'indice 4. D'où $\chi(M)=2(1-d_G)$. On vérifie que $\pi_1(M)=G$ par le théorème de Van-Kampen.

Le fait que $\chi(\tilde{M})=k\cdot\chi(M)$ pour $\tilde{M}\to M$ un revêtement à k feuillets donne immédiatement le corollaire suivant:

COROLLAIRE 2. *Soit G un groupe de présentation finie et soit T un sous-groupe d'indice k dans G. Alors, pour tout corps F, on a:*

$$2+b_2^F(T)-2b_1^F(T)\leqslant k\cdot q(G)$$

Remarquons que cette condition est spécialement forte lorsque $q(G)\leqslant 0$.

EXEMPLES. Le groupe $\mathbb{Z}^m$ contient des sous-groupes isomorphes à lui-même d'indice arbitrairement grand. D'où $q(\mathbb{Z}^m)\geqslant 0$ par le Corollaire 2. Le Théorème 1 donne que $-1\leqslant q(\mathbb{Z}^2)\leqslant 0$. D'où $q(\mathbb{Z}^2)=0$. De même, $q(\mathbb{Z}^4)=0$, puisque la caractéristique d'Euler du tore de dimension 4 est 0. En revanche, un argument de M. Kreck permet de montrer que $q(\mathbb{Z}^3)=2$.

Dans le même esprit que le Corollaire 2, on a:

PROPOSITION 3. *Soit G un groupe de présentation finie et P un sous-groupe* *parfait d'indice k dans G. Alors, pour tout groupe abélien A, il existe un homomorphisme surjectif* $A^{kq(G)-2} \twoheadrightarrow H_2(K(P,1);A)$.

Démonstration. Soit M une variété close orientable de dimension 4 avec $\pi_1(M)=G$ et $\chi(M)=q(G)$. Soit $\tilde{M}\to M$ le revêtement avec $\pi_1(\tilde{M})=P$. Comme P est parfait, on a $H_1(\tilde{M};\mathbb{Z})=H^1(\tilde{M};\mathbb{Z})\cong H_3(\tilde{M};\mathbb{Z})=0$ et $H_2(\tilde{M};\mathbb{Z})\cong H^2(\tilde{M};\mathbb{Z})$ est abélien libre. On obtient $\chi(\tilde{M})=k\cdot q(G)=2+\operatorname{rang}(H_2(\tilde{M};\mathbb{Z}))$, d'où $H_2(\tilde{M};A)=A^{kq(G)-2}$. La proposition découle alors de l'épimorphisme $H_2(\tilde{M};A)\twoheadrightarrow H_2(K(P,1);A)$ rappelé dans la démonstration du Théorème 1.

Remarque. Dans les trois résultats ci-dessus, il n'est pas nécessaire que M soit une variété. Seule la dualité de Poincaré à coefficients constants est utilisée dans la démonstration du Théoréme 1, et la dualité de Poincaré à coefficients locaux pour le Corollaire 2 et la Proposition 3. On peut donc définir $q^P(G)$ (on remplace "variété close" par "complexe de Poincaré"). Nous ignorons si $q^P(G)=q(G)$ en général. De même, il serait intéressant de savoir si l'on obtient le même $q(G)$ pour des variétés différentiables où topologiques.

2. Application aux groupes de noeuds

Un groupe G est un groupe de noeud en dimension n s'il existe un plongement différentiable $f:S^{n-1}\hookrightarrow \Sigma^n$ (S^{n-2} étant la sphère standard et Σ une sphère d'homotopie), tel que $\pi_1(\Sigma-f(S^{n-2}))=G$.

LEMME 4. *Soit g un groupe de noeud en dimension* 4. *Alors* $q(G)=0$.

Démonstration. Il est bien connu que $H_1(G;Z)\cong\mathbb{Z}$ et $H_2(G;\mathbb{Z})=0$ (voir [4]). D'où $q(G)\geq 0$ par le Théoréme 1. D'autre part, si $f:S^2\to\Sigma^4$ est un noeud avec $\pi_1(\Sigma-f(S^2))=G$, une chirurgie sur $f(S^2)$ produit une variété close orientable M^4 avec $\pi_1(M)=G$ et $H_2(M;\mathbb{Z})=0$. D'oú $q(G)\leq\chi(M)=0$.

THÉORÈME 5. *Soit* $1\to T\to G\to\mathbb{Z}\to 1$ *une suite exacte de groupes, avec T fini. Supposons que* $q(G)=0$. *Alors, tout sous-groupe abélien de T est cyclique.*

Démonstration. Le groupe G est un produit semi-direct $G=T\rtimes\mathbb{Z}$. Comme le groupe des automorphismes de T est fini, il existe un sous-groupe G_1 d'indice fini dans G isomorphe à $T\times\mathbb{Z}$.

Soit A un groupe abélien non-cyclique de T. Alors A contient un sous-groupe de la forme $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$, pour p premier, et G_1 contient un sous-groupe d'indice fini G_2 isomorphe à $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}$. Pour $F = F_p$, on a $b_1^F(G_2) = 3$ et $b_2^F(G_2) = 5$. Ceci contredit le Corollaire 2, puisque $q(G) = 0$.

Les deux résultats précèdents permettent de produire des exemples de groupes de noeuds en dimension $\geqslant 5$ qui ne sont pas des groupes de noeuds en dimension 4. Voici deux exemples:

1) Soit $\Delta = \langle a, b \mid a^5 = b^3 = (ab)^2 \rangle$ le groupe de l'icosaèdre (120 éléments). Le groupe $G = \Delta^m \times \mathbb{Z}$ est un groupe de noeud en toute dimension $\geqslant 5$. En effet, on a $H_1(G) \equiv \mathbb{Z}$, $H_2(G) = 0$, G est de présentation finie et est "tué" par la relation $t = a_1 a_2 \cdots a_m$ (où t est un générateur de $\mathbb{Z}$ et a_i dénote le générateur a de la i^e copie de Δ). Cela implique que G est un groupe de noeud en toute dimension $\geqslant 5$ par le Théorème I.1 de [4]. Par le Lemme 4 et le Théorème 5 ci-dessus, G n'est pas un groupe de noeud en dimension 4 si $m \geqslant 2$. En revanche, $\Delta \times \mathbb{Z}$ est le groupe du noeud obtenu par un "5-twist-spining" sur le noeud de trèfle (voir [9]).

2) Le groupe $SL_m(F) \times \mathbb{Z}$, où $m \geqslant 5$ et F est un corps fini, apparait comme groupe de noeud en toute dimension $\geqslant 5$ (voir l'exemple 4 de [3]). D'après les résultats de ce paragraphe, il n'est pas un groupe de noeud en dimension 4. En effet, $SL_m(F)$ contient des sous-groupe isomorphes à $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, par exemple celui engendré par les matrices diagonales de coefficients diagonaux $(-1, -1, 1, \ldots, 1)$ et $(1, \ldots, 1, -1, -1)$.

Remarque. Des exemples de groupes de noeuds en toute dimension $\geqslant 5$ qui ne sont pas des groupes de noeud en dimension 4 figurent à plusieurs endroits dans la littérature (voir [7] pour des exemples et des références). A notre connaissance, les auteurs ont toujours utilisé des conditions nécessaires que doit satisfaire la torsion de $H_1([G, G])$ pour un groupe de 4-noeud G. Les exemples donnés ci-dessus ayant tous $H_1([G, G]) = 0$, ils n'étaient pas traitables par ces techniques.

3. Application aux groupes de spheres d'homologie

Une sphère d'homologie est une variété close ayant l'homologie entière d'une sphère. Dans [5], Kervaire montre qu'un groupe G est le groupe fondamental d'une sphère d'homologie de dimension n pour tout $n \geqslant 5$ si et seulement si G est de présentation finie et $H_1(G; \mathbb{Z}) = H_2(G; \mathbb{Z}) = 0$ (G est dit "super-parfait"). Le groupe fondamental d'une sphère d'homologie de dimension 4 satisfait également à ces conditions mais, contrairement au cas des groupes de noeud, le statut de la réciproque n'est pas connu. La proposition suivante éclaire ce point:

PROPOSITION 6. *Il existe des groupes super-parfait de présentation finie qui ne sont pas des groupes fondamentaux de sphères d'homologie de dimension* 4.

Démonstration. Nous allons donner deux familles d'exemples: l'une formée de groupes finis et l'autre de groupes sans torsion.

1) Soit $F=F_p$ (p premier). Considérons le groupe fini $P=SL_m(F)$, $m\geq 5$. Il est classique que P est super-parfait (voir [3], Exemple 4). Soit $R=(F_p)^m$. Considérons une extension $1\to R^k\to G_0\to P\to 1$, où P agit par sa représentation naturelle sur chaque facteur R de R^k. Les discussions du §3 de [2] montrent que $H_0(P;R)=0=H_0(P;R\wedge R)$. D'où $H_0(P;R^k)=\bigoplus_k H_0(P;R)=0$ et $H_0(P;H_2(R^k;\mathbb{Z}))=H_0(P;R^k\wedge R^k)=\bigoplus_{k^2} H_0(P;R\wedge R)=0$. La suite spectrale de Hochschild-Serre de notre extension donne alors que G_0 est parfait et que $H_2(G_0;\mathbb{Z})$ est un quotient de $H_1(P;R^k)=\bigoplus_k H_1(P;R)$. Comme G_0 est parfait, on a $H_2(G_0;F)=H_2(G_0;\mathbb{Z})\otimes F$ d'où l'on déduit que $b_2^F(G_0)$ est une fonction linéaire de k.

Soit $0\to H_2(G_0;\ )\to G\to G_0\to 1$ l'extension centrale universelle de G_0 (voir [6]), produisant un groupe fini G superparfait. Le noyau A de l'épimorphisme $G\twoheadrightarrow P$ est une extension centrale $0\to H_2(G_0;\mathbb{Z})\to A\to R^k\to 1$. La suite spectrale de cette extension donne la suite exacte:

$$H_2(A;F)\to H_2(R^k;F)\to H_2(G_0;F)\to H_1(A;F)\to H_1(R^k;F)\to 0$$

(on utilise que $H_0(R^k;H_1(H_2(G_0;\mathbb{Z});F)))\cong H_2(G_0;\mathbb{Z})\otimes F$, puisque l'extension est centrale et que $H_2(G_0;\mathbb{Z})\otimes F\cong H_2(G_0;F)$ puisque G_0 est parfait). On déduit de cette suite exacte que $b_1^F(A)\leq b_2^F(G_0)+b_1^F(R^k)$ qui est un polynôme de degré 1 en k et que $b_2^F(A)\geq b_2^F(R^k)-b_2^F(G_0)$ qui est un polynôme du deuxième degré en k.

Nous pouvons ainsi montrer que le groupe fini super-parfait G n'est pas le groups fondamental s'une sphère d'homologie de dimension 4 lorsque k est assez grand. En effet. on aurait alors $q(G)=2$. Comme A est d'indice $|P|$ dans G, on aurait l'inégalité du Corollaire 2:

$$2+b_2^F(A)-2b_1^F(A)\leq 2\,|P|$$

ce qui devient impossible lorsque k est assez grand.

2) Pour construire des exemples sans torsion, on procède comme suit: soit G un groupe comme construit dans 1) avec k assez grand pour avoir la condition $2+b_2^F(A)-2b_1^F(A)>2\,|P|$. Soit K un 3-complexe fini acyclique avec $\pi_1(K)=G$ (par exemple le 3-squelette d'une sphère d'homologie M^7 avec $\pi_1(M^7)=G$ construite comme dans la démonstration du Théorème 1 de [5]). Par le procédé de Baumslag–Dyer–Heller–Maunder (voir [8]), on construit un groupe Q tel que:

a) $K(Q,1)$ est un complexe fini de dimension 3

b) il existe une application $K(Q,1)\to K$ qui induit un épimorphisme $Q\twoheadrightarrow G$ et un isomorphisme sur l'homologie à coefficient locaux.

On en déduit que Q est super-parfait de présentation finie. Le noyau T de l'épimorphisme $Q \twoheadrightarrow G \twoheadrightarrow P$ est un sous-groupe d'indice $|P|$ dans Q. Par b), on a:

$$H_*(T; F) \cong H_*(Q; F[P]) \cong H_*(G; F[P]) \cong H_*(A; F)$$

d'où, pour $F = F_p$, la même contradiction que dans le cas 1).

Remarque. Rappelons qu'un groupe H est dit "efficient" s'il existe un corps F tel qui $d_H = B_1^F(H) - b_2^F(H)$ (voir [1]; on a toujours l'inégalité $d_H \leqslant b_1^F(H) - b_2^F(H)$). Les groupes G et Q ci-dessus ne sont pas efficients, sinon $d_G = d_Q = 0$ et $q(G) = q(Q) = 2$, ce que nous avons montré ne pas être le cas. Nous avons donc construit un groupe Q tel que $K(Q, 1)$ est un complexe fini de dimension 3 et qui n'est pas efficient. Ceci contraste avec le fait qu'un groupe H ayant pour $K(H, 1)$ un complexe fini de dimension 2 est efficient: ce $K(H, 1)$ donne une présentation $\mathcal{P}$ de H telle que $d(\mathcal{P}) = b_1^F(H) - b_2^F(H)$ pour tout corps F.

PROBLÈME. Existe-t'il un groupe fondamental de sphère d'homologie de dimension 4 fini autre que le groupe Δ de l'icosaèdre (voir §2)?

BIBLIOGRAPHIE

[1] EPSTEIN, D. *Finite presentations of groups and 3-manifolds.* Quaterly Jal. of Math. *12* (1961) p. 205–212.
[2] HAUSMANN, J.-Cl. et KERVAIRE, M. *Sous-groupes dérivés des groupes de noeuds.* L'Enseignement Math. XXIV (1978) p. 111–123.
[3] HAUSMANN, J.-Cl. et KERVAIRE, M. *Sur le centre des groupes de noeuds multidimensionnels.* C.R. Ac. Sc Paris, t. *287* (1978) p. 699–702.
[4] KERVAIRE, M. *Les noeuds de dimensions supérieures.* Bull. Soc. Math. de France *93* (1965) p. 225–271.
[5] KERVAIRE, M. *Smooth homology spheres and their fundamental groups.* Trans. Amer. Math. Soc. *144* (1969) p. 67–72.
[6] KERVAIRE, M. *Multiplicateurs de Schur et K-théorie.* Essays on Topology and related topics, Mémoires dédiés à G. de Rham, Springer-Verlag 1970, p. 212–225.
[7] LEVINE, J. *Some results on higher dimensional knot groups.* Knot Theory, Les Plans-sur-Bex 1977, Springer Lect. Notes. 685 p. 243–269.
[8] MAUNDER, C. R. F. *A short proof of a theorem of Kan-Thurston.* Bull. London Math. Soc. *13* (1981) p. 325–327.
[9] ZEEMANN, E. C. *Twisting spun knot.* Trans. Amer. Math. Soc. *115* (1965) p. 471–495.

Section de Mathématiques
Université de Genève
BP 240
1211 Genève 24 Suisse

Department of Mathematics
Princeton University
Princeton NJ 08540 USA