Minimale Erzeugendenanzahl von Moduln.

Comment. Math. Helvetici 67 (1992) 349–362 0010-2571/92/030349-14$1.50 + 0.20/0

Minimale Erzeugendenanzahl von Moduln

KLAUS LANGMANN

Die minimale Erzeugendenanzahl $|M|_R$ eines R-Modules M ist instabil bei treuflachen Ringerweiterungen, sogar schon bei Grundkörpererweiterungen, wie das Beispiel

$$R := \mathbb{Q}[X_1, X_2]/(X_1^2 - 2X_2^2 - 1), \qquad M := (X_1 - 3, X_2 - 2)R$$

zeigt: Denn hier ist $|M|_R = 2$, während $M \otimes \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ von dem einen Element $(X_1 - 3) + \sqrt{2}(X_2 - 2)$ erzeugt wird. Insofern mag Satz 1.3 interessieren, der für treuflache Ringerweiterungen zeigt, daß unter einer Dichtheitsvoraussetzung die minimale Erzeugendenanzahl erhalten bleibt. Damit kann man z.B. funktionentheoretische Ergebnisse von Forster [2] und Grauert [3] auf den algebraischen Fall hinunterdrücken (Folgerung 1.4) und erhält so z.B. Aussagen, daß für bestimmte Lokalisationen vom Polynomring $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ projektive Moduln frei sind (dies ist durchaus nicht für alle Lokalisationen richtig, vgl. das nach 1.4 Gesagte).

In §2 wird die minimale Erzeugendenanzahl für Moduln über Lokalisationen des Polynomrings $K[X_1, \ldots, X_n]$ bei nichtarchimedisch diskret bewertetem Körper K betrachtet. Satz 2.2 zeigt in diesem Fall, daß die globale Erzeugendenanzahl gleich dem Maximum der lokalen Erzeugendenanzahlen ist (womit natürlich auch für diese Ringe projektive Moduln frei sind). Mit Hilfe von Satz 1.3 folgt aus diesem nichtarchimedischen Resultat eine semiglobale Aussage für kohärente Garben $\mathcal{M}$ auf einer über $\bar{\mathbb{Q}}$ definierten Kurve X (wobei $\bar{\mathbb{Q}}$ der algebraische Abschluß von $\mathbb{Q}$ bedeutet): Bezeichnet nämlich h das Maximum der lokalen Erzeugendenanzahlen von $\mathcal{M}$, so gibt es zu jedem festen Zahlkörper K (d.h. $[K: \mathbb{Q}] < \infty$) schon h viele globale Schnitte, die $\mathcal{M}$ in allen K-rationalen Punkten von X erzeugen (Satz 2.3.c). Ist X eine beliebig dimensionale Varietät, so gilt diese Aussage noch für alle Z-ganzen Punkte von X für jede feste endlich erzeugte $\mathbb{Z}$-Algebra Z (Satz 2.3.b). Beide Aussagen haben zahlentheoretischen Charakter; sie werden z.B. falsch, wenn man "K Zahlkörper" durch "$K \supset \mathbb{Q}$ algebraisch" ersetzt.

In §3 schließlich wird die minimale Erzeugendenanzahl eines R-Moduls M im Zusammenhang mit der J-adischen Komplettierung $\hat{R}$ untersucht; mit Hilfe von Satz 1.3 beweisen wir in 3.2, daß zwischen $|M|_R$ und $|M\hat{R}|_{\hat{R}}$ eine enge Verbindung besteht.

An dieser Stelle möchte ich dem Referenten für zahlreiche Hinweise danken.

§1. Erzeugendenanzahl bei Ringerweiterung

Im folgenden seien R, R_1, R_2 etc. stets kommutative Ringe mit 1. Dabei definieren wir

DEFINITION 1.1. Eine Ringerweiterung $R_1 \subset R_2$ heißt "einheitendicht", wenn zu jedem linearen Polynom $P(T) = 1 + \alpha T \in R_2[T]$ und zu jedem $r_2 \in R_2$ ein $r_1 \in R_1$ existiert mit $P(r_2 - r_1) \in R_2^*$.

Die Motivation zu dieser Bezeichnung ergibt sich aus folgendem unmittelbar zu beweisenden

BEISPIEL 1.2. Sei R_2 ein topologischer Ring und $R_1 \subset R_2$ ein Unterring. Enthält die Einheitengruppe R_2^* eine (bezüglich dieser Topologie) offene Menge und ist R_1 dicht in R_2, so ist $R_1 \subset R_2$ "einheitendicht".

Für diese Klasse von Ringerweiterungen bleibt die minimale Erzeugendenanzahl $|M|_R$ erhalten:

SATZ 1.3. *Sei $R_2 \supset R_1$ eine einheitendichte Ringerweiterung. Weiter sei M ein endlich erzeugter R_1-Modul. Dann gibt es einen R_1-Untermodul $\tilde{M} \subset M$ mit* $|\tilde{M}|_{R_1} = |M \otimes R_2|_{R_2}$ und $\tilde{M} \otimes R_2 = M \otimes R_2$.

Ist insbesondere $R_2 \supset R_1$ eine treuflache und einheitendichte Ringerweiterung, so ist $|M|_{R_1} = |M \otimes R_2|_{R_2}$.

Beweis. Sei $M \otimes R_2 = (g_1, \ldots, g_h)R_2$ mit $g_v \in M \otimes 1$ für $1 \leq v \leq h$. Weiter sei $(f_1, \ldots, f_k)$ ein minimales Erzeugendensysthem von $M \otimes R_2$, also mit $k := |M \otimes R_2|_{R_2} \leq h$. Ziel ist es, ein solches minimales Erzeugendensystem $f_1^*, \ldots, f_k^*$ mit $f_i^* \in M \otimes 1$ für $1 \leq i \leqslant k$ zu konstruieren. Dazu schreibe f_i in der Form

$$f_i = \sum_{v=1}^{h} r_{iv} g_v \qquad \text{für } 1 \leq i \leq k$$

mit $r_{iv} \in R_2$. Entsprechend hat g_v die Gestalt

$$g_v = \sum_{u=1}^{k} a_{uv} f_u \qquad \text{für } 1 \leq v \leq h$$

mit $a_{uv} \in R_2$. Wir betrachten das Polynom in den hk vielen Variablen $\{T_{iv}\}_{\substack{1 \le i \le k \\ 1 \le v \le h}}$

$$R((T_{iv})) := \det \left(\delta_{ui} - \sum_{v=1}^{h} a_{uv} T_{iv} \right)_{\substack{1 \le i \le k \\ 1 \le u \le k}}$$

(wobei δ_{ui} das Kroneckersymbol bedeutet). Zeige jetzt allgemein durch Induktion nach m, daß es zu jedem Polynom $Q \in R_2[T_1, \ldots, T_m]$ mit $Q(0) = 1$, welches bei festgehaltenem $T_1, \ldots, T_{i-1}, T_{i+1}, \ldots, T_m$ stets in T_i linear ist, und zu jedem Tupel $(r_1, \ldots, r_m) \in R_2^m$ ein Tupel $(s_1, \ldots, s_m) \in R_1^m$ existiert mit $Q(r_1 - s_1, \ldots, r_m - s_m) \in R_2^*$: Der Fall $m = 1$ folgt aus Definition 1.1. Wenn die Aussage für $m - 1$ richtig ist, so gibt es $(s_1, \ldots, s_{m-1}) \in R_1^{m-1}$ mit $a := Q(r_1 - s_1, \ldots, r_{m-1} - s_{m-1}, 0) \in R_2^*$. Wird jetzt noch einmal 1.1 auf das lineare Polynom $a^{-1}Q(r_1 - s_1, \ldots, r_{m-1} - s_{m-1}, T)$ angewendet, so folgt der Induktionsschritt.

Für unser obiges Polynom $P((T_{iv}))$ heißt dies, daß zu den oben konstruierten Elementen $r_{iv} \in R_2$ für $1 \le i \le R_2$ für $1 \le i \le k$, $1 \le v \le h$ auch Elemente $s_{iv} \in R_1$ existieren mit

$$\det \left(\delta_{ui} - \sum_{v=1}^{h} a_{uv}(r_{iv} - s_{iv}) \right)_{\substack{1 \le i \le k \\ 1 \le u \le k}} \in R_2^*. \tag{$*$}$$

Für diese s_{iv} setze bei $1 \le i \le k$

$$f_i^* := \sum_{v=1}^{h} s_{iv} g_v \in M \otimes 1.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} f_i^* - f_i &= \sum_{v=1}^{h} (s_{iv} - r_{iv}) g_v \\ &= \sum_{v=1}^{h} \left((s_{iv} - r_{iv}) \sum_{u=1}^{k} a_{uv} f_u \right) \\ &= \sum_{u=1}^{k} f_u \left(\sum_{v=1}^{h} a_{uv}(s_{iv} - r_{iv}) \right). \end{aligned}$$

Damit ist für $1 \le i \le k$

$$f_i^* = \sum_{u=1}^{k} f_u \left(\delta_{ui} - \sum_{v=1}^{h} a_{uv}(r_{iv} - s_{iv}) \right).$$

Wegen $(*)$ ist deshalb

$$M \otimes R_2 = (f_1, \ldots, f_k)R_2 = (f_1^*, \ldots, f_k^*)R_2 =: \tilde{M} \otimes R_2.$$

Damit ist die erste Aussage gezeigt. Da bei $R_2 \supset R_1$ treuflach aus $M \otimes R_2 = \tilde{M} \otimes R_2$ schon $M = \tilde{M}$ folgt, ist auch die zweite Aussage bewiesen.

Mit Satz 1.3 können wir insbesondere algebraische Aussagen auf den analytischen Fall zurückführen und bekommen damit bessere Schranken als die allgemeinen algebraischen Abschätzungen [1], Satz 1 (dabei bezeichnet "algebraisch holomorph auf X" *bzw.* "algebraisch auf X" eine Einschränkung eines Polynoms *bzw.* einer rationalen Funktion auf X)

FOLGERUNG 1.4. *Sei $X \subset \mathbb{C}^n$ eine quasiprojektive, im $\mathbb{C}^n$ abgeschlossene Untervarietät. $S \subset X$ sei eine kompakte Menge mit*

$$S = \hat{S}_X := \{x \in X;\ |f(x)| \leq \operatorname*{Max}_{z \in S} |f(z)| \text{ für alle in } X \text{ holomorphen } f\}.$$

(a) *Bezeichnet R den Ring der auf X algebraischen und auf S holomorphen Funktionen*

$$R = R(S) := \left\{\frac{f}{g}\,;\ f, g \textit{ auf } X \textit{ algebraisch holomorph, und } g(z) \neq 0\ \forall z \in S\right\}$$

so gelten für jeden endlich erzeugten R-Modul M die verschärften Forsterschen Abschätzungen

$$|M|_R \leq \operatorname*{Max}_{m \in \operatorname{Max\,Spec} R} [\,|M_m|_{R_m} + n_m(M) - 1],$$

wobei

$$n_m(M) := \operatorname{Max}(1, \dim_m \{\tilde{m} \in \operatorname{Max\,Spec} R;\ |M_{\tilde{m}}|_{R_{\tilde{m}}} \geq |M_m|_{R_m}\}).$$

(b) *Besitzt S eine Umgebungsbasis von zusammenziehbaren Steinschen Mannigfaltigkeiten, so ist jeder endlich erzeugte projektive R-Modul M schon frei.*

Beweis. Ist $J = (f_1, \ldots, f_k)R$ ein echtes Ideal in R mit oBdA in X holomorphen algebraischen Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ und hätten die $f_1, \ldots, f_k$ keine gemeinsame Nullstelle in S, so gäbe es nach [4], 7.2.1 wegen $S = \hat{S}_X$ schon in X holomorphe Funktionen $g_1, \ldots, g_k$ mit $\Sigma_{i=1}^k f_i g_i = 1$. Da wir die g_i auf S beliebig gut durch auf X algebraische holomorphe Funktionen $\tilde{g}_i$ approximieren können, wäre dann

$\Sigma_{i=1}^{k} f_i \tilde{g}_i$ Einheit in R. Damit entspricht Max Spec R der Menge S. (Dies ist für beliebige Mengen S nicht richtig: Ist z.B. $A = \mathbb{C}[X_1, X_2]$ und $S = \mathbb{C}^2 - \{0\}$, so ist $R(S) = A$ und sommit entspricht Max Spec $R(S)$ nicht der Menge S.)

Bezeichnet R_2 den Ring der in einer Umgebung von S holomorphen Funktionen, so ist nach Beispiel 1.2 schon $R_2 \supset R$ einheitendicht. Ferner ist auch $R_2 \supset R$ treuflach ([6], 3.4). Nach 1.3 ist damit $|M|_R = |M \otimes R_2|_{R_2}$. Diese letzte Zahl ist aufgrund der verschärften analytischen Abschätzungen von Forster ([2], 4.6)

$$\leq \operatorname*{Max}_{x \in S} [|M\mathcal{O}_x|_{\mathcal{O}_x} + n_x(M) - 1],$$

wobei $\mathcal{O}$ die analytische Strukturgarbe bedeutet und

$$n_x(M) = \operatorname{Max}(1, \dim_x \{z \in X;\ |M\mathcal{O}_z| \geq |M\mathcal{O}_x|\})$$

ist. Ist dann $\mathfrak{m}$ das dem Punkt z entsprechende Ideal, so ist $\mathcal{O}_z$ treuflach über $R_{\mathfrak{m}}$, woraus die Behauptung folgt.

(b) Wir benutzen das Resultat von Grauert [3], daß bei zusammenziehbaren Steinschen Mannigfaltigkeiten jeder projektive analytische Modul schon frei ist. Damit ist also $M \otimes R_2$ ein freier R_2-Modul. Das bedeutet $|M \otimes R_2|_{R_2} = \operatorname{Rang} M$. Wie oben folgt $|M|_R = \operatorname{Rang} M$, womit M frei ist.

Merkwürdigerweise ist zumindest im Reellen Fall ein 1.4(b) entsprechende Aussage bei nicht kompakten Mengen S nicht richtig: Wie mir F. Ischebeck mitteilte, ist für den zusammenziehbaren Raum $S := \mathbb{R}^3 - H$ (wobei $H \subset \mathbb{R}^3$ eine Halbgerade ist) nicht jeder projektive $R(S)$-Modul frei. Da jeder $A := \mathbb{R}[X_1, X_2, X_3]$ -Modul frei ist, und $R(S)$ eine Lokalisation von A ist, vererbt sich also insbesondere nicht die Eigenschaft "projektiv $\Rightarrow$ frei" auf Lokalisationen von A.

§2. Erzeugendenanzahl bei nichtarchimedisch bewerteten Grundkörpern

Grundlegend für das Weitere ist folgendes

LEMMA 2.1. *Sei $K \supset \mathbb{Q}$ ein nichtarchimedisch diskret bewerteter Körper mit endlichem Restklasenkörper*

$$\bar{k} := \{x \in K;\ |x| \leq 1\}/\{x \in K;\ |x| < 1).$$

Ist dann $U \subset K^n$ ein Polyzylinder

$$U := \{z \in K^n;\ |z_i - a_i| \leq r_i \text{ für } 1 \leq i \leq n\}$$

mit $r_i \in \mathbb{R}_+$ und $a := (a_1, \ldots, a_n) \in K^n$, so gibt es ein Polynom $P \in K[X_1, \ldots, X_n]$ mit

$$0 < |P(z)| \leq 1 \qquad \textit{fur } z \in U$$

$$\alpha^{-1} \leq |P(z)| \qquad \textit{für } z \in K^n - U,$$

wobei

$$\alpha := \max \{|x|; x \in K \textit{ mit } |x| < 1\} < 1$$

ist. Weiter gibt es ein Zahl $s \in \mathbb{N}$, so daß für $x \in K^n$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^s = 0 \Leftrightarrow x = 0. \tag{$*$}$$

Beweis. OBdA $a = (0, \ldots, 0)$ und $r_i = |b_i|$ für $b_i \in K$. Ist $q := \operatorname{ord} \bar{k}^*$, so ist für $t \in K$ mit $|t| = 1$ schon $|t^q - 1| \leq \alpha$. Da die Bewertung nichtarchimedisch ist, gibt es eine Primzahl p mit $|p| \leq \alpha$. Dann folgt aus $|t^q - 1| \leq \alpha$

$$|t^{qp^r} - 1| \leq \alpha^{r+1}. \tag{I}$$

Sei jetzt $m \in \mathbb{N}$ fest und $r \in \mathbb{N}$ so groß, daß für alle Zahlen $k \leq m$ stets $|k| > \alpha^{qp^r} + \alpha^{r+1}$ gilt. Setze dann für $x = (x_1, \ldots, x_m) \in K^m$ und $s := qp^r$

$$g(x) = \sum_{i=1}^{m} x_i^s.$$

Ist $x \neq 0$, so ist nach Umnumerierung der Koordinaten für eine Zahl $1 \leq k \leq m$

$$|x_1| = |x_2| = \cdots = |x_k| > |x_{k+1}| \geq \cdots \geq |x_m|,$$

dann ist nach (I)

$$\left| \sum_{i=1}^{k} (x_i^s - x_1^s) \right| = |x_1|^s \left| \sum_{i=1}^{k} ((x_i/x_1)^s - 1) \right| \leq |x_1|^s \alpha^{r+1}. \tag{II}$$

Weiter ist für $i \geq k + 1$

$$|x_i|^s \leq \alpha^s |x_1|^s. \tag{III}$$

Damit folgt aus (II) und (III)

$$\left|\left(\sum_{i=1}^{m} x_i^s\right) - kx_1^s\right| \leq |x_1|^s(\alpha^s + \alpha^{r+1}). \tag{IV}$$

Nach Konstruktion von r ist der rechte Ausdruck $< |x_1|^s|k|$, woraus

$$\left|\sum_{i=1}^{m} x_i^s\right| = |k| \max_{1 \leq i \leq m} |x_i|^s \tag{V}$$

folgt. Wird hier speziell $m = n + 1$ und $x_i = z_i/b_i$ für $1 \leq i \leq n$ sowie $x_{n+1} = 1$ gesetzt, so folgt, daß das Polynom

$$P(z_1, \ldots, z_n) := 1 + \sum_{i=1}^{n} (z_i/b_i)^s \tag{VI}$$

die gewünschten Bedingungen erfüllt. – Der Zusatz folgt aus (V).

Der Zusatz (*) hat natürlich eine ähnliche Konsequenz wie im reellen Fall die analoge Aussage für $s = 2$. – Der nachstehende Satz 2.2 wird später im Fall "K komplett bewertet" angewandt, da dann schon abgeschlossene und beschränkte Mengen $S \subset X$ kompakt sind. Damit haben wir ein Analogon zu Satz 1.4 mit allerdings besseren Abschätzungen für die minimale Erzeugendenanzahl:

SATZ 2.2. *Sei K ein nichtarchimedisch diskret bewerteter Körper mit endlichem Restklassenkörper. $X \subset K^n$ sei eine abgeschlossene, über K definierte quasiprojektive Untervarietät, $S \subset X$ eine feste Menge. Bezeichne mit*

$$R := R(S) := \left\{\frac{f}{g}\,;\, f, g \text{ sind Einschränkungen auf } X \text{ von Polynomen aus } K[X_1, \ldots, X_n] \text{ mit } g(x) \neq 0 \text{ für } x \in S\right\}.$$

(a) *Ist $S \subset X$ eine kompakte Menge, so gilt für jeden endlich erzeugten R-Modul M die Beziehung*

$$|M|_R = \max_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Max\,Spec} R} |M_{\mathfrak{m}}|_{R_{\mathfrak{m}}}.$$

(b) *Ist* $\dim X = 1$ *und K komplett bewertet, so gilt diese Aussage auch für das nichtkompakte $S = X$.*

Beweis. Aufgrund von Lemma 2.1 (*) hat jedes echte Ideal in R eine Nullstelle in S; und somit haben die maximalen Ideale $\mathfrak{m} \subset R$ die Form

$\mathfrak{m} = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)R$ mit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in S$. Im folgenden identifizieren wir auf diese Weise Max Spec R mit S.

Aussage (a). Da S kompakt ist und da $|M_{\mathfrak{m}}|_{R_{\mathfrak{m}}} \leq h := \mathrm{Max}_{\tilde{\mathfrak{m}}} |M_{\tilde{\mathfrak{m}}}|_{R_{\tilde{\mathfrak{m}}}}$ für alle $\mathfrak{m} \in$ Max Spec R ist, gibt es eine endliche Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von S und Elemente $m_{i1}, \ldots, m_{ih} \in M$ mit

$$MR_{\mathfrak{m}} = (m_{i1}, \ldots, m_{ih})R_{\mathfrak{m}} \qquad \text{für } \mathfrak{m} \in U_i \cap S, \tag{I}$$

wobei die U_i Polyzylinder um gewisse Punkte $a_i \in K^n$ sein sollen. Wegen der nichtarchimedischen Bewertung ist dabei oBdA $U_i \cap U_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Wieder wegen 2.1 (*) entsprechen die maximalen Ideale von $R(U_i \cap S)$ den Punkten aus $U_i \cap S$. Dann folgt aus (I) für alle $i \in I$

$$MR(U_i \cap S) = (m_{i1}, \ldots, m_{ih})R(U_i \cap S). \tag{II}$$

Da alle $m_{ju} \in M$ sind, haben wir damit eine Darstellung für alle Paare $(i, j) \in I \times I$

$$m_{ju} = \sum_{v=1}^{h} r_{ij}^{uv} m_{iv} \qquad \text{für } u \leq h \tag{III}$$

mit gewissen Funktionen $r_{ij}^{uv} \in R(U_i \cap S)$. Dabei können wir für $i = j$ schon $r_{ij}^{uv} = \delta_{uv}$ (=Kroneckersymbol) wählen. Da alle r_{ij}^{uv} auf der kompakten Menge $U_i \cap S$ holomorph sind, gibt es eine Konstante L mit

$$|r_{ij}^{uv}(x)| \leq L \qquad \text{für } x \in U_i \cap S, \quad \text{für } i, j \in I \text{ und } u, v \leq h.$$

Wähle dann nach Lemma 2.1 Polynome $P_i \in K[X_1, \ldots, X_n]$ mit $0 < |P_i(x)| \leq 1$ für $x \in U_i$ und $\alpha^{-1} \leq |P_i(x)|$ für $x \in K^n - U_i$. Wähle weiter $s \in \mathbb{N}$ so groß, daß $\alpha^s L < 1$ ist, und definiere Elemente aus M durch

$$m_u^* := \sum_{j \in I} m_{ju} \prod_{k \in I - \{j\}} (P_k)^s \qquad \text{für } 1 \leq u \leq h.$$

Wir zeigen jetzt, daß $M = (m_1^*, \ldots, m_h^*)R$ ist. Dazu beachten wir, daß bei festem $(i, j) \in I \times I$ für die $h \times h$-Matrix

$$M_{ij} := (r_{ij}^{uv})_{\substack{1 \leq u \leq h \\ 1 \leq v \leq h}}$$

nach (III) die Beziehung (mit t = transponierter Vektor)

$$(m_{j1}, \ldots, m_{jh}) = M_{ij}(m_{i1}, \ldots, m_{ih})^t$$

galt. Also folgt für festes $i \in I$

$$(m_1^*, \ldots, m_h^*) = \left(\prod_{k \in I} (P_k)^s \sum_{j \in I} M_{ij}(P_j)^{-s}\right)(m_{i1}, \ldots, m_{ih})^t. \tag{IV}$$

Bezeichnet für eine Matrix $M = (a_{uv})$ die Matrixnorm $\|M\|$ das Maximum der Normen $|a_{uv}|$, so gilt (da für $x \in U_i \cap S$ nach Konstruktion der Polynome P_j schon $|P_j(x)| \geq \alpha^{-1}$ wegen $U_i \subset K^n - U_j$ ist)

$$\|M_{ij}(x)(P_j(x))^{-s}\| \leq L\alpha^s \qquad \text{für } j \in I - \{i\}, \quad \text{für } x \in U_i \cap S. \tag{V}$$

Für $j = i$ ist $M_{ij}(x)(P_j(x))^{-s}$ das $(P_j(x))^{-s}$-fache der Einheits-matrix, wobei nach Konstruktion von P_j schon $(P_j(x))^{-s} \geq 1$ für $x \in U_i \cap S$ ist. Da $L\alpha^s < 1$ war, folgt aus (V), daß die Matrix $\Sigma_{j \in I} M_{ij}(x)(P_j(x))^{-s}$ für $x \in U_i \cap S$ invertierbar ist. Dann folgt aus (IV)

$$(m_{i1}, \ldots, m_{ih})R_{\mathfrak{m}} = (m_1^*, \ldots, m_h^*)R_{\mathfrak{m}}$$

für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m}$, die den Punkten $U_i \cap S$ entsprechen. Daraus ergibt sich mit (I)

$$MR_{\mathfrak{m}} = (m_1^*, \ldots, m_h^*)R_{\mathfrak{m}}. \tag{VI}$$

Da jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \subset R$ für ein gewisses $i \in I$ einem Punkt aus $U_i \cap S$ entspricht, folgt aus (VI) schon die Behauptung $M = (m_1^*, \ldots, m_n^*)R$.

Aussage (b). Sei $h \geq |M_{\mathfrak{m}}|_{R_{\mathfrak{m}}}$ für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m} \subset R = R(X)$. Wieder wegen 2.1 $(*)$ entsprechen die maximalen Ideal von R den Punkten aus X. Da X eine Kurve ist und da deswegen ein lokales Erzeugendensystem bis auf endlich viele Ausnahmen auch in den übrigen Punkten von X ein Erzeugendensystem bildet, gibt es eine Konstante $\hat{L} \in \mathbb{R}_+$ und Elemente $\overline{m_1}, \ldots, \overline{m_h} \in M$ mit

$$MR_{\mathfrak{m}} = (\overline{m_1}, \ldots, \overline{m_h})R_{\mathfrak{m}} \qquad \text{für alle } \mathfrak{m} \text{ mit } |\mathfrak{m}| > \hat{L} \tag{VII}$$

(wobei für ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ mit $|\mathfrak{m}|$ der Betrag des zugehörigen Punktes aus K^n gemeint ist). Da K komplett diskret bewertet ist, ist $\{x \in X; |x| \leq \hat{L}\}$ kompakt; somit gibt es nach Teil (a) Elemente $\hat{m}_1, \ldots, \hat{m}_h) \in M$ mit

$$MR_{\mathfrak{m}} = (\hat{m}_1, \ldots, \hat{m}_h)R_{\mathfrak{m}} \qquad \text{für alle } \mathfrak{m} \text{ mit } |\mathfrak{m}| \leq \hat{L}. \tag{VIII}$$

OBdA gebe es $r \in K$ mit $|r| = \hat{L}$. Dann definiere für $x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$

$$P(x) = 1 + \sum_{j=1}^{n} (x_j/r)^s,$$

welches für geeignetes $s \in \mathbb{N}$ nach 2.1 (VI) die Bedingung

$$0 < |P(x)| \le 1 \qquad \text{für } x \in X \text{ mit } |x| \le \hat{L} \quad \text{und} \quad |P(x)| \ge \alpha^{-1} \qquad \text{für } x \in X$$

mit $|x| > \hat{L}$ erfüllt. Ferner sind nach 2.1 (V) für großes $|x|$ die beiden Zahlen $|P(x)|$ und $|x|^S$ von gleicher Größenordnung.

Ersetze jetzt im Beweis von Teil (a) die Indexmenge I durch die Menge $I := \{i, 2\}$. Dabei sei $U_1 := \{x \in X; |x| \le \hat{L}\}$, $U_2 := \{x \in X; |x| > \hat{L}\}$, $m_{1v} \equiv \hat{m}_v$ für $1 \le v \le h$, und $m_{2v} \equiv \overline{m_v}$ für $1 \le v \le h$. Die Funktionen r_{ij}^{uv} und die Matrizen M_{ij} definiere wie in Teil (a); die Polynome P_i definiere durch die in R liegenden Elemente $P_1 := P$, $P_2 := \alpha^{-1}P^{-1}$. Dann gilt für gewisse Konstanten $N \in \mathbb{N}$, $L \in \mathbb{R}_+$

$$|r_{21}^{uv}(x)| \le L|P_1(x)|^N \qquad \text{für } x \in U_2 \text{ und } u, v \le h.$$

Damit gilt, wenn $s \gg N$ ist, die (V) entsprechende Abschätzung für $(i,j) = (2, 1)$.

$$\|M_{ij}(x)(P_j(x))^{-s}\| < 1 \qquad \text{für } x \in U_i. \tag{IX}$$

Im Fall $(i,j) = (1, 2)$ wird diese Abschätzung genauso wie (V) hergeleitet (da wie in Teil (a) für $i = 1$ ja U_i kompakt ist), und wie in Teil (a) schließen wir, daß das dort definierte $(m_1^*, \dots, m_h^*)$ ein gewünschtes Erzeugendensystem bildet.

Aus Satz 2.2(b) folgt insbesondere, daß für eine singularitätenfreie Kurve X schon $R(X)$ faktoriell ist. Falls $\dim X > 1$ ist, können wir ähnlich wenigstens noch zeigen, daß jedes Element der Divisorenklassengruppe von $R(X)$ eine endliche Ordnung hat. [Denn wird $p \subset R(X)$ von $(f_1, \dots, f_h)$ erzeugt und ist lokal $pR_{\mathfrak{m}} = f_i R_{\mathfrak{m}}$ für ein von dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ abhängenden Index $i \le h$, so zeigen wir, daß $\Sigma_{i=1}^h (f_i)^s$ das Primideal p^s für geeignetes $s \in \mathbb{N}$ erzeugt.]

Satz 2.2 ist natürlich im wesentlichen nur für komplett bewertete Körper interessant. Aber mit Satz 1.3 können wir diese Aussage auf Moduln über Lokalisationen von $\bar{\mathbb{Q}}[X_1, \dots, X_n]$ herunterdrücken:

SATZ 2.3. *Sei $X \subset \bar{\mathbb{Q}}^n$ eine abgeschlossene quasiprojektive Untervarietät. Mit A bezeichne den Ring aller auf X eingeschränkten Polynome aus $\bar{\mathbb{Q}}[X_1, \dots, X_n]$. Weiter sei M ein fester, endlich erzeugter A-Modul mit*

$$h := \operatorname*{Max}_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Max\,Spec} A} |M_{\mathfrak{m}}|_{A_{\mathfrak{m}}}.$$

Bezeichne für eine feste Teilmenge $T \subset X$ den nach T lokalisierten Ring mit

$$A(T) := \left\{ \frac{f}{g} \,;\, f, g \in A \text{ und } g(x) \neq 0 \text{ für } x \in T \right\}.$$

Dann gilt für jeden Zahlkörper K:

(a) *Ist $S \subset X$ eine bezüglich einer nichtarchimedischen Bewertung beschränkte Menge, so ist*

$$|MA(S \cap K^n)|_{A(S \cap K^n)} \leq h.$$

(b) *Speziell ist für jede endlich erzeugte $\mathbb{Z}$-Algebra $Z \subset K$*

$$|MA(X \cap Z^n)|_{A(X \cap Z^n)} \leq h.$$

(c) *Ist $\dim X = 1$, so gilt sogar*

$$|MA(X \cap K^n)|_{A(X \cap K^n)} \leq h.$$

Beweis Aussage (a). Der Zahlkörper K sei oBdA so groß, daß X über K definiert und daß der A-Modul M über K gegeben ist (d.h. wir haben eine Darstellung $M \simeq A^q/N$, wobei $N \subset A^q$ durch Tupel von über K definierten Funktionen erzeugt wird). Sei dann $m_1, \ldots, m_q$ ein Erzeugendensystem von M über A. Wir betrachten zunächst folgenden Ring:

$$R := R_K(S \cap K^n) := \left\{ \frac{f}{g} \,;\, f \text{ und } g \text{ sind Einschränkungen von Polynomen aus } K[X_1, \ldots, X_n] \text{ mit } \inf_{x \in S \cap K^n} |g(x)| > 0 \right\}.$$

Natürlich ist $R \subset A(S \cap K^n)$. Sei weiter $\hat{K}$ die Kompletierung von K bezüglich der gegebenen nichtarchimedischen Bewertung. Da X durch Gleichungen über K gegeben ist, definieren dieselben Gleichungen eine Untervarietät $\hat{X} \subset \hat{K}^n$. Weiter ist $\hat{K}$ lokalkompakt; also gibt es eine kompakte Menge $\hat{S} \subset \hat{X}$, so daß $S \cap K^n$ in $\hat{S}$ bezüglich der nichtarchimedischen Topologie dicht ist. Dann ist nach Beispiel 1.2 der Ring $R_K(S \cap K^n)$ in dem analog definierten Ring $\hat{R} := R_{\hat{K}}(\hat{S})$ einheitendicht. Ist dann

$$\hat{h} := |(m_1, \ldots, m_q)\hat{R}|_{\hat{R}}, \tag{I}$$

so gibt es nach Satz 1.3 schon $\hat{m}_1, \ldots, \hat{m}_{\hat{h}} \in (m_1, \ldots, m_q)R$ mit

$$(\hat{m}_1, \ldots, \hat{m}_{\hat{h}})\hat{R} = (m_1, \ldots, m_q)\hat{R}. \tag{II}$$

Wir zeigen jetzt $\hat{h} \leq h$: Nach Satz 2.2 gibt es zunächst ein maximales Ideal $\hat{\mathfrak{m}} \subset \hat{R}$, so daß gilt

$$\hat{h} = |(m_1, \ldots, m_q)\hat{R}_{\hat{\mathfrak{m}}}|_{\hat{R}_{\hat{\mathfrak{m}}}}. \tag{III}$$

Nach 2.1 (*) entspricht $\hat{\mathfrak{m}}$ einem Punkt $\hat{a} \in \hat{S}$ (d.h. $\hat{\mathfrak{m}}$ ist das Verschwindungsideal aller Funktionen aus $\hat{R}$ in dem Punkt $\hat{a}$). Sei dann $\tilde{K}$ der algebraische Abschluß von $\hat{K}$ und $\tilde{X} \subset \tilde{K}^n$ die $\hat{X} \subset \hat{K}^n$ entsprechende Varietät. Dann ist auf natürliche Weise $X \subset \tilde{X}$. Wir bezeichen mit $\tilde{\mathcal{O}}$ die Garbe der auf $\tilde{X}$ algebraischen holomorphen Funktionen. Dann ist der lokale Ring $\tilde{\mathcal{O}}_{\hat{a}}$ treuflach über $\hat{R}_{\hat{\mathfrak{m}}}$ (da die entsprechenden Komplettierungen durch Grundkörpererweiterungen hervorgehen). Damit folgt aus (III) die Gleichung

$$\hat{h} = |(m_1, \ldots, m_q)\tilde{\mathcal{O}}_{\hat{a}}|_{\tilde{\mathcal{O}}_{\hat{a}}}. \tag{IV}$$

Nach Umnumerierung der $m_1, \ldots, m_q$ erhalten wir hieraus eine Darstellung

$$\begin{cases} (m_1, \ldots, m_{\hat{h}})\tilde{\mathcal{O}}_{\hat{a}} = (m_1, \ldots, m_q)\tilde{\mathcal{O}}_{\hat{a}} \\ (m_1, \ldots, m_{i-1}, m_{i+1}, \ldots, m_{\hat{h}})\tilde{\mathcal{O}}_{\hat{a}} \subsetneqq (m_1, \ldots, m_q)\tilde{\mathcal{O}}_{\hat{a}} \quad \text{für alle } i \leq \hat{h}. \end{cases} \tag{V}$$

Bezeichne mit $\tilde{\mathcal{J}}_i \subset \tilde{\mathcal{O}}$ die auf $\tilde{X} \subset \tilde{K}^n$ gegebene Idealgarbe

$$\tilde{\mathcal{J}}_i := ((m_1, \ldots, m_{\hat{h}})\tilde{\mathcal{O}} : (m_1, \ldots, m_{i-1}, m_{i+1}, \ldots, m_{\hat{h}})\tilde{\mathcal{O}}).$$

Aus (V) folgt, daß $\hat{a} \in \tilde{Y} := \bigcap_{i=1}^{\hat{h}}$ Träger $\tilde{\mathcal{J}}_i$ ist. Da die Relationen zwischen den Modulelementen m_j schon über $\bar{\mathbb{Q}}$ gegeben sind, ist $\tilde{Y} \subset \tilde{X}$ eine über $\bar{\mathbb{Q}}$ definierte Varietät. Da wir gerade $\tilde{Y} \neq \emptyset$ gezeigt haben, gibt es somit nach dem Hilbertschen Nullstellensatz auch ein $\bar{a} \in \tilde{Y} \cap \bar{\mathbb{Q}}^n$. Für diesen Punkt $\bar{a}$ ist nach Definition von $\tilde{Y}$ also auch

$$\hat{h} = |(m_1, \ldots, m_q)\tilde{\mathcal{O}}_{\bar{a}}|_{\tilde{\mathcal{O}}_{\bar{a}}}. \tag{VI}$$

Andererseits folgt aus der Definition von h wegen $\bar{a} \in Y \cap \bar{\mathbb{Q}}^n \subset X$

$$h \geq |(m_1, \ldots, m_q)\tilde{\mathcal{O}}_{\bar{a}}|\tilde{\mathcal{O}}_{\bar{a}}. \tag{VII}$$

(Hierbei wurde benutzt, daß $\tilde{\mathcal{O}}_{\bar{a}}$ treuflach über dem Ring $A_{\mathfrak{m}}$ ist, wenn $\mathfrak{m}$ das dem Punkt $\bar{a} \in X$ entsprechende maximale Ideal ist.) Aus (VI) und (VII) folgt die behauptete Ungleichung $\hat{h} \leq h$. Dann können wir $\hat{h}$ durch h ersetzen. Da Max Spec $\hat{R} = \hat{S}$ war, erhalten wir also aus (II)

$$(\hat{m}_1, \ldots, \hat{m}_h)\tilde{\mathcal{O}}_x = (m_1, \ldots, m_q)\tilde{\mathcal{O}}_x \tag{VIII}$$

für alle $x \in \hat{S} \subset \tilde{X}$. Wegen $S \cap K^n \subset \hat{S}$ gilt (VIII) erst recht für alle $x \in S \cap K^n$. Wieder nach 2.1(*) entspricht Max Spec $A(S \cap K^n)$ der Menge $S \cap K^n$, und da wieder die entsprechenden lokalen Ringe $(A(S \cap K^n))_{\mathfrak{m}} \subset \mathcal{O}_x$ eine treuflache Erweiterung bilden, folgt aus (VIII) schon

$$(\hat{m}_1, \ldots, \hat{m}_h)A(S \cap K^n) = (m_1, \ldots, m_q)A(S \cap K^n).$$

Dies ist die Behauptung (a). – Aussage (b) folgt sofort aus Teil (a).

Beweis Aussage (c). Nach (VIII) gibt es zu gegebener Konstante $L \in \mathbb{R}_+$ Elemente $\hat{m}_1, \ldots, \hat{m}_h \in M$ mit $(\hat{m}_1, \ldots, \hat{m}_h)\tilde{\mathcal{O}}_x = (m_1, \ldots, m_q)\tilde{\mathcal{O}}_x$ für alle $x \in X \cap \hat{K}^n$ mit $|x| \leq L$. Da jetzt X eine Kurve ist, gibt es für genügend großes L Elemente $\overline{m_1}, \ldots, \overline{m_h} \in M$ mit $(\overline{m_1}, \ldots, \overline{m_h})\tilde{\mathcal{O}}_x = (m_1, \ldots, m_q)\tilde{\mathcal{O}}_x$ für alle $x \in X \cap \hat{K}^n$ mit $|x| \geq L$ (vgl. Beweis 2.2(b)). Entsprechend dem Beweis 2.2(b) kann man daraus $m_1^*, \ldots, m_h^* \in MA(X \cap K^n)$ konstruieren mit $(m_1^*, \ldots, m_h^*) \times A(X \cap K^n) = (m_1, \ldots, m_q)A(X \cap K^n)$.

§3. Erzeugendenanzahl bei Komplettierung

Wir brauchen folgenden

SATZ 3.1. *Sei R ein noetherscher Ring mit* Krulldim $R = d$. *Es sei $J \subset R$ ein Ideal, zu dem es h viele Elemente $g_1, \ldots, g_h \in J$ gibt mit*

$$(g_1, \ldots, g_h)R_{\mathfrak{m}} = JR_{\mathfrak{m}}$$

für alle maximalen Ideal $\mathfrak{m} \subset R$ mit $\mathfrak{m} \supset J$. Dann ist

$$|J|_R \leq \begin{cases} h, & \textit{falls } h > d \textit{ ist} \\ h+1 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. s. [5] Satz 5.17.

FOLGERUNG 3.2. *Sei R ein noetherscher Ring. Ist $J \subset R$ ein Ideal, so bezeichne $\hat{R}$ die J-adische Komplettierung. Dann gilt*:

(a) $|J|_R \leq |J\hat{R}|_{\hat{R}} + 1$.

(b) *Ist* $|J\hat{R}|_{\hat{R}} > \operatorname{Krulldim} R$, *so ist*

$$|J|_R = |J\hat{R}|_{\hat{R}}.$$

(c) *Ist* $J \subset \operatorname{Jac} R := \bigcap_{m \in \operatorname{Max\,Spec} R} m$, *so gilt für jeden R-Modul M*

$$|M|_R = |M\hat{R}|_{\hat{R}}.$$

Beweis. Nach Beispiel 1.2 ist R einheitendicht in $\hat{R}$. Dann folgen die Aussagen (a) und (b) aus Satz 1.3 und 3.1; die Aussage (c) folgt direkt aus Satz 1.3, da jetzt $\hat{R}$ sogar treuflach über R ist.

LITERATUR

[1] FORSTER O. *Über die Anzahl von Erzeugenden eines Ideals in einem noetherschen Ring*. Math. Z. *84*, 80–87 (1964).

[2] FORSTER, O. *Zur Theorie der Steinschen Algebren und Moduln*. Math. Z. *97*, 376–405 (1967).

[3] GRAUERT, M. *Analytische Faserungen über holomorph vollständigen Räumen*. Math. Ann. *135*, 263–273 (1958).

[4] HÖRMANDER, L. *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*. Princeton: Van Nostrand 1966.

[5] KUNZ, E. *Einführung in die kommutative Algebra und algebraische Geometrie*. Wiesbaden: Vieweg 1979.

[6] LANGMANN, K. *Konstruktion globaler Moduln und Anwendungen*. Math. Z. 127, 235–255 (1972).

Mathematisches Institut
Westfälische
Wilhelms-Universität
Einstrasse 62
D-4400 Münster

Received February 6, 1990