Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 60 (1985)

Artikel: Caractéristiques d'euler et groupes fondamentaux des variétés de dimension 4.

Autor: Hausmann, J.-C. / Weinberger, Shmuel

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-46305

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helvetici 60 (1985) 139–144 0010–2571/85/010139–06$01.50 + 0.20/0
© 1985 Birkhäuser Verlag, Basel

Caractéristiques d'Euler et groupes fondamentaux des variétés de dimension 4

JEAN-CLAUDE HAUSMANN et SHMUEL WEINBERGER[1]

Dans cet article, on établit des relations entre la caractéristique d'Euler d'une variété close orientable de dimension 4 et l'homologie de certains sous-groupes de son groupe fondamental. Ceci nous permet de produire les premiers examples de groupes qui sont des groupes fondamentaux de sphères d'homologie en dimension $\geqslant 5$ mais pas 4. On obtient aussi de nouveaux exemples de groupes de noeuds multidimensionnels qui n'apparaissent pas comme groupe de noeuds en dimension 4.

1. Resultats generaux

Soit X un CW-complexe. Pour F un corps, on définit $b_i^F(X) = \dim_F H_i(X; F)$. Si G est un groupe, on note $b_i^F(G) = \dim_F H_i(K(G, 1); F)$. Considérons une présentation finie $\mathcal{P}$ d'un groupe G, avec g générateurs et r relateurs. La *déficience* $d(\mathcal{P})$ de $\mathcal{P}$ est définie par $d(\mathcal{P}) = g - r$. On sait que $d(\mathcal{P}) \leqslant b_1^F(G) - b_2^F(G)$ (voir [1]). La *déficience* d_G de G est le maximum des $d(\mathcal{P})$ pour toutes les présentations finies $\mathcal{P}$ de G.

Soit G un groupe de présentation finie. On définit

$$q(G) = \inf\{\chi(M) \mid M \text{ variété close orientable lisse de dimension 4 et } \pi_1(M) = G\}$$

où $\chi(M)$ est la caractéristique d'Euler de M. A priori, on a $q(G) \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$. En fait, on a:

THÉORÈME 1. *Pour tout groupe G de présentation finie et tout corps F, on a:*

$$2 + b_2^F(G) - 2b_1^F(G) \leqslant q(G) \leqslant 2(1 - d_G)$$

[1] Le second auteur est au bénéfice d'une "NSF Postdoctoral Fellowship".

EXEMPLE. Pour $G=1$, on obtient $2 \leqslant q(1) \leqslant 2$; les deux inégalités étant des égalités, ceci prouve que l'énoncé du Théorème 1 ne peut pas être amélioré en général.

Démonstration. Sout M une variété close orientable de dimension 4 avec $\pi_1(M)=G$. Par dualité de Poincaré, on a $b_0^F(M)=b_4^F(M)=1$ et $b_1^F(M)=b_3^F(M)$. D'autre part, on a $b_1^F(M)=b_1^F(G)$ et $b_2^F(M) \geqslant b_2^F(G)$. Ce dernier fait provient de ce que, pour tout complexe X, on a $K(\pi_1(X),1)=X \cup \{\text{cellules de dim } \geqslant 3\}$, d'où $H_2(X;F) \to H_2(K(\pi_1(X);F)$ est surjective. On a donc:

$$\chi(M)=2+b_2^F(M)-2b_2^F(M) \geqslant 2+b_2^F(G)-2b_1^F(G)$$

ce qui montre la première inégalité. Pour l'autre inégalité, soit $\langle a_1, \ldots, a_g \mid m_1, \ldots, m_r \rangle$ une présentation de G avec $g-r=d_G$. Soit W_1 la variété de dimension 4 orientable obtenue par attachement de g anses d'indice 1 à la boule B^4. Les mots m_i représentent des éléments de $\pi_1(\partial W_1)=\pi_1(W_1)$ sur lesquels on peut attacher des anses d'indice 2. La variété W^4 ainsi obtenue satisfait $\pi_1(W)=G$ et $\pi_1(\partial W) \to \pi_1(W)$ est surjectif. Soit M le double de W (i.e. le recollement de deux copies de W le long de leur bord). La variété M est équipée d'une décomposition en anses avec: une anse d'indice 0, g anses d'indice 1, $2r$ anses d'indice 2, g anses d'indice 3 et une anse d'indice 4. D'où $\chi(M)=2(1-d_G)$. On vérifie que $\pi_1(M)=G$ par le théorème de Van-Kampen.

Le fait que $\chi(\tilde{M})=k \cdot \chi(M)$ pour $\tilde{M} \to M$ un revêtement à k feuillets donne immédiatement le corollaire suivant:

COROLLAIRE 2. *Soit G un groupe de présentation finie et soit T un sous-groupe d'indice k dans G. Alors, pour tout corps F, on a:*

$$2+b_2^F(T)-2b_1^F(T) \leqslant k \cdot q(G)$$

Remarquons que cette condition est spécialement forte lorsque $q(G) \leqslant 0$.

EXEMPLES. Le groupe $\mathbb{Z}^m$ contient des sous-groupes isomorphes à lui-même d'indice arbitrairement grand. D'où $q(\mathbb{Z}^m) \geqslant 0$ par le Corollaire 2. Le Théorème 1 donne que $-1 \leqslant q(\mathbb{Z}^2) \leqslant 0$. D'où $q(\mathbb{Z}^2)=0$. De même, $q(\mathbb{Z}^4)=0$, puisque la caractéristique d'Euler du tore de dimension 4 est 0. En revanche, un argument de M. Kreck permet de montrer que $q(\mathbb{Z}^3)=2$.

Dans le même esprit que le Corollaire 2, on a:

PROPOSITION 3. *Soit G un groupe de présentation finie et P un sous-groupe*

parfait d'indice k dans G. Alors, pour tout groupe abélien A, il existe un homomorphisme surjectif $A^{kq(G)-2} \twoheadrightarrow H_2(K(P,1);A)$.

Démonstration. Soit M une variété close orientable de dimension 4 avec $\pi_1(M)=G$ et $\chi(M)=q(G)$. Soit $\tilde{M}\to M$ le revêtement avec $\pi_1(\tilde{M})=P$. Comme P est parfait, on a $H_1(\tilde{M};\mathbb{Z})=H^1(\tilde{M};\mathbb{Z})\cong H_3(\tilde{M};\mathbb{Z})=0$ et $H_2(\tilde{M};\mathbb{Z})\cong H^2(\tilde{M};\mathbb{Z})$ est abélien libre. On obtient $\chi(\tilde{M})=k\cdot q(G)=2+\operatorname{rang}(H_2(\tilde{M};\mathbb{Z}))$, d'où $H_2(\tilde{M};A)=A^{kq(G)-2}$. La proposition découle alors de l'épimorphisme $H_2(\tilde{M};A)\twoheadrightarrow H_2(K(P,1);A)$ rappelé dans la démonstration du Théorème 1.

Remarque. Dans les trois résultats ci-dessus, il n'est pas nécessaire que M soit une variété. Seule la dualité de Poincaré à coefficients constants est utilisée dans la démonstration du Théoréme 1, et la dualité de Poincaré à coefficients locaux pour le Corollaire 2 et la Proposition 3. On peut donc définir $q^P(G)$ (on remplace "variété close" par "complexe de Poincaré"). Nous ignorons si $q^P(G)=q(G)$ en général. De même, il serait intéressant de savoir si l'on obtient le même $q(G)$ pour des variétés différentiables où topologiques.

2. Application aux groupes de noeuds

Un groupe G est un groupe de noeud en dimension n s'il existe un plongement différentiable $f:S^{n-1}\hookrightarrow\Sigma^n$ (S^{n-2} étant la sphère standard et Σ une sphère d'homotopie), tel que $\pi_1(\Sigma-f(S^{n-2}))=G$.

LEMME 4. *Soit g un groupe de noeud en dimension* 4. *Alors* $q(G)=0$.

Démonstration. Il est bien connu que $H_1(G;Z)\cong\mathbb{Z}$ et $H_2(G;\mathbb{Z})=0$ (voir [4]). D'où $q(G)\geqslant 0$ par le Théorème 1. D'autre part, si $f:S^2\to\Sigma^4$ est un noeud avec $\pi_1(\Sigma-f(S^2))=G$, une chirurgie sur $f(S^2)$ produit une variété close orientable M^4 avec $\pi_1(M)=G$ et $H_2(M;\mathbb{Z})=0$. D'oú $q(G)\leqslant\chi(M)=0$.

THÉORÈME 5. *Soit* $1\to T\to G\to\mathbb{Z}\to 1$ *une suite exacte de groupes, avec T fini. Supposons que* $q(G)=0$. *Alors, tout sous-groupe abélien de T est cyclique.*

Démonstration. Le groupe G est un produit semi-direct $G=T\rtimes\mathbb{Z}$. Comme le groupe des automorphismes de T est fini, il existe un sous-groupe G_1 d'indice fini dans G isomorphe à $T\times\mathbb{Z}$.

Soit A un groupe abélien non-cyclique de T. Alors A contient un sous-groupe

de la forme $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$, pour p premier, et G_1 contient un sous-groupe d'indice fini G_2 isomorphe à $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}$. Pour $F = F_p$, on a $b_1^F(G_2) = 3$ et $b_2^F(G_2) = 5$. Ceci contredit le Corollaire 2, puisque $q(G) = 0$.

Les deux résultats précèdents permettent de produire des exemples de groupes de noeuds en dimension $\geqslant 5$ qui ne sont pas des groupes de noeuds en dimension 4. Voici deux exemples:

1) Soit $\Delta = \langle a, b \mid a^5 = b^3 = (ab)^2 \rangle$ le groupe de l'icosaèdre (120 éléments). Le groupe $G = \Delta^m \times \mathbb{Z}$ est un groupe de noeud en toute dimension $\geqslant 5$. En effet, on a $H_1(G) \equiv \mathbb{Z}$, $H_2(G) = 0$, G est de présentation finie et est "tué" par la relation $t = a_1 a_2 \cdots a_m$ (où t est un générateur de $\mathbb{Z}$ et a_i dénote le générateur a de la i^e copie de Δ). Cela implique que G est un groupe de noeud en toute dimension $\geqslant 5$ par le Théorème I.1 de [4]. Par le Lemme 4 et le Théorème 5 ci-dessus, G n'est pas un groupe de noeud en dimension 4 si $m \geqslant 2$. En revanche, $\Delta \times \mathbb{Z}$ est le groupe du noeud obtenu par un "5-twist-spining" sur le noeud de trèfle (voir [9]).

2) Le groupe $SL_m(F) \times \mathbb{Z}$, où $m \geqslant 5$ et F est un corps fini, apparait comme groupe de noeud en toute dimension $\geqslant 5$ (voir l'exemple 4 de [3]). D'après les résultats de ce paragraphe, il n'est pas un groupe de noeud en dimension 4. En effet, $SL_m(F)$ contient des sous-groupe isomorphes à $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, par exemple celui engendré par les matrices diagonales de coefficients diagonaux $(-1, -1, 1, \ldots, 1)$ et $(1, \ldots, 1, -1, -1)$.

Remarque. Des exemples de groupes de noeuds en toute dimension $\geqslant 5$ qui ne sont pas des groupes de noeud en dimension 4 figurent à plusieurs endroits dans la littérature (voir [7] pour des exemples et des références). A notre connaissance, les auteurs ont toujours utilisé des conditions nécessaires que doit satisfaire la torsion de $H_1([G, G])$ pour un groupe de 4-noeud G. Les exemples donnés ci-dessus ayant tous $H_1([G, G]) = 0$, ils n'étaient pas traitables par ces techniques.

3. Application aux groupes de spheres d'homologie

Une sphère d'homologie est une variété close ayant l'homologie entière d'une sphère. Dans [5], Kervaire montre qu'un groupe G est le groupe fondamental d'une sphère d'homologie de dimension n pour tout $n \geqslant 5$ si et seulement si G est de présentation finie et $H_1(G; \mathbb{Z}) = H_2(G; \mathbb{Z}) = 0$ (G est dit "super-parfait"). Le groupe fondamental d'une sphère d'homologie de dimension 4 satisfait également à ces conditions mais, contrairement au cas des groupes de noeud, le statut de la réciproque n'est pas connu. La proposition suivante éclaire ce point:

PROPOSITION 6. *Il existe des groupes super-parfait de présentation finie qui ne sont pas des groupes fondamentaux de sphères d'homologie de dimension* 4.

Démonstration. Nous allons donner deux familles d'exemples: l'une formée de groupes finis et l'autre de groupes sans torsion.

1) Soit $F = F_p$ (p premier). Considérons le groupe fini $P = SL_m(F)$, $m \geqslant 5$. Il est classique que P est super-parfait (voir [3], Exemple 4). Soit $R = (F_p)^m$. Considérons une extension $1 \to R^k \to G_0 \to P \to 1$, où P agit par sa représentation naturelle sur chaque facteur R de R^k. Les discussions du §3 de [2] montrent que $H_0(P; R) = 0 = H_0(P; R \wedge R)$. D'où $H_0(P; R^k) = \bigoplus_k H_0(P; R) = 0$ et $H_0(P; H_2(R^k; \mathbb{Z})) = H_0(P; R^k \wedge R^k) = \bigoplus_{k^2} H_0(P; R \wedge R) = 0$. La suite spectrale de Hochschild-Serre de notre extension donne alors que G_0 est parfait et que $H_2(G_0; \mathbb{Z})$ est un quotient de $H_1(P; R^k) = \bigoplus_k H_1(P; R)$. Comme G_0 est parfait, on a $H_2(G_0; F) = H_2(G_0; \mathbb{Z}) \otimes F$ d'où l'on déduit que $b_2^F(G_0)$ est une fonction linéaire de k.

Soit $0 \to H_2(G_0;\ ) \to G \to G_0 \to 1$ l'extension centrale universelle de G_0 (voir [6]), produisant un groupe fini G superparfait. Le noyau A de l'épimorphisme $G \twoheadrightarrow P$ est une extension centrale $0 \to H_2(G_0; \mathbb{Z}) \to A \to R^k \to 1$. La suite spectrale de cette extension donne la suite exacte:

$$H_2(A; F) \to H_2(R^k; F) \to H_2(G_0; F) \to H_1(A; F) \to H_1(R^k; F) \to 0$$

(on utilise que $H_0(R^k; H_1(H_2(G_0; \mathbb{Z}); F))) \cong H_2(G_0; \mathbb{Z}) \otimes F$, puisque l'extension est centrale et que $H_2(G_0; \mathbb{Z}) \otimes F \cong H_2(G_0; F)$ puisque G_0 est parfait). On déduit de cette suite exacte que $b_1^F(A) \leqslant b_2^F(G_0) + b_1^F(R^k)$ qui est un polynôme de degré 1 en k et que $b_2^F(A) \geqslant b_2^F(R^k) - b_2^F(G_0)$ qui est un polynôme du deuxième degré en k.

Nous pouvons ainsi montrer que le groupe fini super-parfait G n'est pas le groups fondamental s'une sphère d'homologie de dimension 4 lorsque k est assez grand. En effet. on aurait alors $q(G) = 2$. Comme A est d'indice $|P|$ dans G, on aurait l'inégalité du Corollaire 2:

$$2 + b_2^F(A) - 2b_1^F(A) \leqslant 2\,|P|$$

ce qui devient impossible lorsque k est assez grand.

2) Pour construire des exemples sans torsion, on procède comme suit: soit G un groupe comme construit dans 1) avec k assez grand pour avoir la condition $2 + b_2^F(A) - 2b_1^F(A) > 2\,|P|$. Soit K un 3-complexe fini acyclique avec $\pi_1(K) = G$ (par exemple le 3-squelette d'une sphère d'homologie M^7 avec $\pi_1(M^7) = G$ construite comme dans la démonstration du Théorème 1 de [5]). Par le procèdé de Baumslag–Dyer–Heller–Maunder (voir [8]), on construit un groupe Q tel que:

a) $K(Q, 1)$ est un complexe fini de dimension 3

b) il existe une application $K(Q, 1) \to K$ qui induit un épimorphisme $Q \twoheadrightarrow G$ et un isomorphisme sur l'homologie à coefficient locaux.

On en déduit que Q est super-parfait de présentation finie. Le noyau T de l'épimorphisme $Q \twoheadrightarrow G \twoheadrightarrow P$ est un sous-groupe d'indice $|P|$ dans Q. Par b), on a:

$$H_*(T; F) \cong H_*(Q; F[P]) \cong H_*(G; F[P]) \cong H_*(A; F)$$

d'où, pour $F = F_p$, la même contradiction que dans le cas 1).

Remarque. Rappelons qu'un groupe H est dit "efficient" s'il existe un corps F tel qui $d_H = B_1^F(H) - b_2^F(H)$ (voir [1]; on a toujours l'inégalité $d_H \leqslant b_1^F(H) - b_2^F(H)$). Les groupes G et Q ci-dessus ne sont pas efficients, sinon $d_G = d_Q = 0$ et $q(G) = q(Q) = 2$, ce que nous avons montré ne pas être le cas. Nous avons donc construit un groupe Q tel que $K(Q, 1)$ est un complexe fini de dimension 3 et qui n'est pas efficient. Ceci contraste avec le fait qu'un groupe H ayant pour $K(H, 1)$ un complexe fini de dimension 2 est efficient: ce $K(H, 1)$ donne une présentation $\mathcal{P}$ de H telle que $d(\mathcal{P}) = b_1^F(H) - b_2^F(H)$ pour tout corps F.

PROBLÈME. Existe-t'il un groupe fondamental de sphère d'homologie de dimension 4 fini autre que le groupe Δ de l'icosaèdre (voir §2)?

BIBLIOGRAPHIE

[1] EPSTEIN, D. *Finite presentations of groups and 3-manifolds.* Quaterly Jal. of Math. *12* (1961) p. 205–212.
[2] HAUSMANN, J.-Cl. et KERVAIRE, M. *Sous-groupes dérivés des groupes de noeuds.* L'Enseignement Math. XXIV (1978) p. 111–123.
[3] HAUSMANN, J.-Cl. et KERVAIRE, M. *Sur le centre des groupes de noeuds multidimensionnels.* C.R. Ac. Sc Paris, t. *287* (1978) p. 699–702.
[4] KERVAIRE, M. *Les noeuds de dimensions supérieures.* Bull. Soc. Math. de France *93* (1965) p. 225–271.
[5] KERVAIRE, M. *Smooth homology spheres and their fundamental groups.* Trans. Amer. Math. Soc. *144* (1969) p. 67–72.
[6] KERVAIRE, M. *Multiplicateurs de Schur et K-théorie.* Essays on Topology and related topics, Mémoires dédiés à G. de Rham, Springer-Verlag 1970, p. 212–225.
[7] LEVINE, J. *Some results on higher dimensional knot groups.* Knot Theory, Les Plans-sur-Bex 1977, Springer Lect. Notes. 685 p. 243–269.
[8] MAUNDER, C. R. F. *A short proof of a theorem of Kan-Thurston.* Bull. London Math. Soc. *13* (1981) p. 325–327.
[9] ZEEMANN, E. C. *Twisting spun knot.* Trans. Amer. Math. Soc. *115* (1965) p. 471–495.

Section de Mathématiques
Université de Genève
BP 240
1211 Genève 24 Suisse

Department of Mathematics
Princeton University
Princeton NJ 08540 USA