

Sur les feuilletages singuliers stables des variétés de dimension trois.

Autor(en): **Bonatti, Christian**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **60 (1985)**

PDF erstellt am: **16.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-46324>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Sur les feuilletages singuliers stables des variétés de dimension trois

CHRISTIAN BONATTI

Introduction

Qu'un feuilletage soit stable signifie qu'il est, en un sens, semblable à tout feuilletage voisin. Ainsi, un feuilletage F d'une variété compacte M est dit C^r -(structurellement) stable, si pour tout feuilletage F' C^r -proche de F il existe un homéomorphisme de M proche de l'identité qui conjugue F et F' .

De tels feuilletages existent, et l'on connaît des exemples, certains fort simples (par exemple $S^1 \times S^2$ feuilleté trivialement par $\{x\} \times S^2$, ou par deux composantes de Reeb d'holonomie hyperbolique), et d'autres beaucoup plus riches et complexes, par exemple les feuilletages d'Anosov, qui ont toutes leurs feuilles denses.

Cependant, leur existence n'est pas assurée sur toute variété: Rosenberg et Roussarie ont montré, dans (RR), qu'il n'existait pas de feuilletage de codimension un, C^1 -stable sur S^3 . Par contre, il existe des feuilletages à singularités de Morse C^1 -stables sur S^3 : ceux définis par une fonction de Morse à valeurs critiques distinctes, dont les surfaces de niveau sont simplement connexes; Rosenberg et Roussarie ont alors conjecturé que ce sont les seuls.

Cette conjecture est à l'origine de ce travail sur les 2-feuilletages C^1 -stables, à singularités de Morse des variétés de dimension trois. (Un feuilletage F à singularités de Morse est C^1 -stable au voisinage de ses singularités; dire qu'il est stable signifie que tout feuilletage F' , coïncidant avec F au voisinage des singularités et C^1 -proche de F hors de ces voisinages, est conjugué à F par un homeomorphisme proche de l'identité.)

La première partie est une étude du comportement des feuilles singulières issues d'une singularité conique d'un feuilletage stable. L'idée est d'examiner en détail les conséquences de perturbations faites au voisinage de la singularité: si f_1 et f_2 sont les feuilles singulières issues d'une singularité conique s , on montre que f_1 et f_2 sont différentes, de genre 0, sans holonomie, et que $\bar{f}_1 \cup \bar{f}_2$ ne contient pas de singularité autre que s ; de plus l'une de ces feuilles est propre et admet un voisinage feuilleté comme un produit; l'autre feuille ou bien possède les mêmes propriétés ou bien est localement dense. (Ces résultats sont rassemblés dans le Lemme 1.)

Dans la seconde partie on considère les feuilletages stables à feuilles toutes propres (une feuille est dite propre si sa topologie de feuille coïncide avec la topologie induite par celle de la variété ambiante), et on démontre dans ce cadre la conjecture de Rosenberg et Roussarie:

THEOREME. *Les seuls feuilletages C^∞ à singularités de Morse, C^1 -stables, à feuilles toutes propres, de S^3 , sont ceux définis par une fonction de Morse à valeurs critiques distinctes et à surfaces de niveau simplement connexes.*

Ce résultat est encore vrai sur une variété orientable de π_1 fini.

Voici les étapes de la démonstration: nous montrons successivement que dans un tel feuilletage les feuilles compactes, puis les feuilles de hauteur finie, ont leur groupe d'holonomie trivial ou cyclique de générateur hyperbolique; puis que, sous les mêmes hypothèses, toutes les feuilles sont de hauteur finie. Nous concluons grâce à un résultat de Haefliger, selon lequel sur une variété de π_1 fini, tout feuilletage admettant une transversale fermée possède une holonomie C^∞ -plate non triviale.

Dans ce texte, les variétés seront de dimension trois, C^∞ et orientables, et les feuilletages seront de codimension un, transversalement orientés, C^∞ à singularités de Morse.

Dans toute la suite, nous désignerons par M , une variété compacte sans bord de dimension trois, sur laquelle on aura fixé une métrique. On notera \mathcal{F} un feuilletage sur M à singularités de Morse, C^1 -stable. On appellera *feuille de \mathcal{F}* une feuille de \mathcal{F} restreint à l'ensemble des points non singuliers.

Soit X l'ensemble des singularités de \mathcal{F} . Ces singularités sont de deux types:

- les singularités d'indice 0 ou 3 sont des centres, et les feuilles voisines sont des sphères;
- les singularités d'indice 1 ou 2 sont dites coniques; si $x_0 \in X$ est conique, il y a deux bouts de feuilles qui convergent vers x_0 . Nous les appellerons *bouts singuliers issus de x_0* . Une feuille sera dite singulière si elle contient un bout singulier.

Rappelons d'abord quelques faits connus qui seront par la suite fréquemment utilisés:

0a) D'après [RR] et [M], si S est une feuille compacte d'un feuilletage \mathcal{F} C^1 -stable, et si $\pi_1(S) \neq \{0\}$, Alors S admet au moins un germe d'holonomie hyperbolique (c'est-à-dire à dérivée au point 0 différente de 1).

0b) Soit \mathcal{F} un feuilletage non singulier d'une variété compacte V . Alors l'union des feuilles de \mathcal{F} sans holonomie est un G_δ dense de V (voir [H]). Ce résultat reste valable si \mathcal{F} est à singularités de Morse.

0c) Soit \mathcal{F} un feuilletage C^1 -stable d'une variété compacte V . On vérifie

facilement qu'une feuille f de genre $g(f) \geq 1$ est à holonomie non triviale. En particulier, l'union des feuilles de genre nul est un G_δ dense dans V .

Je remercie très sincèrement G. Levitt et H. Rosenberg qui m'ont guidé durant ce travail.

I. Etude des feuilles singulières

Nous allons maintenant étudier en détail une feuille singulière d'un feuilletage stable: On peut modifier légèrement le feuilletage, d'une façon simple, au voisinage d'une singularité conique; la stabilité nous donnera alors de nombreux renseignements.

a) C^1 -perturbation de \mathcal{F} , à support dans un voisinage d'une courbe fermée simple, tangente à \mathcal{F} et d'holonomie triviale.

Soit γ une telle courbe. Alors, il existe un plongement F de $S^1 \times [0, 1] \times [-1, 1]$ dans M tel que $F(S^1 \times \{(0, 0)\}) = \gamma$ et que $F^{-1}(\mathcal{F}) = \{S^1 \times [0, 1] \times \{t\}\}_{t \in [-1, 1]}$. Fixons-nous F un tel plongement.

Soit $\varphi \in \text{Diff}_{\text{int}}([-1, 1])$; φ définit un 2-feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_\varphi$ sur $S^1 \times [0, 1] \times [-1, 1]$ égal à $F^{-1}(\mathcal{F})$ près du bord et hors de $S^1 \times [0, 1] \times \text{supp}(\varphi)$, transverse à tous les segments $\{(\theta, s)\} \times [-1, 1]$ ($(\theta, s) \in S^1 \times [0, 1]$) et tel que son holonomie de $\{(\theta, 1)\} \times [-1, 1]$ dans $\{(\theta, 0)\} \times [-1, 1]$ envoie $(\theta, 1, t)$ sur $(\theta, 0, \varphi(t))$. Le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_\varphi$ est bien défini à conjugaison près par un difféomorphisme de $S^1 \times [0, 1] \times [-1, 1]$ égal à l'identité près du bord.

Notons \mathcal{F}_φ le feuilletage sur M coïncidant avec \mathcal{F} hors de $\text{Im}(F)$ et coïncidant avec $F(\tilde{\mathcal{F}}_\varphi)$ sur $\text{Im}(F)$. Pour φ C^1 -proche de l'identité, \mathcal{F}_φ peut être choisi C^1 -proche de \mathcal{F} ; \mathcal{F}_φ est alors conjugué à \mathcal{F} par un homéomorphisme de M proche de l'identité, car \mathcal{F} est C^1 -stable.

b) C^1 -perturbation de \mathcal{F} , à support dans un voisinage d'une singularité conique de \mathcal{F} .

Soit x_0 une telle singularité. Soit U un voisinage de x_0 tel que $\mathcal{F} \mid U$ soit conjugué au modèle standard de Morse. Tous les ensembles que nous allons décrire maintenant seront contenus dans U .

Soient γ_1, γ_2 deux courbes simples tangentes à \mathcal{F} , découpant chacune un bout singulier issu de x_0 . Il existe deux plongements a_1, a_2 de $[-1, 1]$ dans U , transverses à \mathcal{F} , tels que $a_i(0) = \gamma_i(0)$, que \mathcal{F} induise par holonomie un difféomorphisme de $a_1(]0, 1])$ sur $a_2(]0, 1])$ envoyant $a_1(t)$ sur $a_2(t)$ et que l'holonomie le long de γ_i soit définie et égale à l'identité sur tout le segment $a_i([-1, 1])$ (voir figure 1).

On se fixe alors, de même qu'au a), des plongements F_1 et F_2 , de $S^1 \times [0, 1] \times [-1, 1]$ dans M tels que $F_i(S^1 \times \{(0, 0)\}) = \gamma_i$, que $F_i(0, 0, t) = a_i(t)$ et que $F_i^{-1}(\mathcal{F}) = \{S^1 \times [0, 1] \times \{t\}\}_{t \in [-1, 1]}$; on impose de plus que $F_i(S^1 \times \{1\} \times \{0\})$ soit "plus près" de la singularité que γ_i .

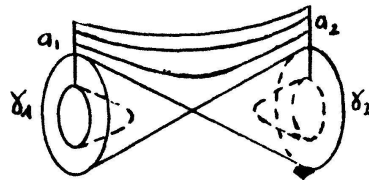


Figure 1. Quitte à changer l'orientation transverse de \mathcal{F} , on supposera que les a_i sont orientés dans le sens positif.

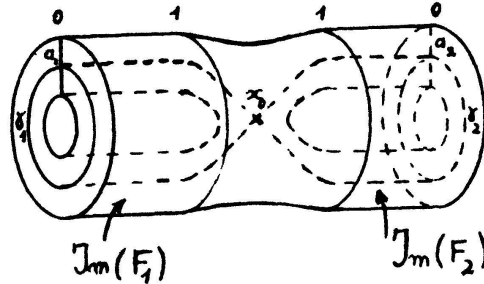


Figure 2

On notera $C_{t,i}$ le cercle $F_i(S^1 \times \{0\} \times \{t\})$ (en particulier $C_{0,i} = \gamma_i$). On notera A le voisinage de x_0 , bordé par $F_1(S^1 \times \{0\} \times [-1, 1]) \cup F_2(S^1 \times \{0\} \times [-1, 1])$ et par des morceaux de feuilles de \mathcal{F} , et représenté à la figure suivante:

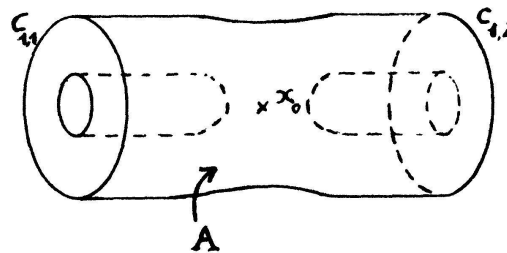


Figure 3

Décrivons à présent les perturbations de \mathcal{F} qui nous serviront:

- Soit $\varphi \in \text{Diff}_{\text{int}}([0, 1])$, soit $\bar{\mathcal{F}}_\varphi$ le feuilletage de $S^1 \times [0, 1] \times [-1, 1]$ décrit au a). On notera $\mathcal{F}_{\varphi,i}$ le feuilletage coïncidant avec \mathcal{F} hors de $\text{Im}(F_i)$ et avec $F_i(\bar{\mathcal{F}}_\varphi)$ sur $\text{Im}(F_i)$.
- Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in \text{Diff}_{\text{int}}([0, 1])$; on notera $\mathcal{F}_{\varphi_1, \varphi_2}$ le feuilletage coïncidant avec \mathcal{F} hors de $\text{Im}(F_1) \cup \text{Im}(F_2)$, et égal à $F_i(\bar{\mathcal{F}}_{\varphi_i})$ sur $\text{Im}(F_i)$.
- On voit facilement que, pour $\varphi \in \text{Diff}_{\text{int}}([0, 1])$, $\mathcal{F}_{\varphi, \varphi}$ ne dépend, à conjugaison près, que de $\varphi(0)$; si $t = \varphi(0)$, on notera $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{\varphi, \varphi}$.

Le feuilletage \mathcal{F} étant stable, pour $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ assez voisins de l'identité, pour t petit, les feuilletages $\mathcal{F}_{\varphi,i}, \mathcal{F}_{\varphi_1, \varphi_2}, \mathcal{F}_t$ seront conjugués à \mathcal{F} par un homéomorphisme proche de l'identité.

Il est très important pour la suite de bien comprendre les transformations $(\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_t)$ que nous allons maintenant étudier.

Nous dirons qu'un chemin Γ tangent à \mathcal{F} qui joint deux points x_1, x_2 n'est pas coupé par $(\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_t)$ s'il existe un chemin Γ' , tangent à \mathcal{F}_t , joignant x_1 à x_2 et coïncidant avec Γ sur $M \setminus A$. Nous dirons qu'une feuille f n'est pas modifiée par $(\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_t)$ s'il existe une feuille f' de \mathcal{F}_t qui soit conjuguée à f par un homéomorphisme de M à support dans A .

• Pour $t_0 > 0$, la transformation $(\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{t_0})$ consiste à couper les feuilles passant par $a_1(t)$, $t \in [0, t_0[$, et à recoller un disque sur chaque bout, et à faire porter la singularité par la feuille passant par $a_1(t_0)$.

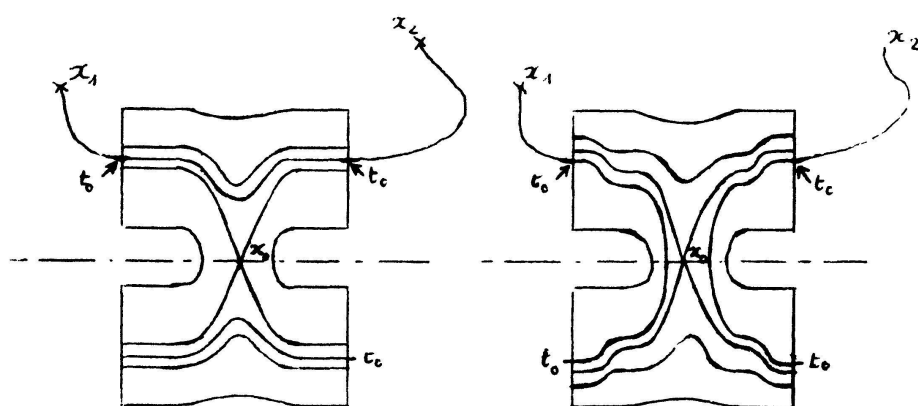


Figure 4. Le chemin joignant x_1 à x_2 a été coupé par la transformation $(\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{t_0})$.

• Une feuille qui ne coupe pas $a_i([0, t_0])$ n'est pas modifiée par $(\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{t_0})$.

• Une feuille qui était propre (resp. semi-propre) reste propre (resp. semi-propre) après transformation: on n'a fait que la couper en éventuellement plusieurs feuilles de \mathcal{F}_{t_0} qui seront donc chacune propres. De plus, soit Γ un chemin tangent à \mathcal{F} joignant deux points de $M \setminus \dot{A}$. Si pour tout $t \in [0, t_0[$, Γ ne rencontre pas $C_{t,1} \cup C_{t,2}$, alors Γ n'est pas coupé par $(\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{t_0})$ (si Γ coupe $C_{t_0,i}$, le chemin Γ' induit passera éventuellement par x_0).

Pour $t_0 \leq 0$, la transformation $(\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{t_0})$ consiste à découper un disque sur chaque feuille passant par $a_i(t)$, $t \in]t_0, 0]$, à recoller le bout ainsi créé passant par $a_1(t)$ avec celui passant par $a_2(t)$, et à faire porter la singularité par les feuilles passant par $a_1(t_0)$ ou $a_2(t_0)$.

Une feuille ne coupant ni $a_1([t_0, 0])$ ni $a_2([t_0, 0])$ n'est pas modifiée par cette transformation. Il est important de voir que pour deux points x_1, x_2 de $M \setminus A$, aucun chemin tangent à \mathcal{F} joignant x_1 à x_2 n'est coupé par $(\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{t_0})$ ($t_0 < 0$). Ainsi, une feuille non propre (resp. localement dense) reste non propre (resp. localement dense) par la transformation $(\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{t_0})$.

Remarque 1. Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in \text{Diff}_{\text{int}}([-1, 1])$ tels que leurs inverses φ_1^{-1} et φ_2^{-1} coïncident sur $[0, 1]$, ($\varphi_1^{-1}|_{[0, 1]} = \varphi_2^{-1}|_{[0, 1]}$).

· Si $\varphi_1(0) > 0$, alors $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$ et les feuilletages $\mathcal{F}_{\varphi_1, \varphi_2}$ et $\mathcal{F}_{\varphi_1(0)}$ sont conjugués par un difféomorphisme C^∞ de M à support dans A .

· Si $\varphi_1(0) < 0$, alors $\varphi_2(0) \leq 0$, et la transformation $(\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{\varphi_1, \varphi_2})$ vérifie les propriétés décrites ci-dessus de $(\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_t)$ pour $t < 0$: en particulier, elle ne coupe aucun chemin Γ tangent à \mathcal{F} et joignant deux points de $M \setminus A$. De plus, si Γ passait par x_0 , le chemin tangent à $\mathcal{F}_{\varphi_1, \varphi_2}$ induit par Γ ne passera pas par x_0 .

Remarque 2. Soient $\varphi, \varphi_1 \in \text{Diff}_{\text{int}}([-1, 1])$ et $x_1, x_2 \in M \setminus A$, un chemin Γ tangent à \mathcal{F} , joignant x_1 à x_2 , ne rencontrant pas les cercles $C_{t,1}$ pour $t \in (\text{supp } \varphi \cup \text{supp } \varphi_1) \cap [0, 1]$, ne sera pas coupé par $(\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_\varphi)$ ni par $(\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{\varphi, \varphi_1})$.

On utilisera par la suite les notations suivantes:

- Pour $t > 0$, f_t sera la feuille de \mathcal{F} passant par $a_1(t)$ et $a_2(t)$.
- Pour $t \leq 0$, $f_{t,i}$ sera la feuille de \mathcal{F} passant par $a_i(t)$.
- Pour $t > t_0$, $f_{t_0}^{t_0}$ sera la feuille de \mathcal{F}_{t_0} passant par $a_1(t)$ et $a_2(t)$.
- Pour $t \leq t_0$, $f_{t_0}^{t,i}$ sera la feuille de \mathcal{F}_{t_0} passant par $a_i(t)$.

LEMME 1. Soit \mathcal{F} un feuilletage C^1 -stable sur une variété compacte M^3 . Soit x_0 une singularité conique et soient $f_{0,1}$ et $f_{0,2}$ les feuilles singulières contenant les bouts singuliers issus de x_0 . Alors:

- a) Pour tout i , $f_{0,i}$ ne contient qu'un bout singulier (en particulier $f_{0,1} \neq f_{0,2}$)
- b) Pour tout i , $\bar{f}_{0,i} \setminus f_{0,i}$ ne contient aucune autre singularité que x_0 .
- c) Pour tout i , $f_{0,i}$ est sans holonomie. En particulier, $g(f_{0,i}) = 0$ (donc $\forall f \in \mathcal{F}$, si f est singulière et si $f \cup X$ est compact, alors il existe une singularité x telle que $f \cup \{x\}$ soit homéomorphe à une sphère).
- d) Pour au moins un i de $\{1, 2\}$, $f_{0,i}$ est propre, $\bar{f}_{0,i} \setminus f_{0,i}$ ne contient aucun bout singulier et il existe un plongement π de $f_{0,i} \times [-1, 1]$ dans M , tel que $\pi(f_{0,i} \times \{0\}) = f_{0,i}$, et tel que $\pi^{-1}(\mathcal{F})$ soit le feuilletage produit $\{f_{0,i} \times \{t\}\}_{t \in [-1, 1]}$.
- e) Soit j l'autre indice. Alors, soit $f_{0,j}$ vérifie également les propriétés énoncées en d), soit $f_{0,j}$ est localement dense.
- f) Si $f_{0,1}$ et $f_{0,2}$ sont propres, alors pour tout i , pour toute feuille f différente de $f_{0,i}$, l'adhérence de f est disjointe de $f_{0,i}$.

Démonstration. On utilisera les notations introduites précédemment. Fixons $\mu > 0$ tel que pour tout $t \in [-\mu, \mu]$, \mathcal{F}_t soit conjugué à \mathcal{F} .

a) Démontrons ce point par l'absurde. Supposons que $f_{0,1}$ ait deux bouts singuliers. Soit x_1 l'autre singularité (éventuellement x_1 peut être égal à x_0). Soit γ un chemin tangent à $f_{0,1}$ qui joint ces deux bouts. Par compacité de γ , il existe $\eta > 0$, $\varepsilon > 0$ tels que tout chemin partant de x_1 , tangent à \mathcal{F} et ε -proche de γ ne

rencontre pas $F_1(S^1 \times [0, 1] \times ([-\eta, \eta] \setminus \{0\}))$. On choisit alors un difféomorphisme φ de $[-1, 1]$, à support dans $[-\eta, \eta]$, tel que $\varphi(0) \neq 0$, assez proche de l'identité pour que $\mathcal{F}_{\varphi,1}$ soit conjugué à \mathcal{F} par un homéomorphisme G ε -proche de l'identité. La transformation $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{\varphi,1}$ coupe le chemin γ qui joignait x_0 à x_1 . Il peut y avoir d'autres chemins tangents à $\mathcal{F}_{\varphi,1}$ qui joignent x_0 à x_1 , mais on voit facilement que ces chemins ne seront pas ε -proches de γ : il y a contradiction, $G(\gamma)$ étant tangent à $\mathcal{F}_{\varphi,1}$, joignant x_0 à x_1 et étant ε -proche de γ .

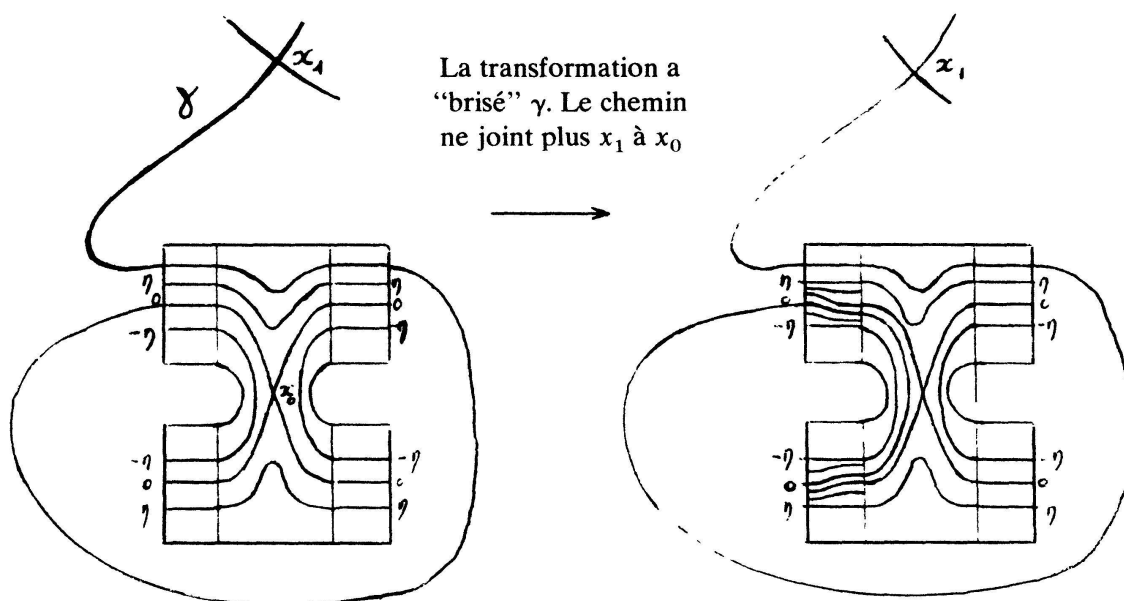


Figure 5

b) Supposons que la propriété 2b) soit fautive: par exemple, il existe une singularité conique x_1 différente de x_0 , et g une feuille portant un bout singulier issu de x_1 telles que $x_0 \in \bar{g} \setminus g$. Nous allons construire un feuilletage \mathcal{F}_t , conjugué à \mathcal{F} tel que x_0 et x_1 soient sur la même feuille, ce qui sera une contradiction.

Il existe $t_0 \in [-\mu, \mu]$ tel que $a_1(t_0)$ ou $a_2(t_0)$ appartienne à g (par exemple $a_1(t_0) \in g$). Soit γ un chemin tangent à \mathcal{F} joignant x_1 à $a_1(t_0)$. Soit $t_1 = \min(\{t \in [-\mu, \mu] / \gamma \cap (C_{t,1} \cup C_{t,2}) \neq \emptyset\})$. Alors, on a vu que γ n'est pas coupé par la transformation $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{t_1}$. Donc, il existe un chemin γ_1 tangent à \mathcal{F}_{t_1} et joignant x_1 à un point de $C_{t_1,1} \cup C_{t_1,2}$. Mais $C_{t_1,1}$ et $C_{t_1,2}$ sont sur les bouts singuliers issus de x_0 de \mathcal{F}_{t_1} .

Il y a contradiction: x_0 et x_1 sont portés par la même feuille singulière de \mathcal{F}_{t_1} .

c) Il existe $t \in]0, \mu]$ tel que la feuille f_t de \mathcal{F} soit sans holonomie. La transformation $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_t$ ne fait que "couper des feuilles" donc par cette transformation, une feuille sans holonomie reste sans holonomie. Donc, dans \mathcal{F}_t , les feuilles singulières $f'_{t,1}$ et $f'_{t,2}$ sont sans holonomie. Mais \mathcal{F}_t est conjugué à \mathcal{F} , donc les feuilles singulières de \mathcal{F} , $f_{0,1}$ et $f_{0,2}$, sont sans holonomie.

d, e et f). Montrons tout d'abord que (d et e) \Rightarrow f. En effet, si $f_{0,1}$ et $f_{0,2}$ sont propres, d'après (d et e) on peut choisir un intervalle I et deux plongements π_i de $f_{0,i} \times I$ dans M tels que $\pi_i(f_{0,i} \times \{0\}) = f_{0,i}$ et $\pi_i(f_{0,i} \times \{t\}) \subset f_{t,i}$. Soit A_0 le voisinage de x_0 composé de x_0 et des feuilles de $\mathcal{F} \mid A$ qui rencontrent $\pi_1(a_1(0) \times I)$ ou $\pi_2(a_2(0) \times I)$; on voit alors facilement que $\text{Im}(\pi_1) \cup \text{Im}(\pi_2) \cup A_0$ est un voisinage de x_0 saturé par \mathcal{F} . Une feuille non singulière contenant un point $a_i(t)$, $t \in I$, sera alors incluse dans ce voisinage et sera composée de, au plus, une feuille de chacun des feuilletages $\mathcal{F} \mid \text{Im}(\pi_1)$, $\mathcal{F} \mid \text{Im}(\pi_2)$ et $\mathcal{F} \mid A_0$. Ceci achève de prouver que (d et e) \Rightarrow f.

Montrons maintenant par l'absurde que $f_{0,1}$ ou $f_{0,2}$ n'est pas localement dense. Supposons donc que $f_{0,1}$ et $f_{0,2}$ sont localement denses. En particulier, il existe $t_1 \in]-\mu, 0[$ tel que $f_{t_1,1} = f_{0,1}$, et il existe t_2 arbitrairement voisin de t_1 tel que $f_{t_2,2} = f_{0,2}$.

Soient φ_1 et φ_2 deux difféomorphismes appartenant à $\text{Diff}_{\text{int}}([-1, 1])$ tels que les restrictions $\varphi_1^{-1} \mid [0, 1]$ et $\varphi_2^{-1} \mid [0, 1]$ soient égales, et que $\varphi_1(0) = t_1$ et $\varphi_2(0) = t_2$. φ_2 peut être choisi C^1 -proche de φ_1 , donc $\mathcal{F}_{\varphi_1, \varphi_2}$ sera C^1 -proche de \mathcal{F}_t et sera conjugué à \mathcal{F} .

Soit Γ un chemin tangent à \mathcal{F} , passant par x_0 , joignant $a_1(t_1)$ à $a_2(t_2)$. La transformation $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{\varphi_1, \varphi_2}$ ne coupe aucun chemin, et Γ induit donc un chemin Γ_1 tangent à $\mathcal{F}_{\varphi_1, \varphi_2}$, qui joint $a_1(t_1)$ à $a_2(t_2)$ sans passer cette fois par x_0 . Or $a_1(t_1)$ et $a_2(t_2)$ sont sur les bouts singuliers de $\mathcal{F}_{\varphi_1, \varphi_2}$ issus de x_0 , donc les deux bouts sont portés par la même feuille, ce qui est impossible (voir figure). Donc, $f_{0,1}$ ou $f_{0,2}$ n'est pas localement dense.

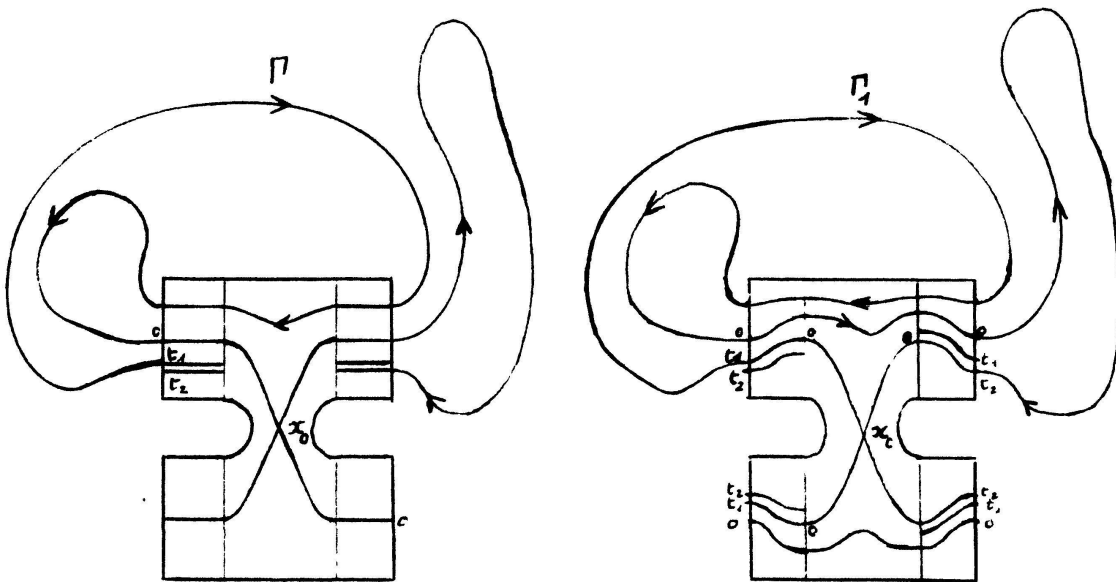


Figure 6. La transformation $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{\varphi_1, \varphi_2}$ ne coupe pas Γ et le chemin induit joint les deux bouts singuliers de $\mathcal{F}_{\varphi_1, \varphi_2}$.

Supposons donc que $f_{0,1}$ n'est pas localement dense.

· Montrons d'abord que, pour $t > 0$ assez petit, f_t est différente de $f_{0,1}$ (on dira que $f_{0,1}$ est semi-propre par valeur supérieure).

L'ensemble $\{t \in]0, \mu[/ a_1(t) \notin \bar{f}_{0,1}\}$ est un ouvert non vide, car $f_{0,1}$ est non localement dense; soit $]t_1, t_2[$ une de ses composantes connexes.

· Si t_1 est nul, la démonstration est terminée.

· Si $t_1 > 0$, par définition de t_1 , f_{t_1} est dans l'adhérence de $f_{0,1}$, or $\bar{f}_{0,1}$ ne rencontre pas $a_1(]t_1, t_2[)$. Cela prouve que f_{t_1} est semi-propre par valeur supérieure.

La transformation $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{t_1}$ ne fait que "couper des chemins", donc par cette transformation une feuille semi-propre reste semi-propre. Donc, la feuille $f_{t_1,1}^t$ (feuille singulière de \mathcal{F}_{t_1}) est semi-propre par valeur supérieure, et donc, \mathcal{F}_{t_1} étant conjugué à \mathcal{F} , $f_{0,1}$ est semi-propre par valeur supérieure.

· Montrons maintenant par l'absurde que $f_{0,1}$ est propre par valeur inférieure (donc est propre). Supposons donc que $f_{0,1}$ n'est pas propre. En particulier, il existe $t_0 \in]-\mu, 0[$ tel que $f_{t_0,1} = f_{0,1}$. Soit γ un chemin tangent à \mathcal{F} joignant $a_1(0)$ à $a_1(t_0)$. Alors, par holonomie le long de γ , il est clair qu'il existe $t_1 \in]0, \mu[$, $t_2 \in]-\mu, 0[$ tels que les feuilles f_{t_1} et $f_{t_2,1}$ soient égales.

La feuille $f_{t_2,1}$ n'est pas localement dense (sinon \mathcal{F}_{t_2} aurait sa feuille singulière $f_{t_2,1}^t$ localement dense), donc f_{t_1} est non localement dense.

L'ensemble $\{t \in]0, t_1[/ t \notin \bar{f}_{t_1}\}$ est donc un ouvert non vide; soit $]t_3, t_4[$ une de ses composantes connexes. Alors f_{t_4} est semi-propre par valeurs inférieures, car f_{t_4} est dans l'adhérence de f_{t_1} et ne rencontre donc pas $a_1(]t_3, t_4[)$.

Donc \mathcal{F}_{t_4} a sa feuille singulière $f_{t_4,1}^t$ propre par valeurs inférieures, ce qui contredit l'hypothèse " $f_{0,1}$ non propre par valeur inférieure".

On vient de montrer que si $f_{0,1}$ n'est pas localement dense, elle est propre.

Nous allons maintenant montrer par l'absurde que si $f_{0,1}$ est propre, alors son adhérence $\bar{f}_{0,1}$ est disjointe de $f_{0,2}$ (cela prouvera que $\bar{f}_{0,1} \setminus f_{0,1}$ ne contient aucun bout singulier).

Supposons donc que $f_{0,1}$ est propre et que $f_{0,2} \subset \bar{f}_{0,1}$. On voit facilement qu'il existe $\eta > 0$ tel que $f_{0,1}$ ne rencontre pas $a_2(]0, \eta[)$; en effet, pour tout $t > 0$, $a_1(t)$ et $a_2(t)$ sont sur la même feuille. La propriété de f conclut alors ce point.

Par contre, il existe une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $t_n \in]-\mu, 0[$, convergente vers 0, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_2(t_n) \in f_{0,1}$. Pour n assez grand, on pourra donc trouver un difféomorphisme φ_n de $[-1, 1]$ à support dans $]-1, \eta]$, tel que $\varphi_n(0) = t_n$, et que φ_n soit assez proche de l'identité pour que $\mathcal{F}_{\varphi_n,2}$ soit conjugué à \mathcal{F} .

Un chemin tangent à \mathcal{F} , et joignant $a_1(0)$ à $a_2(t_n)$, ne rencontre pas $F_i(S^1 \times [0, 1] \times [0, \eta])$, donc "n'est pas coupé" par la transformation $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{\varphi_n,2}$. Donc $a_1(t)$ et $a_2(t_n)$ sont sur la même feuille de $\mathcal{F}_{\varphi_n,2}$. Mais $a_2(t_n)$ et $a_1(t)$ sont chacun sur un bout singulier de $\mathcal{F}_{\varphi_n,2}$, ce qui contredit le fait que $\mathcal{F}_{\varphi_n,2}$ soit conjugué à \mathcal{F} .

Cette contradiction achève de montrer que $\bar{f}_{0,1} \cap f_{0,2} = \emptyset$.

Il reste à construire le plongement π de $f_{0,1} \times [-1, 1]$ dans M , ayant les propriétés annoncées.

Soit γ une courbe simple fermée tangente à \mathcal{F} et coupant le bout singulier de $f_{0,1}$. Soit $\tilde{f}_{0,1} = f_{0,1} \setminus$ (le bout singulier). D'après ce qui précède, il existe $\varepsilon > 0$ tel que toute singularité $x \in X$ soit à une distance supérieure à 2ε de $\tilde{f}_{0,1}$. Soit $0 = \bigcup_{x \in X} \mathring{B}(x, \varepsilon)$ où $\mathring{B}(x, \varepsilon)$ est la boule ouverte centrée en x , de rayon ε . Quitte à restreindre A , on peut supposer $A \subset 0$.

On va construire un plongement π_0 de $\tilde{f}_{0,1} \times [-\alpha, 0]$ ($\alpha > 0$) dans $M \setminus 0$, tel que $\pi_0^{-1}(\mathcal{F}) = \{\tilde{f}_{0,1} \times \{t\}\}$, que $\pi_0|_{\tilde{f}_{0,1} \times \{0\}}$ soit l'identité, et que $\pi_0(\gamma \times \{t\})$ découpe sur $f_{t,1}$ un disque contenant $a_1(t)$. On voit facilement que d'un tel plongement on peut déduire π : en effet, $\text{Im}(\pi_0)$ ne rencontrant pas A , $\mathcal{F} | \text{Im}(\pi_0)$ n'est pas modifié par les transformations $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_t$; en choisissant $t_0 \in]-\alpha, 0[$, on obtient un plongement de $\tilde{f}_{0,1} \times [-\alpha, 0]$ sur un voisinage de la feuille singulière $f_{t_0,1}^t$ privée de son bout singulier. Il suffit alors de prolonger π_0 sur un voisinage de ce bout singulier pour avoir le plongement voulu.

Soit Γ un plongement de $S^1 \times [-\mu, 0]$ dans $M \setminus 0$ tel que, pour tout $\theta \in S^1$, $\Gamma(\{\theta\} \times [-\mu, 0])$ soit un chemin orthogonal à \mathcal{F} , tel que pour tout $t \in [-\mu, 0]$, $\Gamma(S^1 \times \{t\})$ soit un lacet γ_t tangent à \mathcal{F} et découpant le bout singulier de la feuille $f_{t,1}^t$ de \mathcal{F}_t ; on supposera de plus que $\gamma_0 = \gamma$. Soit b le chemin orthogonal à \mathcal{F} défini par $b(t) = \gamma_t(0)$ pour tout $t \in [-\mu, 0]$. Soient \vec{N} le champ de vecteur unitaire orthogonal à \mathcal{F} , de même orientation que b . Soit $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ le flot de \vec{N} .

Remarque préliminaire. Notons d la distance sur M et $d_{\mathcal{F}}$ la distance sur chaque feuille associée à la métrique induite par celle de M . Alors, par compacité de $M \setminus 0$, il existe $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in]0, \varepsilon[$ qui vérifient la condition suivante:

$\forall x, y \in M \setminus 0, d(x, y) < \varepsilon_1 \Rightarrow \exists! t \in]-\varepsilon_2, \varepsilon_2[$ tel que $\varphi_t(x)$ et y soient sur la même feuille et que $d_{\mathcal{F}}(\varphi_t(x), y) < \varepsilon_3$.

On notera $\varphi_t(x) = P_y(x)$.

On voit facilement que si $x(t)$ est un chemin C^∞ et si $y(t)$ est un chemin continu restant sur une même feuille de \mathcal{F} , alors $P_{y(t)}(x(t))$ est un chemin C^∞ tangent à \mathcal{F} .

Soit $\alpha \in]0, \mu[$ tel que $\forall t \in [\alpha, 0]$, \mathcal{F}_t soit conjugué à \mathcal{F} par un homéomorphisme G_t ε_1 -proche de l'identité. Pour tout t , $G_t(\tilde{f}_{0,1})$ ne rencontre pas 0 , donc n'est pas modifié par la transformation $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_t$; $G_t(\tilde{f}_{0,1})$ est donc inclus dans la feuille $f_{t,1}$ de \mathcal{F} .

Pour tout $t \in [-\alpha, 0]$ et tout $x \in \tilde{f}_{0,1}$, $G_t(x) \in M, 0$ et $d(x, G_t(x)) < \varepsilon_1$. On peut donc définir $\pi_0(x, t) = P_{G_t(x)}(x)$ appartenant à $f_{t,1}$.

Pour tout t , $G_t(\gamma_0)$ découpe le bout singulier de $f_{t,1}^t$ donc $\pi_0(\gamma_0, t)$ découpe le bout singulier de $f_{t,1}^t$. On en déduit facilement que $\pi_0(\gamma_0, t) = \gamma_t$, et donc que $\pi_0(b(0), t) = b(t)$.

Alors, pour tout chemin Γ tangent à $f_{0,1}$, d'origine $b(0)$, $\pi_0(\Gamma, t)$ sera un relevé de Γ le long de \vec{N} sur la feuille $f_{t,1}$ et d'origine $b(t)$. On montre alors facilement que π_0 est un difféomorphisme local de $\tilde{f}_{0,1}$ dans $M \setminus 0$. Il reste à montrer que π_0 est injectif: soient $(x_1, t_1), (x_2, t_2) \in \tilde{f}_{0,1} \times [-\alpha, 0]$ ayant même image par π_0 . Alors $\pi_0(x_1, [-\alpha, 0])$ et $\pi_0(x_2, [-\alpha, 0])$ sont deux segments sur la même orbite de \vec{N} , qui ont même orientation, et ont un point commun. Alors, il existe $i \in \{1, 2\}$ tel que $\pi_0(x_i, 0)$ appartienne à l'autre segment. Par exemple $\pi_0(x_1, 0) = \pi_0(x_2, t)$, $t \in [-\alpha, 0]$, donc $f_{0,1} = f_{t,1}$. Si $t \neq 0$, ceci est clairement en contradiction avec le fait que $f_{0,1}$ privé de son bout singulier ne rencontre pas A . Donc t est nul, c'est-à-dire $\pi_0(x_1, 0) = \pi_0(x_2, 0)$, soit $x_1 = x_2$.

Il reste à montrer que $t_1 = t_2$; si $t_1 \neq t_2$ et $\pi_0(x_1, t_1) = \pi_0(x_2, t_2)$, on voit facilement qu'il existe $t \neq 0$ tel que $\pi_0(x_1, t) = \pi_0(x_1, 0)$, donc que $f_{0,1} = f_{t,1}$, et l'on vient de voir que cela n'était pas possible.

On vient de voir que π_0 était un plongement. Ceci achève la démonstration du lemme 1.

II. Etude des feuilletages stables à feuilles propres

1. Feuilles compactes d'un feuilletage stable à feuilles propres

Voici tout d'abord un lemme général (c'est-à-dire n'utilisant ni la stabilité du feuilletage, ni la propriété de ses feuilles) sur l'existence d'une feuille propre au voisinage d'une feuille compacte.

LEMME 2. *Soit \mathcal{T} un feuilletage d'une variété V^3 (pas forcément compacte). Soit S une feuille de \mathcal{T} de π_1 différent de $\{0\}$. On suppose que S admet un germe d'holonomie hyperbolique et qu'il existe une feuille propre f telle que $S \subset \bar{f} \setminus f$. Alors,*

- i) *Soit $F: \pi_1(S) \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ l'homomorphisme d'holonomie linéaire. L'image $F(\pi_1(S))$ est un sous-groupe discret, donc cyclique de \mathbb{R}^{+*} .*
- ii) *Si S est de genre $g(S) > 1$, alors $g(f) > 0$ (en fait, $g(f) = +\infty$).*

On en déduit alors le corollaire suivant qui décrit les feuilles compactes d'un feuilletage C^1 -stable à feuilles toutes propres:

COROLLAIRE. *Soit \mathcal{F} un feuilletage C^1 -stable à feuilles toutes propres d'une variété compacte M^3 . Soit S une feuille compacte de \mathcal{F} . Alors, soit S est une sphère, soit S est un tore et son groupe d'holonomie est cyclique, de générateur hyperbolique.*

Démonstration du corollaire. Si S n'est pas une sphère, alors $\pi_1(S) \neq 0$ et donc d'après 0a) S admet un germe d'holonomie hyperbolique. Toutes les feuilles de \mathcal{F} sont propres, et l'on va donc pouvoir appliquer le lemme 2 aux feuilles voisines de

S : si $g(S) > 1$, toute feuille voisine de S sera de genre ∞ , ce qui est impossible d'après 0c). Donc $g(S) = 1$ et S est un tore; le lemme 2 assure de plus que son groupe d'holonomie linéaire est cyclique. Le lemme de N. Koppel (voir K) assure que $\varphi \rightarrow \varphi'(0)$ est un homomorphisme injectif du groupe d'holonomie de S (commutatif) dans (\mathbb{R}^{+*}, \cdot) , ce qui conclut.

Démonstration du lemme 2. Soit ψ un germe de difféomorphisme hyperbolique représentant une holonomie de S , avec $\psi'(0) = d \in]0, 1[$. Soit I l'intervalle de définition de ψ , identifié à un intervalle de \mathbb{R} avec point-base zéro. On sait, d'après $[S]$, que ψ est C^∞ -conjugué à $(x \rightarrow \alpha x)$. On supposera donc que, pour tout $x \in I$, $\psi(x) = \alpha x$.

Soit $x_0 \in f \cap I$ et soit $\varepsilon > 0$ tel que $f \cap [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] = \{x_0\}$. Notons $a = [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ et $x_n = \psi^n(x_0)$.

1er point. Soit φ un germe d'holonomie de S tel que $\varphi'(0) \in]1 - (\varepsilon/x_0), 1]$. Alors, $\exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, \varphi(x_n) = x_n$. En particulier, $\varphi'(0) = 1$, et l'image de F est cyclique.

En effet, pour $x > 0$ assez voisin de 0, $|\varphi(x) - x|/x \in [0, \varepsilon/x_0]$. Donc, pour n assez grand, $|\varphi(x_n) - x_n|/x_n \in [0, \varepsilon/x_0]$, soit $|\varphi(x_n) - x_n| \in [0, \alpha^n \varepsilon]$, donc $\varphi(x_n) \in \psi^n(a)$; donc $\varphi(x_n) = x_n$ par définition de a .

Alors, si φ est un germe d'holonomie, $\exists p, q \in \mathbb{Z}, p \neq 0, \varphi'(0)^p = \psi'(0)^q$. De plus, $\exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, \varphi^p(x_n) = \psi^q(x_n) = x_{n+q}$.

2e point. Si $g(S) \geq 2$, alors on peut trouver Γ_1, Γ_2 lacets sur S dans le noyau de l'holonomie linéaire, qui se coupent de façon transverse, et en un seul point (on peut de plus imposer que ce point soit le point-base de I).

Alors, d'après le premier point: $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \varphi_{\Gamma_1}(x_n) = \varphi_{\Gamma_2}(x_n) = x_n$, où φ_{Γ_i} est l'holonomie suivant Γ_i .

Alors, pour tout $n \geq n_0$, Γ_1 et Γ_2 se relèvent sur f en deux courbes fermées d'origine x_n qui se coupent en un seul point. Cela suffit à prouver que f est de genre $g(f) \geq 1$. De plus, en changeant le point d'origine x_n , on peut choisir ainsi une famille infinie de couples (disjoints) de courbes se coupant en un seul point. Ainsi, $g(f) = \infty$.

Le lemme 2 est démontré.

2. Feuilles de hauteur finie d'un feuilletage stable à feuilles propres

Supposons désormais que \mathcal{F} est de plus à feuilles toutes propres. L'ensemble des feuilles de \mathcal{F} possède une relation d'ordre définie par: $f \leq g \Leftrightarrow f \subset \bar{g}$ (l'antisymétrie de la relation provient de ce que les feuilles sont propres). (On rappelle qu'une chaîne d'un ensemble ordonné est une partie totalement ordonnée.)

Remarques. 1. Il est clair que pour toute feuille f de \mathcal{F} , on a:

$(f \text{ minimal pour } \leq) \Leftrightarrow (f \cup X \text{ est compact}).$

2. (\mathcal{F}, \leq) est inductif: toute chaîne a possède un minorant; en effet $\bigcap_{f \in a} \bar{f}$ est un compact non vide et non inclus dans X . Il contient donc au moins une feuille, qui est un minorant de a . Le théorème de Zorn entraîne donc: $\forall f \in \mathcal{F}, \exists g \in \mathcal{F}$ minimale pour $\leq, g \leq f$.

Pour toute feuille f de \mathcal{F} , on notera $h(f) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ la hauteur de cette feuille. (On rappelle que la hauteur des feuilles est définie par récurrence:

$h(f) = 0 \Leftrightarrow f$ minimale pour \leq .

$$h(f) = n + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall g \subset \bar{f} \setminus f, & h(g) \leq n \\ \forall i \leq n, & f \text{ n'est pas de hauteur } i \end{cases}$$

$h(f) = +\infty \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, f$ n'est pas de hauteur n .)

LEMME 3. Soit \mathcal{F} un feuilletage à feuilles toutes propres, C^1 -stable, sur une variété compacte M . Alors, $\forall k \in \mathbb{N}$:

a) Les feuilles de hauteur k , non maximales, sont de genre 1, et leur groupe d'holonomie est un groupe cyclique, de générateur hyperbolique. De plus, elles sont en nombre fini.

b) Les feuilles de hauteur k maximales sont de genre 0 et d'holonomie triviale.

Démonstration. D'après le lemme 1, et sous les hypothèses ci-dessus, les feuilles singulières sont de genre 0, sont d'holonomie triviale, et sont maximales pour \leq (il n'y a donc rien à montrer pour elles).

La démonstration se fera par récurrence: Soit S une feuille régulière de hauteur zéro. S est donc une surface compacte et d'après le corollaire du lemme 1, S est une sphère (donc est maximale) ou S est un tore et son groupe d'holonomie est monogène de générateur hyperbolique.

De plus, la famille des feuilles de \mathcal{F} difféomorphes à T^2 est finie: sinon, de même que dans [RR], il y aurait un tore limite d'une suite de feuilles tores (il faut voir que la feuille limite ne peut pas être singulière). Ce tore aura donc son holonomie plate, ce qui n'est pas possible dans un feuilletage stable.

Le lemme est donc montré dans le cas où $k = 0$.

Soit $(T_i)_{i \in I}, I = \{1, \dots, n\}$, la famille des feuilles de \mathcal{F} qui sont des tores. (Remarque: $\forall f \in \mathcal{F}, h(f) = 1 \Rightarrow \bar{f} \setminus f \subset (\bigcup_{i \in I} T_i \cup X)$.)

Il existe un plongement $\pi : (\bigcup_{i \in I} T_i) \times [-1, 1] \hookrightarrow M$ tel que $\pi|_{T_i \times \{0\}} = id_{T_i}$, et tel que \mathcal{F} soit à la fois transverse au facteur $\{x\} \times [-1, 1]$ et au facteur $T_i \times \{t\}$ ($t \neq 0$).

Découpons M suivant les tores $T_i \times \{1\}$ et $T_i \times \{-1\}$. On obtient ainsi un nombre fini de variétés compactes à bord, $\tilde{M}_{1,1}, \dots, \tilde{M}_{1,m}$, dont le bord est composé de tores; ces variétés sont munies de feuilletages $\tilde{\mathcal{F}}_{1,i}$ transverses au bord, et induisant sur chaque composante du bord un 1-feuilletage par cercles. On recolle alors sur chacun des tores, un tore plein $D^2 \times S^1$ feuilleté par $\{D^2 \times \{x\}\}_{x \in S}$, de façon à faire coïncider les deux 1-feuilletages induits sur le bord. On obtient ainsi m variétés $M_{1,1}, \dots, M_{1,m}$ munies de 2-feuilletages C^∞ à singularités de Morse, $\mathcal{F}_{1,1}, \dots, \mathcal{F}_{1,m}$. On voit facilement que les $\mathcal{F}_{1,i}$ sont C^1 -stables à feuilles toutes propres.

Cette construction fournit naturellement une application bijective $p_1 : \mathcal{F} \setminus \{T_i\}_{i \in I} \rightarrow U(\mathcal{F}_{1,g})$ qui préserve les ordres (\leq) de chacun des feuilletages ($p_1(f)$ est définie par: f et $p_1(f)$ coïncident sur $\bigcup_i \tilde{M}_{1,i}$). De plus, on voit facilement que f et $p_1(f)$ ont même genre et même groupe d'holonomie, et que $h(p_1(f)) = \sup(0, h(f) - 1)$. On en déduit immédiatement que, si le lemme est vrai pour les feuilles de hauteur k , il est encore valable pour les feuilles de hauteur $k + 1$, ce qui achève la démonstration.

Nous aurons besoin d'un peu plus par la suite: En itérant le procédé décrit ci-dessus, on construit pour tout $i \in \mathbb{N}$, des variétés compactes $M_{i,1}, \dots, M_{i,m_i}$ munies de feuilletages $\mathcal{F}_{i,j}$, C^1 -stables, à feuilles propres, et une bijection $p_i : \mathcal{F} \setminus \{\text{feuilles non maximales de hauteur } < i\} \rightarrow \bigcup_j \mathcal{F}_{i,j}$ préservant les ordres respectifs des feuilletages, préservant le genre des feuilles et leur groupe d'holonomie, et vérifiant $h(p_i(f)) = \sup(0, h(f) - i)$. De plus, f singulière $\Leftrightarrow p_i(f)$ singulière.

Cantwell et Conlon ont montré dans [CC] que si \mathcal{F} est un feuilletage non singulier sur une variété fermée, et si f est une feuille totalement propre de \mathcal{F} (c'est-à-dire: $\forall g \subset \bar{f}$, g est propre), alors f est de hauteur finie. Il est probable que ce résultat s'étend au cas où \mathcal{F} est à singularités de Morse. Cependant, sous les hypothèses du lemme 3, il y a une démonstration directe de ce résultat.

LEMME 4. *Sous les hypothèses du lemme 3, toute feuille de \mathcal{F} est de hauteur finie.*

Démonstration.

Remarque préliminaire. Pour toute feuille f de hauteur non nulle de \mathcal{F} , $\bar{f} \setminus f$ est un compact non vide, saturé pour \mathcal{F} . D'après le lemme 2, si f est régulière, alors

$(\bar{f} \setminus f) \cap X = \emptyset$; si f est singulière et porte une singularité x_0 , alors $(\bar{f} \setminus f) \cap X = x_0$; x_0 est isolé dans $\bar{f} \setminus f$, et $(\bar{f} \setminus f) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$. Donc, pour toute feuille f de hauteur $h(f) > 0$, $(\bar{f} \setminus f) \setminus X$ est un compact non vide, saturé. On le note k_f . On a, de façon claire, $f \leq g \Rightarrow k_f \subset k_g$.

Démontrons le lemme par l'absurde. Soit $f_0 \in \mathcal{F}$ telle que $h(f_0) = +\infty$. Soit A l'ensemble des chaînes de feuilles de \mathcal{F} de hauteur infinie. L'ensemble A est différent de $\{\emptyset\}$ car $\{f_0\} \in A$; il est ordonné par l'inclusion et (A, \subset) est inductif donc possède un élément maximal a (a est évidemment différent de \emptyset).

Posons $Y_0 = \bigcap_{f \in a} k_f$. C'est un compact, saturé pour \mathcal{F} , non vide, et disjoint de X .

Propriétés de Y_0 .

a) Y_0 est composé de feuilles non maximales de hauteur finie. En effet, soit $f \subset Y_0$, alors $f < a$, donc f n'est pas maximale. De plus, si $h(f) = \infty$, $\{f\} \cup a$ serait une chaîne plus longue que a , ce qui est impossible. Donc $h(f) < \infty$.

b) Pour tout entier i , Y_0 contient une feuille de hauteur i . En effet, regardons $p_i(a) \subset \bigcup_j \mathcal{F}_{i,j}$. C'est une chaîne maximale de feuilles de hauteur infinie car p_i préserve les ordres des feuilletages (en particulier, $\exists j/p_i(a) \subset \mathcal{F}_{i,j}$). L'intersection $\bigcap_{f \in p_i(a)} K_f$ est alors un compact non vide, union de feuilles non maximales de $\mathcal{F}_{i,j}$. Elle contient donc une feuille T difféomorphe au tore T^2 . Soit S la feuille de \mathcal{F} telle que $p_i(S) = T$. alors, $S \subset Y_0$ et $h(S) = i$.

Soit B l'ensemble des compacts non vides de $M \setminus X$ composés de feuilles non maximales de hauteur finie de \mathcal{F} , et contenant au moins une feuille de hauteur i pour tout $i \in \mathbb{N}$. Puisque $Y_0 \in B$, on a $B \neq \emptyset$. Nous affirmons que B , ordonné par l'inclusion, est inductif (toute chaîne est minorée). En effet, soit $(Y_i)_{i \in I}$ une chaîne de B ; alors, $Y = \bigcap_i Y_i$ est un compact non vide de $M \setminus X$, composé de feuilles non maximales de hauteur finie de \mathcal{F} . Pour tout entier k , pour tout $i \in I$, soit y_i^k l'ensemble des feuilles de hauteur k incluses dans Y_i ; cet ensemble est non vide, et est fini d'après le lemme 3. De plus, $(y_i^k)_{i \in I}$ forme une chaîne pour l'inclusion. Cette chaîne est donc stationnaire; notons $y^k = \bigcap_{i \in I} y_i^k$, y^k est donc non vide. D'une façon claire, y^k est l'ensemble des feuilles de Y de hauteur k . On vient de montrer que $Y \in B$, et est donc un minorant de $(Y_i)_{i \in I}$. Ceci prouve que B est inductif.

Nous pouvons donc choisir dans B un élément minimal Z . D'après le lemme 3, l'ensemble des feuilles non maximales de hauteur finie est dénombrable, donc Z est une réunion dénombrable de feuilles. Soit Γ une transversale fermée coupant Z . L'intersection $\Gamma \cap Z$ est un compact dénombrable et possède donc un point isolé x_0 . Soit f la feuille passant par x_0 . Alors, $Z \setminus f$ est compact, et l'on voit facilement que $Z \setminus f \in B$, ce qui contredit la minimalité de Z . Cette contradiction achève la démonstration du lemme 4.

3. Conclusion

COROLLAIRE. Soit \mathcal{F} un feuilletage C^1 -stable, à feuilles toutes propres sur une variété fermée orientable. Soit γ une courbe fermée tangente à \mathcal{F} , et soit φ le germe d'holonomie associé à γ . Alors, φ est hyperbolique ou φ est trival (clair d'après ce qui précède).

THEOREME. Soit M une variété fermée, orientable de π_1 fini. Les seuls feuilletages, transversalement orientables, C^∞ à singularités de Morse, à feuilles toutes propres, C^1 -stables sur M , sont ceux définis par une fonction de Morse à valeurs critiques distinctes, et à surfaces de niveau simplement connexes.

Démonstration. D'après [Hae], proposition 4.2, un feuilletage sur une variété de π_1 fini vérifiant la propriété énoncée au corollaire ci-dessus ne possède aucune transversale fermée. Soit \mathcal{F} vérifiant les hypothèses du lemme 3. \mathcal{F} n'admet aucune transversale fermée. En particulier, toute feuille non singulière est compacte. Or, un ouvert feuilleté par des feuilles compactes n'est stable que si ces feuilles sont des sphères. La fin de la démonstration est alors claire.

REFERENCES

- [CC] J. CANTWEL, and L. CONLON, *Poincaré Bendixon theoric for leaves of codimension one*, Trans. of the Amer. Math. Soc., vol. 265, no. 1 (May 1981), 181–209.
- [Hae] A. HAEFLIGER, *Variétés feuilletées*, Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa, 16 (1962), 367–397.
- [H] G. HECTOR, *Feuilletages en cylindre*, *Geometry and Topology* (Rio), Lecture Notes in Math. vol. 597 (1977), 252–270 (Springer, Berlin).
- [K] N. KOPELL, *Commuting diffeomorphisms*, (*Global Analysis*, Proc. Sympos. Pure Math. vol. XIV, Berkeley, Calif. 1968), Amer. Math. Soc. (1970), 165–184.
- [M] M. P. MULLER, *Sur l'approximation et l'instabilité des feuilletages*.
- [RR] H. ROSENBERG and R. ROUSSARIE, *Some remarks on stability of foliations*, J. Differential Geometry, 10 (1975), 207–219.
- [S] S. STERNBERG, *Local C^n transformation of the real line*, Duke Math. J. 24 (1957), 97–102.

Université de Genève
 Section de Mathématiques
 2–4 rue de Lièvre
 Case Postale 240
 1211 Genève 24

Reçu le 11 octobre 1984