Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 69 (1994)

Artikel: Des métriques finslériennes sur le disque à partir d'une fonction distance entre les points.

Autor: Arcostanzo, Marc

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-52258

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helvetici 69 (1994) 229–248 0010–2571/94/020229–20$1.50 + 0.20/0
© 1994 Birkhäuser Verlag, Basel

Des métriques finslériennes sur le disque à partir d'une fonction distance entre les points du bord

MARC ARCOSTANZO

Soit M une variété compacte de bord ∂M. À toute métrique riemannienne g sur M est associée une distance sur M, dont la restriction au bord est notée d_g: la distance $d_g(x, y)$ entre deux points x et y de ∂M est égale à la borne inférieure des longueurs (pour g) des chemins joignant x et y, et il existe en fait entre x et y au moins un chemin qui réalise le minimum de la longueur. Nous noterons

$$\begin{aligned} \mathscr{B} : \mathscr{R}(M) &\to \mathscr{D}(\partial M), \\ g &\mapsto d_g, \end{aligned}$$

l'application définie précédemment, $\mathscr{R}(M)$ et $\mathscr{D}(\partial M)$ désignant respectivement l'ensemble des métriques riemanniennes sur M et l'ensemble des distances sur ∂M. Nous nous intéressons ici au problème suivant: étant donné un élément d de $\mathscr{D}(\partial M)$, existe-t-il $g \in \mathscr{R}(M)$ vérifiant $d_g = d$ et si oui quelles sont toutes les métriques riemanniennes sur M ayant cette propriété?

Remarquons que si Φ est un élément de l'ensemble $\mathscr{D}iff(M, \partial M)$ des difféomorphismes de M dont la restriction au bord est l'identité, alors g et sa métrique image par Φ ont même fonction distance sur le bord: $d_g = d_{\Phi_* g}$. La bonne formulation du problème de l'injectivité de $\mathscr{B}$ est donc:

Question 1 (*unicité*): soit g_0 et g_1 deux éléments de $\mathscr{R}(M)$ vérifiant $d_{g_0} = d_{g_1}$. Peut-on trouver Φ appartenant à $\mathscr{D}iff(M, \partial M)$ vérifiant $\Phi_* g_0 = g_1$?

Si la réponse à cette question est affirmative, la variété riemannienne (M, g_0) est dite *rigide*. Autrement dit, (M, g) est rigide si d_g détermine g de manière unique à isométrie près. Toutes les variétés riemanniennes ne sont pas rigides; la partie I rappelle les principales variétés riemanniennes rigides connues, et donne quelques exemples de variétés riemanniennes non rigides.

À partir de la section II, on se restreint au cas où $M = D$, disque unité fermé de $\mathbb{R}^2$. La section I montre qu'il est raisonnable de conjecturer que (D, g) est rigide si

D est strictement géodésiquement convexe (voir la définition en section I). Il est alors intéressant de caractériser l'image par l'application $\mathscr{B}$, c'est-à-dire de répondre à la

Question 2 (*existence*): soit $d \in \mathscr{D}(\partial D)$; existe-t-il une métrique riemannienne g sur D qui rende D strictement géodésiquement convexe et pour laquelle $d = d_g$?

Avant d'exposer nos résultats, remarquons que la définition de $\mathscr{B}$ s'étend sans modification à des structures de longueur sur D plus générales que les métriques riemanniennes, comme les métriques finslériennes et les espaces de longueur (une définition de ces notions est donnée au début de la partie II). Partant de $d \in \mathscr{D}(\partial D)$, nous construisons ici tous les espaces de longueur (D, δ) vérifiant $\mathscr{B}(\delta) = d$ et pour lesquels D est strictement géodésiquement convexe. Pour cela, nous montrons que la donnée d'un système convenable de courbes Γ sur D détermine un unique espace de longueur (D, δ) vérifiant $\mathscr{B}(\delta) = d$ et dont le système de géodésiques coïncide avec Γ.

Dans le partie II est énoncé un théorème (théorème 1) qui donne une formulation précise de ce résultat. Sa démonstration fait l'objet de la partie III. Puis nous donnons dans la partie IV une expression explicite du prolongement δ à partir des données initiales: distance sur le bord et système de géodésiques. En renforçant les hypothèses de régularité sur ces deux objets, nous montrons que l'espace de longueur obtenu provient en fait d'une métrique finslérienne (continue) sur D, dont nous donnons aussi une expression explicite: c'est le contenu du théorème 2. La partie V donne un critère pour déterminer dans quel cas nous avons affaire à une métrique riemannienne. Enfin, nous traitons des problèmes d'isométries dans le partie VI en montrant comment des choix convenables de systèmes de géodésiques permettent de construire des métriques finslériennes non isométriques ayant même distance sur le bord (théorème 3), ce qui permet d'affirmer que l'application $\mathscr{B}$ étendue aux métriques finslériennes ne peut pas être injective.

I Variétés riemanniennes rigides ou non rigides: des exemples

Rappelons qu'une variété riemannienne compacte à bord (M, g) est dite rigide si:

$$\forall g' \in \mathscr{R}(M), \qquad d_g = d_{g'} \quad \Rightarrow \quad \exists \Phi \in \mathscr{D}iff(M, \partial M) / g' = \Phi_{*g}\,.$$

Il est facile de construire des variétés riemanniennes non rigides: supposons que les géodésiques minimisantes de (M, g) évitent toutes un ouvert U de M; alors une modification adéquate de la métrique g sur U ne modifie pas la distance sur le bord.

On peut donner l'exemple d'une hémisphère (voir figure 1a): la géodésique minimisante entre deux points x et y ne quitte jamais le bord; ou celui de la surface dessinée sur la figure 1b: l'existence d'une géodésique fermée γ assure qu'une géodésique minimisante entre deux points du bord ne traverse jamais la région située à droite de la géodésique fermée γ.

Voici maintenant l'exemple d'une variété riemannienne non rigide, bien que par tout point il passe au moins une géodésique minimisante (cet exemple est inspiré par la section II de l'article [Cr2]): M est le disque de rayon 3 de $\mathbb{R}^2$, muni de la métrique de révolution $ds^2 = dr^2 + f^2(r)\, d\theta^2$, f étant une application à laquelle nous imposons les trois conditions suivantes (voir la figure 2a, où est dessiné le graphe d'une telle fonction):

(i) $f : [0, 3] \mapsto \mathbb{R}_+$ est de classe $\mathscr{C}^1$, $f(x) = x$ pour tout x de $[0, 2]$, et $f(3) = 2$.
(ii) Il existe x_0 élément de $]2, 3[$ tel que f soit strictement croissante sur $[2, x_0]$ et strictement décroissante sur $[x_0, 3]$.
(iii) Pour tout x, $|f'(x)| \leq 1$.

La variété riemannienne ainsi obtenue est notée (M, m_f). La condition (iii) assure que (M, m_f) est isométrique à une surface de révolution plongée dans $\mathbb{R}^3$. Entre deux points suffisament proches de ∂M, le bord reste le chemin de plus courte longueur. Mais cela n'est plus vrai pour deux points quelconques du bord: entre un

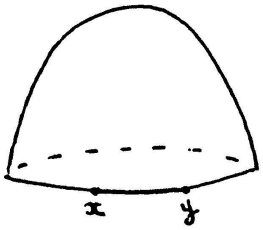

Fig. 1a

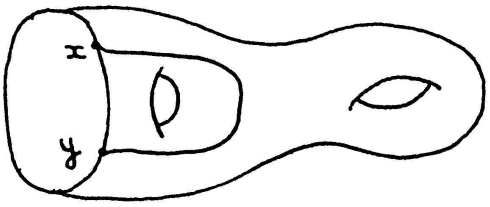

Fig. 1b

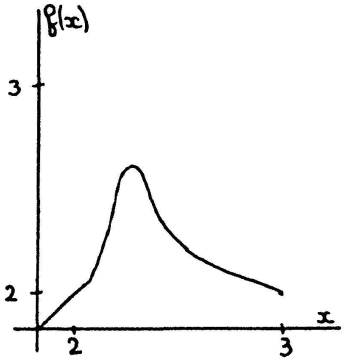

Fig. 2a

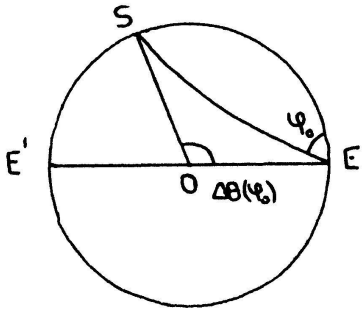

Fig. 2b

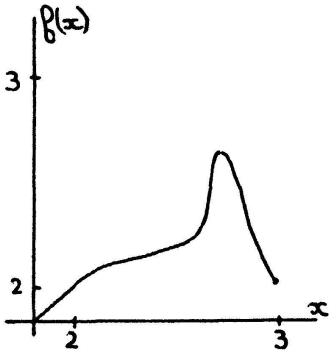

Fig. 2c

point E de ∂M et son symétrique E' par rapport au centre O du disque, la longueur du bord vaut 2π; alors que le segment euclidien qui joint ces deux points a pour longueur 6.

On établit facilement (en intégrant la relation de Clairaut: voir [DC]) qu'une géodésique γ_{φ_0} partant d'un point E du bord en faisant un angle φ_0 avec ∂M passe à une distance $r_{\min} = 2\cos(\varphi_0)$ de O et recoupe le bord en un point dont la différence d'angle polaire avec E (voir figure 2b) est

$$\Delta\theta_f(\varphi_0) = 2\cos(\varphi_0) \int_{r_{\min}}^{3} \frac{dx}{f(x)\sqrt{f^2(x) - \cos^2(\varphi_0)}}.$$

Notons $\ell_f(\varphi_0)$ la longueur de γ_{φ_0}. La formule de la variation première assure que nous avons $\ell_f'(\varphi_0) = 2\cos(\varphi_0)(\Delta\theta_f)'(\varphi_0)$. Comme $\ell_f(\pi/2) = 6$, la connaissance de $\Delta\theta_f$ détermine ℓ_f.

Choisissons maintenant une fonction g soumise aux mêmes conditions que f, mais distincte de f, et qui vérifie de plus $f_*(dx) = g_*(dx)$ (voir un exemple sur la figure 2c). Alors $\Delta\theta_f(\varphi_0)$ et $\Delta\theta_g(\varphi_0)$ coïncident pout tout φ_0, et il en est donc de même pour ℓ_f et ℓ_g. Une géodésique de m_f et une géodésique de m_g partant du même point E en faisant le même angle avec le bord ressortent donc au même point en ayant même longueur. Comme d'autre part le bord a même longueur pour les deux métriques, nous pouvons conclure que $d_{m_f} = d_{m_g}$. Mais (M, m_f) et (M, m_g) ne peuvent pas être isométriques puisque les deux fonctions f et g sont distinctes. Donc (M, m_f) n'est pas rigide.

Il faut donc imposer des restrictions sur le comportement des géodésiques. Nous dirons que M est *strictement géodésiquement convexe* pour g si pour tout couple $(p, q) \in M^2$ avec $p \neq q$, il existe une unique géodésique $\gamma : [0, 1] \to M$ avec $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$, et pour laquelle $\gamma(]0, 1[) \cap \partial M = \varnothing$. Historiquement, l'un des premiers résultats de rigidité est du à R. G. Mukhometov:

THÉORÈME (voir [Mu] ou [La-Ro-Sh] pour $n = 2$, et [Mu-Ro] pour n quelconque). *Soit M un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^n$, à bord différentiable. Soit g_0 et $g_1 \in \mathcal{R}(M)$, avec M strictement géodésiquement convexe pour g_0 et g_1. Supposons que les deux métriques s'écrivent $g_0 = f_0 \sum_{i=1}^n dx_i^2$ et $g_1 = f_1 \sum_{i=1}^n dx_i^2$ avec f_0 et f_1 de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur M. Si $d_{g_0} = d_{g_1}$, alors $g_0 = g_1$.*

Un tel résultat est intéressant en géophysique: il assure que l'on peut déterminer de manière unique la densité de le Terre (c'est-à-dire la fonction f_0) en fonction du temps mis par des ondes sismiques pour se propager entre deux points de la surface (ce qui s'appelle le problème cinématique inverse de la géophysique). Ce résultat a été généralisé au cas où g_0 et g_1 sont toutes les deux conformes à une métrique

riemannienne g (voir [Be]). Le même résultat est démontré sous des hypothèses de convexité plus faibles dans le section III de [Cr2]. Enfin, un théorème analogue pour des métriques finslériennes est énoncé dans [Be-Ge]. Pour des calculs numériques explicites dans un cas simplifié, on pourra consulter [Ro].

Les variétés riemanniennes à courbure constante sont rigides, comme l'a d'abord prouvé R. Michel:

THÉORÈME (voir [Mi] pour le cas strictement géodésiquement convexe; [Gr1, section 5.5B] et [Cr2, section VI] pour le cas général). *Sont rigides les variétés riemanniennes suivantes*:

(a) *Tout ouvert connexe borné à bord régulier du plan hyperbolique* $\mathbb{H}^2$.

(b) *Tout ouvert connexe borné à bord régulier de* $\mathbb{R}^n$ *euclidien.*

(c) *Tout ouvert connexe à bord régulier d'une hémisphère ouverte de* $\mathbb{R}^{n+1}$.

Pour ce qui est des métriques à courbure négative variable, le problème a été traité par J. P. Otal et C. B. Croke (voir [Ge-Na] pour un résultat partiel):

THÉORÈME (voir [Ot] et [Cr1]). *Tout domaine du plan à bord régulier, muni d'une métrique riemannienne à courbure négative ou nulle, est rigide.*

II Une introduction au résultat principal

Dans toute la suite, une métrique finslérienne sur D de classe $\mathscr{C}^k$ est la donnée d'une application $N : TD \to \mathbb{R}$ telle que $N_{|T_pD}$ soit une norme pour tout $p \in D$, et N une application de classe $\mathscr{C}^k$ en tout vecteur non nul. Étant donné une distance δ sur D, (D, δ) est un espace de longueur si pour tout $x, y \in D$, $\delta(x, y)$ est la borne inférieure des longueurs des chemins entre x et y (voir [Gr2] pour plus de détails). Clairement, une métrique riemannienne sur D est un cas particulier de métrique finslérienne, et D muni de la distance associée à une métrique riemannienne ou finslérienne est un espace de longueur.

Le but de cette partie est d'exposer quelques propriétés de la fonction d_g lorsque g est une métrique finslérienne sur D.

DÉFINITION. *Soit* $d \in \mathscr{D}(\partial D)$. *Si* x, y, z *et* t *sont quatre points apparaissant dans cet ordre sur* ∂D, *on définit*

$$\Delta d(x, y, z, t) = d(x, z) + d(y, t) - d(y, z) - d(x, t).$$

Nous dirons que d vérifie la condition $(\geq)$ *si* $\Delta d(x, y, z, t) \geq 0$ *pour tous les quadruplets possibles de points; si de plus il y a inégalité stricte lorsque les quatre points sont deux à deux distincts, nous dirons que* d vérifie la condition $(>)$.

Exemples. La distance sur le bord d_E, associée à la métrique euclidienne sur D, vérifie la condition $(>)$. La 'distance sphérique' d_S, obtenue en considérant ∂D comme un sous-ensemble de la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ euclidien, vérifie la condition $(\geq)$ mais pas la condition $(>)$. Dans la section IV, nous nous servirons du fait suivant: pour tout $\varepsilon > 0$, la distance $d_E + \varepsilon d_S$ vérifie la condition $(>)$.

LEMME. *Si* g *est une métrique finslérienne sur* D, *alors*
(a) d_g *est une fonction continue pour la topologie euclidienne sur* ∂D
(b) d_g *vérifie* $(\geq)$
(c) *si* g *est une métrique finslérienne pour laquelle* D *est strictement géodésiquement convexe, alors* d_g *vérifie* $(>)$.

Preuve. La propriété (a) est évidente. Pour le (b), notons i un point d'intersection d'une géodésique minimisante joignant x à z et d'une géodésique minimisante joignant y à t, comme sur la figure 3 ci dessous. Alors

$$\Delta d(x, y, z, t) = (d(x, i) + d(i, z)) + (d(y, i) + d(i, t)) - d(y, z) - d(x, t)$$

est une quantité positive on nulle, à cause des deux inégalités triangulaires

$$d(y, z) \leq d(y, i) + d(i, z) \quad \text{et} \quad d(x, t) \leq d(x, i) + d(i, t).$$

Si $\Delta d(x, y, z, t) = 0$, les deux inégalités triangulaires doivent être des égalités; on obtient ainsi des géodésiques distinctes dont l'intersection contient plusieurs points,

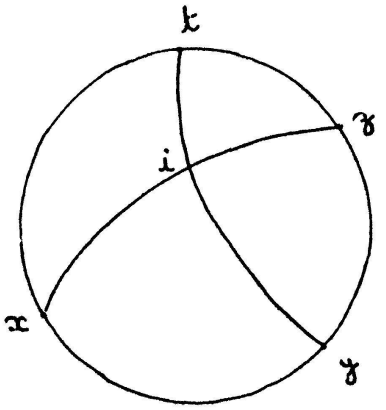

Fig. 3

ce qui est impossible si D est strictement géodésiquement convexe pour g. Ceci prouve le (c).

Application. x et y étant deux points de ∂D, nous appellons θ l'écart d'angle entre x et y, et nous définissons $d_0 \in \mathscr{D}(\partial D)$ par $d_0(x, y) = f(\theta)$ (voir les figures 4a et 4b). La distance d_0 ne vérifie pas ($\geq$), puisque

$$\Delta d_0(x, y, z, t) = 1 + 1 - 2 - 2 < 0$$

pour le choix (x, y, z, t) indiqué la figure 4c. Il n'existe donc pas de métrique finslérienne g sur D avec $d_0 = d_g$.

Remarque. Si g est une métrique finslérienne de classe $\mathscr{C}^2$ sur D, il est connu qu'il existe sur le fibré unitaire tangent de D une mesure positive μ invariante par le flot géodésique, dite *mesure de Liouville*; on montre (*cf.* [O]) que si g est une métrique riemannienne à courbure négative, $\Delta d_g(x, y, z, t)$ n'est autre que la μ-mesure des vecteurs unitaires tangents aux géodésiques dont l'une des extrémités est située entre x et y et l'autre entre z et t, et donc $\Delta d_g(x, y, z, t)$ est bien positif. Dans le partie III, nous tiendrons un raisonnement analogue pour un espace de longueur.

Donnons-nous $d \in \mathscr{D}(\partial D)$. Nous cherchons à prolonger cette distance à D de telle sorte que le résultat soit un espace de longueur. L'idée consiste à imposer a priori les géodésiques du prolongement. Plus précisément:

DÉFINITION. *Notons Δ la diagonale de $\partial D \times \partial D$ et définissons l'ensemble $\mathscr{G} = (\partial D \times \partial D \backslash \Delta)/\sim$, où $\sim$ est la relation d'antipodie: $(x, y) \sim (y, x)$. Un système de courbes admissibles Γ est la donnée, pour tout $(x, y) \in \mathscr{G}$, d'un chemin $\gamma_{x,y}$ qui*

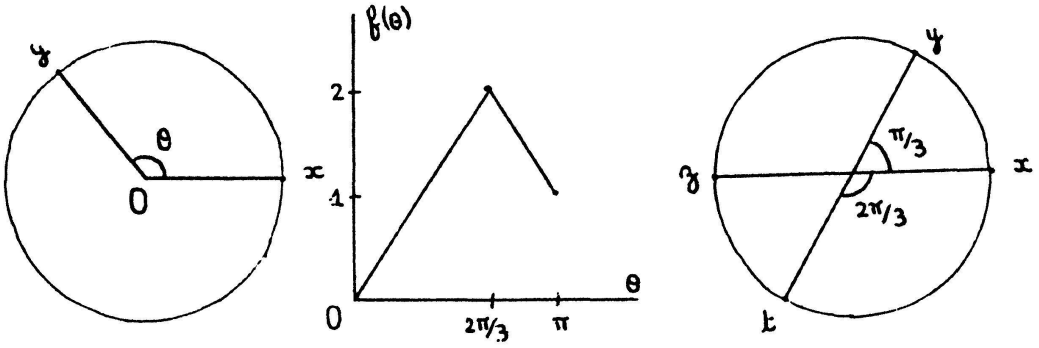

Fig. 4a Fig. 4b Fig. 4c

vérifie les conditions suivantes:

(i) *Pour tout* $(x, y) \in \mathscr{G}$, $\gamma_{x,y}$ *est un arc de classe* $\mathscr{C}^1$ *dans* D *qui rejoint* x *à* y *et n'intersecte* ∂D *qu'en ces deux points.*

(ii) *Tout vecteur non nul de l'intérieur de* D *est tangent à une unique courbe* $\gamma_{x,y}$ *élément de* Γ; *par deux points distincts quelconques de* D, *il passe une unique courbe* $\gamma_{x,y}$ *élément de* Γ.

Exemple. Si $g \in \mathscr{R}(D)$ est à courbure négative ou nulle et si D est convexe pour g, nous pouvons prendre pour $\gamma_{x,y}$ la g-géodésique de x à y. En particulier, le segment euclidien de x à y convient.

Fixons un système de courbes admissibles Γ. Nous voulons exhiber une distance δ sur D dont la restriction à ∂D est d, et qui est une Γ-distance, c'est-à-dire

(a) δ est continue par rapport à la topologie euclidienne sur D.

(b) Si p, q, et r sont trois points pris dans cet ordre sur l'une des courbes $\gamma_{x,y}$ de Γ, alors $\delta(p, r) = \delta(p, q) + \delta(q, r)$.

Lorsqu'une telle distance existe, (D, δ) est clairement un espace de longueur dont les éléments de Γ sont des géodésiques minimisantes. Nous pouvons maintenant énoncer le théorème principal

THÉORÈME 1. *Soit* Γ *un système de courbes admissibles et* $d \in \mathscr{D}(\partial D)$.

(a) *Si* d *ne vérifie pas la condition* $(\geq)$, *alors il n'existe pas de* Γ*-distance* δ *avec* $\mathscr{B}(\delta) = d$.

(b) *Si* d *vérifie la condition* $(\geq)$, *alors il existe au plus une* Γ*-distance* δ *avec* $\mathscr{B}(\delta) = d$.

(c) *Si* d *vérifie la condition* $(>)$, *si* d *est continue sur* $\partial D \times \partial D$ *et de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\partial D \times \partial D \backslash \Delta$, *alors il existe exactement une* Γ*-distance* δ *avec* $\mathscr{B}(\delta) = d$.

III La preuve du théorème

Les Γ-distances possèdent une propriété fondamentale: une représentation en termes de mesures, que nous allons expliciter. Nous munissons Γ de la topologie naturelle obtenue par identification de Γ avec $\mathscr{G}$. Si p et q sont deux points distincts de D, on note $[p, q]$ (respectivement $[p]$) l'ensemble des éléments de $\mathscr{G}$ qui coupent entre p et q l'unique courbe de Γ contenant p et q (respectivement qui contiennent p).

DÉFINITION. $\mathscr{M}$ *est l'ensemble des mesures* μ *sur* Γ *vérifiant les conditions*

suivantes:

(i) *μ est une mesure borélienne positive finie sur les compacts.*

(ii) *Pour tout $p \in D$, $\mu([p]) = 0$.*

(iii) *Pour tout $p, q \in D$ avec $p \neq q$, $\mu([p, q]) > 0$.*

Le résultat qui suit donne un procédé simple pour obtenir une Γ-distance à partir d'un élément de $\mathscr{M}$:

LEMME. *Soit $\mu \in \mathscr{M}$; l'application δ définie par*

$$\forall p \in D,\ \forall q \in D, \qquad \delta(p, q) = \frac{1}{2}\mu([p, q]) \tag{1}$$

est une Γ-distance.

Preuve. Les propriétés de $\mu \in \mathscr{M}$ assurent que δ est bien une distance additive le long des $\gamma_{x,y}$. Pour la continuité de δ, on raisonne ainsi: soit $p \in D$, et (p_n) une suite de D qui converge vers p pour la topologie euclidienne. Nous définissons une suite décroissante d'ensembles mesurables $(\mathscr{A}_n)$ vérifiant $\bigcap_{n \geq 0} \mathscr{A}_n = [p]$ en posant $\mathscr{A}_n = \bigcup_{k \geq n} [p, p_k]$. Or $\mu([p]) = 0$ et donc $\lim \delta(p, p_n) = 0$ puisque $\delta(p, p_n) = \frac{1}{2}\mu([p, p_n]) \leq \frac{1}{2}\mu(\mathscr{A}_n)$.

Toutes les Γ-distances sont en fait obtenues par ce procédé, en vertu du

THÉORÈME (*cf.* [Al] ou [Am]). *Pour toute Γ-distance δ, il existe une unique mesure $\mu \in \mathscr{M}$ telle que* (1) *soit vrai.*

On établit facilement par un calcul combinatoire utilisant (1) qui si x, y, z, et t sont quatre points apparaissant dans cet ordre sur ∂D, alors

$$\Delta\delta(x, y, z, t) = \mu([x, y] \cap [z, t]).$$

Donc les quantités de la forme $\mu([x, y] \cap [z, t])$ ne dépendent que de la restriction de δ à ∂D. Comme les parties de Γ de la forme $[x, y] \cap [z, t]$ engendrent la tribu borélienne de Γ, une mesure μ sur Γ est déterminée de manière unique par les valeurs qu'elle prend sur les ensembles de la forme $[x, y] \cap [z, t]$. En particulier, μ ne dépend que de la restriction de δ à ∂D, ce qui prouve l'assertion (b) du théorème 1 sur l'unicité du prolongement.

D'autre part, la relation $\mu([x, y] \cap [z, t]) = \Delta d(x, y, z, t)$ définit une application μ sur les pavés de la forme $[x, y] \cap [z, t]$, dont il est facile de vérifier l'additivité, et donc le fait qu'elle se prolonge, par un théorème classique (voir par exemple [Me],

théorème 8, page 51), en une mesure borélienne sur Γ, que l'on notera encore μ. Pour achever la preuve du théorème 1, il suffit alors de démontrer le résultat qui suit:

PROPOSITION. *La mesure μ est élément de $\mathscr{M}$, et la Γ-distance qu'elle induit via la formule* (1) *vérifie $\mathscr{B}(\delta) = d$.*

Preuve. Si p est un point de l'intérieur de D et x un point de ∂D, convenons de noter $\sigma(p, x)$ l'unique point de ∂D pour lequel $p \in \gamma_{x,\sigma(p,x)}$. Il est facile de voir que $\sigma(p, \cdot)$ est une application continue.

Soit p et q deux points distincts de D et $\gamma_{x,y}$ la courbe admissible qui les contient. Choisissons $z \in \partial D \backslash \{x, y\}$, la continuité de $\sigma(q, \cdot)$ implique qu'il existe un point z' de ∂D tel que z, z', $\sigma(p, z')$ et $\sigma(q, z)$ soient quatre points deux à deux distincts apparaissant dans cet ordre sur ∂D (voir figure 5a). Comme $[z, z'] \cap [\sigma(p, z'), \sigma(q, z)]$ est inclus dans $[p, q]$, $\mu([p, q]) \geq \Delta d(z, z', \sigma(p, z'), \sigma(q, z)) > 0$ puisque d vérifie la condition $(>)$. Cela prouve la propriété (iii) de $\mathscr{M}$.

Preuve du point (ii): Soit p un point de l'intérieur de D et $I = (a, b)$ un intervalle de ∂D, choisi de telle sorte que les quatre points a, b, $a' = \sigma(p, a)$ et $b' = \sigma(p, b)$ soient deux à deux distincts et apparaissent dans cet ordre sur ∂D. Il suffit de montrer que $\mu(\mathscr{A}) = 0$ avec $\mathscr{A} = \{\gamma \in \Gamma \,/\, p \in \gamma \text{ et } \gamma \in [a, b]\}$. On définit pour cela une suite d'ensembles $(\mathscr{A}_n)_{n \geq 0}$ de la manière suivante: pour $n = 0$, $\mathscr{A}_0$ désigne $[a, b] \cap [a', b']$. Pour tout $n \geq 1$, on partage (a, b) en 2^n sous-intervalles de même longueur euclidienne (x_1, x_2), $(x_2, x_3), \ldots, (x_{2^n}, x_{2^n+1})$ avec $a = x_1$ et $b = x_{2^n+1}$ (voir la figure 5b où est représenté le cas $n = 2$); notons $x'_i = \sigma(p, x_i)$ pour tout i et définissons $\mathscr{A}_n = \bigcup_{1 \leq i \leq 2^n} [x_i, x_{i+1}] \cap [x'_i, x'_{i+1}]$. Il est aisé de vérifier que $(\mathscr{A}_n)$ est une suite décroissante et que $\bigcap_{n \geq 0} \mathscr{A}_n = \mathscr{A}$. Pour assurer que $\mu(\mathscr{A}) = 0$, il suffit

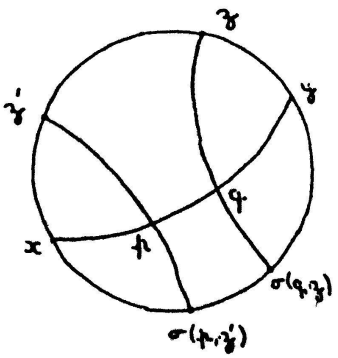

Fig. 5a

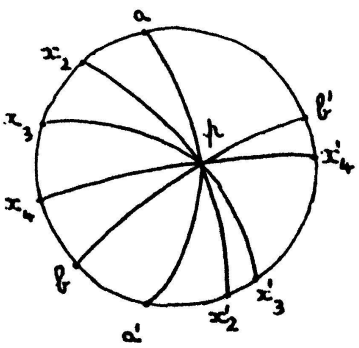

Fig. 5b

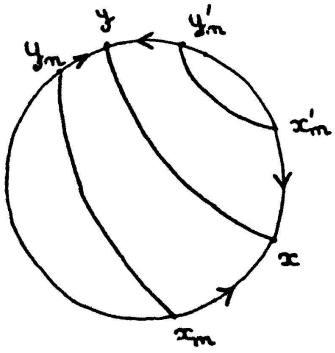

Fig. 5c

donc de montrer que $\lim_{n\to\infty} \mu(\mathscr{A}_n) = 0$. Or par définition même

$$\mu(\mathscr{A}_n) = \sum_{1 \le i \le 2^n} \mu([x_i, x_{i+1}] \cap [x'_i, x'_{i+1}])$$

$$= \sum_{1 \le i \le 2^n} (d(x_i, x'_i) - d(x_{i+1}, x'_i)) + (d(x_{i+1}, x'_{i+1}) - d(x_i, x'_{i+1}))$$

et nous pouvons appliquer le théorème des accroissements finis aux deux fonctions $d(\cdot, x'_i)$ et $d(\cdot, x'_{i+1})$: si ℓ est la longueur euclidienne de $(a, b) \subset \partial D$, il existe pour tout i des points u_i et v_i de l'intervalle $(x_i, x_{i+1}) \subset \partial D$ avec

$$\mu(\mathscr{A}_n) = \sum_{1 \le i \le 2^n} -\frac{\ell}{2^n}\frac{\partial d}{\partial x}(u_i, x'_i) + \frac{\ell}{2^n}\frac{\partial d}{\partial x}(v_i, x'_{i+1}),$$

et donc

$$\mu(\mathscr{A}_n) \le \ell \operatorname*{Max}_{1 \le i \le 2^n} \left| \frac{\partial d}{\partial x}(u_i, x'_i) - \frac{\partial d}{\partial x}(v_i, x'_{i+1}) \right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

puisque la fonction $\partial d/\partial x$ est uniformément continue sur le compact $(a, b) \times (a', b')$.

Pour terminer, vérifions que la Γ-distance δ déterminée par μ en utilisant (1) satisfait bien à $\mathscr{B}(\delta) = d$. Soit x, y deux points distincts de ∂D. Choisissons quatre suites (x_n), (x'_n), (y_n), et (y'_n) de points de ∂D, situés par rapport à x et à y comme l'indique la figure 5c, les deux premières convergeant vers x et les deux autres vers y. Les propriétés de Γ impliquent $\mu([x, y]) = \lim_{n\to\infty} \mu([x_n, y_n] \cap [x'_n, y'_n]) = 2d(x, y)$, puisque $\mu([x_n, y_n] \cap [x'_n, y'_n]) = d(x_n, y'_n) + d(x'_n, y'_n) - d(x_n, x'_n) - d(y_n, y'_n)$ et que d est continue sur $\partial D \times \partial D$. Donc $\delta(x, y) = \frac{1}{2}\mu([x, y]) = d(x, y)$, ce qui termine la démonstration du théorème 1.

Complément. Supposons que $d \in \mathscr{D}(\partial D)$ ne vérifie que la condition ($\ge$), mais que toutes les autres hypothèses du point (c) du théorème 1 sont vraies. Alors le raisonnement de la preuve montre qu'on a existence d'une Γ-distance prolongeant d si l'application δ construite précédemment est une distance. Notons qu'en général, δ n'est qu'une pseudodistance, c'est-à-dire que l'on peut avoir $\delta(x, y) = 0$ même lorsque x et y sont deux points distincts. Considérons par exemple la distance d définie comme dans la partie II par $d(x, y) = f(\theta)$, avec f comme sur la figure suivante. Prenons pour Γ le système de courbes admissibles pour lequel $\gamma_{x,y}$ est le segment euclidien de x à y. Si p est un point suffisament proche de O, alors $\delta(0, p) = 0$ car si x, y, z et t sont quatre points de ∂D avec $[x, y] \cap [z, t] \subset [O, p]$,

$\Delta d(x, y, z, t) = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$ et donc $\mu([0, p]) = 0$.

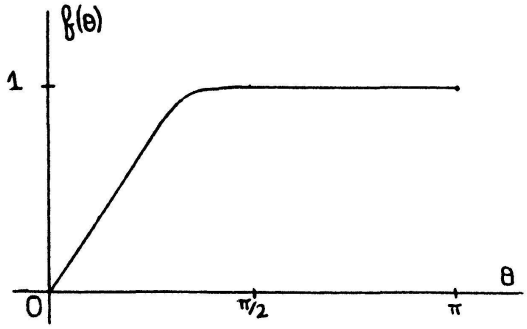

Fig. 6a

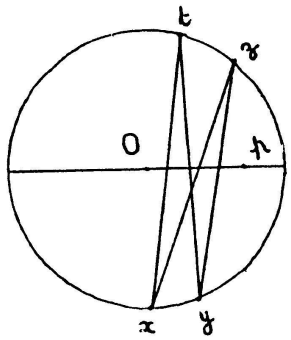

Fig. 6b

Remarque. Dans tout ce paragraphe, Γ est le système de courbes admissibles pour lequel $\gamma_{x,y}$ est le segment euclidien de x à y. La théorème 1 s'applique pour le choix $d = d_E$ (la distance euclidienne), et conduit à la distance euclidienne δ_E sur D. Nous allons donner l'exemple de $d \in \mathscr{D}(\partial D)$ qui vérifie la condition ($>$), qui est continue, mais pour laquelle la conclusion du théorème est fausse. La distance 'sphérique' d_S vérifie la condition ($\geq$), mais la mesure μ_S qu'elle engendre sur Γ via la formule (1) n'est pas élément de $\mathscr{M}$: si O est le centre du disque et $\mathscr{A} = \Gamma \backslash [O]$, on constate que $\mu_S(\mathscr{A}) = 0$, et donc que $\mu_S([O]) > 0$. Par suite, $\delta_S(O, O) = \frac{1}{2}\mu_S([O]) > 0$, et δ_S n'est pas une distance. Posons maintenant $d_\varepsilon = d_E + \varepsilon d_S \in \mathscr{D}(\partial D)$, avec $\varepsilon > 0$ quelconque. Alors $\delta_\varepsilon = \delta_E + \varepsilon\delta_S$ n'est pas une distance. Cet exemple montre que la condition 'd de classe $\mathscr{C}^1$' ne peut pas être supprimée dans la liste des hypothèses.

IV Des métriques finslériennes

Nous allons maintenant établir une expression plus explicite de δ en fonction de d et de Γ. Soit p et q deux points de l'intérieur de D. Il leur correspond un unique couple $(x, y) \in \partial D \times \partial D$ avec $p \in \gamma_{x,y}$, $q \in \gamma_{x,y}$ et p situé entre q et x sur $\gamma_{x,y}$. Notons $\partial D(x, y)$ l'ensemble des points de ∂D situés entre x et y.

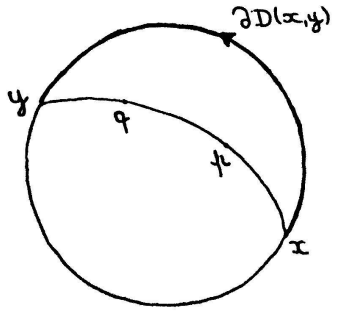

Fig. 7b

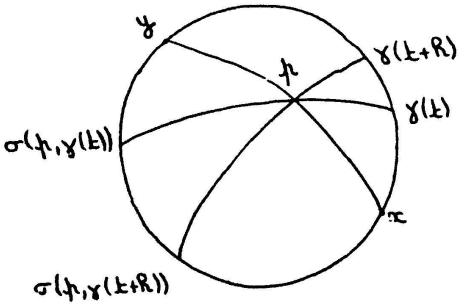

Fig. 7a

PROPOSITION. *Pour la distance δ définie par le théorème* 1,

$$\delta(p, q) = \frac{1}{2} \int_{\partial D(x,y)} \frac{\partial d}{\partial x}(t, \sigma(p, t)) - \frac{\partial d}{\partial x}(t, \sigma(q, t))\, dt.$$

Preuve. Estimons tout d'abord $\delta(x, p)$. Soit $\gamma : [0, L] \to \partial D$ une paramétrisation de $\partial D(x, y)$ avec $\gamma(0) = x$, $\gamma(L) = y$ et $\gamma'(t)$ de norme euclidienne 1 pour tout $t \in [0, L]$. Notons $f(t)$ la mesure des géodésiques qui coupent $\gamma_{x,y}$ entre x et p et qui ont une extrémité sur $\partial D(x, y)$ entre x et $\gamma(t)$; autrement dit $f(t) = \mu([x, p] \cap [x, \gamma(t)])$. Soit $h > 0$ avec $0 \leq t < t + h \leq L$. Les propriétés des courbes admissibles assurent que

$$[\gamma(t), \gamma(t+h)] \cap [x, \sigma(p, \gamma(t+h))] \subset [\gamma(t), \gamma(t+h)] \cap [x, p]$$
$$\subset [\gamma(t), \gamma(t+h)] \cap [x, \sigma(p, \gamma(t))],$$

d'où, en calculant les mesures de ces trois ensembles, les deux inégalités

$$d(x, \gamma(t+h)) - d(x, \gamma(t)) + d(\gamma(t), \sigma(p, \gamma(t+h))) \leq f(t+h) - f(t)$$

et

$$f(t+h) - f(t) \leq d(\gamma(t), \sigma(p, \gamma(t))) - d(\gamma(t+h), \sigma(p, \gamma(t)))$$
$$+ d(\gamma(t+h), x) - d(\gamma(t), x).$$

Il en résulte que $f'(t) = \partial d/\partial x\,(\gamma(t), x) - \partial d/\partial x\,(\gamma(t), \sigma(p, \gamma(t)))$. Comme d'une part $f(0) = 0$ et d'autre part $\delta(x, p) = \frac{1}{2}\mu([x, p]) = \frac{1}{2}f(L)$, il vient

$$\delta(x, p) = \frac{1}{2} d(x, y) - \frac{1}{2} \int_0^L \frac{\partial d}{\partial x}(\gamma(t), \sigma(p, \gamma(t)))\, dt.$$

Le résultat de la proposition provient d'une formule analogue pour $\delta(x, q)$ et du fait que $\delta(p, q) = \delta(x, q) - \delta(x, p)$.

En renforçant les hypothèses sur le système de courbes admissibles et la fonction distance sur le bord, le théorème 1 fournit en fait une distance associée à une métrique finslérienne sur D: c'est le contenu du théorème 2. Avant de l'énoncer, nous allons l'introduire par quelques remarques.

Tout d'abord, soit $d \in \mathscr{D}(\partial D)$, supposée de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\partial D \times \partial D \backslash \Delta$. Si x, y, z et t sont quatre points pris dans cet ordre sur ∂D, il vient

$$\Delta d(x, y, z, t) = \int_x^y \int_z^t \frac{\partial^2 d}{\partial x\, \partial y}(u, v)\, du\, dv,$$

et donc d vérifie la condition ($\geq$) si et seulement si $\partial^2 d/\partial x\, \partial y$ est une application positive on nulle. Si de plus $\partial^2 d/\partial x\, \partial y > 0$ en tout point, alors d vérifie la condition ($>$).

Soit maintenant Γ un système de courbes admissibles. Pour tout vecteur u non nul de D, nous noterons $a(u)$ et $b(u)$ les points de ∂D qui sont les extrémités de la courbe élément de Γ tangente à u, comme sur la figure 8a. Nous dirons que Γ vérifie la condition ($\mathscr{C}$) si

(a) l'application $\sigma : \mathrm{int}(D) \times \partial D \to \partial D$ est de classe $\mathscr{C}^1$.
(b) pour tout $m \in \mathrm{int}(D)$, pour tout $u \in T_m D$ non nul, $D_1\sigma(m, t) \cdot u$ ne s'annule que si $t = a(u)$ ou $t = b(u)$.

Si g est une métrique riemannienne de classe $\mathscr{C}^\infty$ définie dans un voisinage de D, sans points conjugués, et pour laquelle D est strictement convexe, alors le système de géodésiques Γ associé à g vérifie la condition ($\mathscr{C}$). En effet, si $D_1\sigma(m, t) \cdot u$ s'annulait pour $t \notin \{a(u), b(u)\}$, alors les géodésiques passant par t et m', lorsque m' décrit une courbe passant par m et tangente à u, définiraient une variation de la géodésique γ passant par m et t, comme sur la figure 8b; variation dont le champ de Jacobi associé s'annulerait au point t (puisque toutes les courbes passent par t) et au point $\sigma(m, t)$ (en vertu de $D_1\sigma(m, t) \cdot u = 0$), ce qui contredirait l'hypothèse que g est sans points conjugués.

Donnons par contre un exemple pour laquelle la condition ($\mathscr{C}$) n'est pas vérifiée. Pour cela, soit F l'application ainsi définie: si $z = r \exp(i\Theta) \in D$, alors $F(z) =$

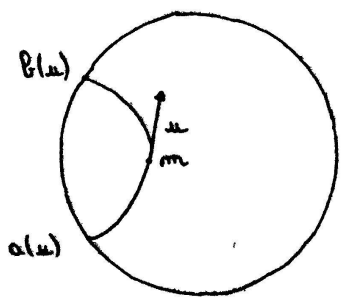

Fig. 8a

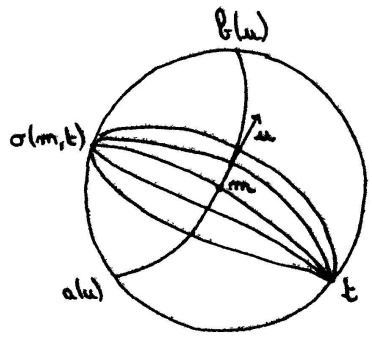

Fig. 8b

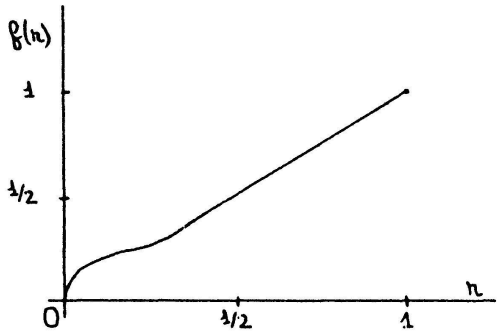

Fig. 9a

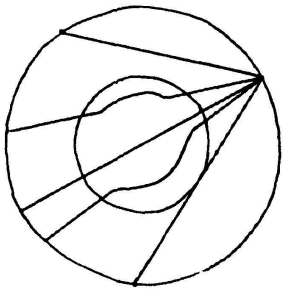

Fig. 9b

$f(r)\exp(i\Theta)$, le graphe de f étant tracé sur la figure 9a. Définissons un système de courbes admissibles Γ ainsi: pour tout $(x, y) \in \mathscr{G}$, $\gamma_{x,y}$ est l'image par l'application F du segment euclidien qui joint x à y. Quelques courbes admissibles $\gamma_{x,y}$ sont traçées sur la figure 9b. Il est clair que $D_1\sigma(O, t) \cdot u$ s'annule pour tout vecteur u basé au point O et tout point t de ∂D.

La condition (b) exprime le fait que pour tout point $x \in \partial D$, l'application qui au couple $(y, d) \in \partial D \times \mathbb{R}_+$ avec $x \neq y$ et $0 < d < d(x, y)$ associe le point situé sur la courbe admissible $\gamma_{x,y}$ à une distance d de x est une application différentiable. Et cette condition de différentiabilité n'est pas satisfaite dans l'exemple ci-dessus.

THÉORÈME 2. *Soit $d \in \mathscr{D}(\partial D)$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\partial D \times \partial D \backslash \Delta$, avec $\partial^2 d/\partial x\, \partial y > 0$; et Γ un système de courbes admissibles pour lequel σ est différentiable. Alors l'application $N : TD \to \mathbb{R}$ définie par*

$$N(u) = \frac{1}{4}\int_{\partial D} \frac{\partial^2 d}{\partial x\, \partial y}(s, \sigma(p, s))\,|D_1\sigma(p, s) \cdot u|\, ds$$

pour $u \in T_pD$ est une application continue, sa restriction à chaque espace tangent est une semi-norme, et elle vérifie $\mathscr{B}(N) = d$.
Si de plus Γ vérifie la condition $(\mathscr{C})$ et si $\partial^2 d/\partial x\, \partial y > 0$ en tout point, alors N définit une métrique finslérienne continue pour laquelle $\mathscr{B}(N) = d$.
De plus, il suffit que d soit de classe $\mathscr{C}^{k+2}$ et σ de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ pour que la métrique finslérienne obtenue soit de classe $\mathscr{C}^k$.

Si nous choisissons pour d la distance euclidienne, nous obtenons immédiatement (à comparer avec [Bu], theorem 11.2) le

COROLLAIRE. *Tout système de courbes admissibles Γ vérifiant la condition $(\mathscr{C})$ est le système de géodésiques d'une certaine métrique finslérienne continue sur D.*

Preuve. Soit p un point de l'intérieur de D et $u \in T_pD$ un vecteur unitaire. À u est associé un unique couple $(x, y) \in \mathscr{G}$ avec u tangent à $\gamma_{x,y}$. Donnons nous $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to D$ une paramétrisation de $\gamma_{x,y}$ au voisinage de p, avec $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = u$, et $\gamma'(t)$ unitaire pour tout t. La proposition précédente donne, pour $t \geq 0$

$$\delta(p, \gamma(t)) = \frac{1}{2} \int_{\partial D(x,y)} \frac{\partial d}{\partial x}(s, \sigma(p, s)) - \frac{\partial d}{\partial x}(s, \sigma(\gamma(t), s))\, ds.$$

Les hypothèses faites sur Γ assurent que l'application $t \mapsto \delta(p, \gamma(t))$ est dérivable à droite en $t = 0$, de dérivée

$$\begin{aligned} N(u) &= -\frac{1}{2} \int_{\partial D(x,y)} \frac{\partial^2 d}{\partial x\, \partial y}(s, \sigma(p, s))\, D_1\sigma(p, s) \cdot u\, ds \\ &= \frac{1}{2} \int_{\partial D(x,y)} \frac{\partial^2 d}{\partial x\, \partial y}(s, \sigma(p, s)) |D_1\sigma(p, s) \cdot u|\, ds, \end{aligned}$$

car $D_1\sigma(p, s) \cdot u < 0$. D'autre part, on établit comme dans la proposition précédente que, pour $t \geq 0$

$$\delta(p, \gamma(t)) = \frac{1}{2} \int_{\partial D(y,x)} \frac{\partial d}{\partial x}(s, \sigma(\gamma(t), s)) - \frac{\partial d}{\partial x}(s, \sigma(p, s))\, ds,$$

d'où

$$\begin{aligned} N(u) &= \frac{1}{2} \int_{\partial D(y,x)} \frac{\partial^2 d}{\partial x\, \partial y}(s, \sigma(p, s))\, D_1\sigma(p, s) \cdot u\, ds \\ &= \frac{1}{2} \int_{\partial D(y,x)} \frac{\partial^2 d}{\partial x\, \partial y}(s, \sigma(p, s)) |D_1\sigma(p, s) \cdot u|\, ds. \end{aligned}$$

En prenant la demi-somme des expressions de $N(u)$, nous trouvons

$$N(u) = \frac{1}{4} \int_{\partial D} \frac{\partial^2 d}{\partial x\, \partial y}(s, \sigma(p, s)) |D_1\sigma(p, s) \cdot u|\, ds.$$

Les hypothèses faites sur d et sur Γ assurent qu'il s'agit bien d'une norme sur chaque espace tangent, et que l'application $u \in TD \mapsto N(u)$ est continue. D'autre part, il est clair par définition même de N que la distance associée à cette métrique finslérienne est δ.

V Des métriques riemanniennes

Dans toute cette partie, nous fixons un système de courbes admissibles Γ sur D et $d \in \mathscr{D}(\partial D)$. Nous supposons que les hypothèses du théorème 2 sont vérifiées, et donc qu'il existe sur D une métrique finslérienne N pour laquelle $\mathscr{B}(N) = d$. Nous établissons dans cette partie un critère qui permet de déterminer quand N est en fait une métrique riemannienne sur D.

Soit x_0 un point de ∂D. Introduisons un système de coordonnées polaires basé en x_0: un point m de l'intérieur de D est repéré par les coordonnées $x_1 = \delta(x_0, m) \in \mathbb{R}_+$ et $x_2 = \sigma(m, x_0) \in \partial D$. Un tel choix induit alors sur $T_m D$ un système de coordonnées. Notons G le carré de la norme du vecteur e_2 de $T_m D$ de coordonnées $(0, 1)$.

PROPOSITION. *N est une métrique riemannienne sur D à la condition nécessaire et suffisante que, pour tout vecteur $u = (p_1, p_2)$ de $T_m D$:*

$$\int_{a(u)}^{b(u)} \frac{\partial^2 d}{\partial x\, \partial y}(t, \sigma(m, t))\, D_1 \sigma(m, t) \cdot \left(p_2, \frac{-p_1}{\sqrt{G}}\right) dt = 0.$$

Preuve. Si N est dans $\mathscr{R}(D)$, alors ce système de coordonnées polaires est orthogonal et nour pouvons écrire:

$$\forall u = (p_1, p_2) \in T_m(D), \qquad N_m^2(u) = p_1^2 + G p_2^2, \tag{1}$$

et réciproquement la condition (1) est clairement suffisante pour que la norme $N_m = N_{|T_m D}$ dérive d'un produit scalaire. Désignons par u_θ le vecteur de $T_m D$ de coordonnées $(\cos(\theta), \sin(\theta)/\sqrt{G})$. Par linéarité, la condition (1) se réduit à:

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad N_m(u_\theta) = 1.$$

Cette relation étant clairement vérifiée pour $\theta = 0$, il suffit donc d'exprimer que la dérivée du membre de gauche est identiquement nulle, soit:

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad \sin(\theta) \frac{\partial N_m}{\partial x}(u_\theta) - \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{G}} \frac{\partial N_m}{\partial y}(u_\theta) = 0.$$

Nous connaissons une expression explicite de la norme (*cf.* section précédente):

$$N_m(u) = -\frac{1}{2} \int_{a(u)}^{b(u)} \frac{\partial^2 d}{\partial x\, \partial y}(t, \sigma(m, t))\, D_1 \sigma(m, t) \cdot u\, dt.$$

La condition précédente s'écrit donc:

$$\forall\theta \in \mathbb{R}, \qquad -\frac{1}{2}\int_{a(u_\theta)}^{b(u_\theta)} \frac{\partial^2 d}{\partial x\,\partial y}(t, \sigma(m, t))\, D_1\sigma(m, t) \cdot \left(\sin(\theta), -\frac{\cos(\theta)}{\sqrt{G}}\right) dt = 0.$$

Comme tout vecteur $u \in T_m D$ est un multiple d'un certain u_θ, la proposition est démontrée.

Remarque. Si nous avons effectivement une métrique riemannienne sur D, les calculs précédents montrent immédiatement que le produit scalaire associé sur $T_m D$ est donné par:

$$\forall u, v \in T_m D, \qquad \langle u, v\rangle = -\frac{1}{2} N_m(u) \int_{a(u)}^{b(u)} \frac{\partial^2 d}{\partial x\,\partial y}(t, \sigma(m, t))\, D_1\sigma(m, t) \cdot v\, dt.$$

VI Problèmes d'isométries

Soit d une distance sur ∂D vérifiant les hypothèses du théorème 1. Le résultat qui suit assure qu'à deux systèmes de courbes distincts Γ_1 et Γ_2 correspondent via le théorème 1 deux distances δ_1 et δ_2 sur D qui sont distinctes.

LEMME. *Soit d une distance sur ∂D qui vérifie la condition $(>)$ et Γ un système de courbes admissibles. Supposons qu'il existe une Γ-distance sur D qui prolonge d; alors entre deux points distincts x et y de D il existe un unique chemin minimisant et c'est la courbe admissible de Γ qui passe par ces deux points.*

Preuve. Il suffit d'examiner le cas particulier où x et y sont éléments de ∂D, le cas général s'en déduisant immédiatement; $\gamma_{x,y}$ est alors un chemin minimisant entre x et y. Soit p un point de D qui n'est pas sur $\gamma_{x,y}$. Comme $\sigma(p, x) \neq y$, la continuité de $\sigma(p, \cdot)$ assure qu'il existe un point z de ∂D tel que les quatre points x, z, $\sigma(p, z)$ et y (ou y, $\sigma(p, z)$, z et x) soient deux à deux distincts et apparaissent dans cet ordre sur ∂D. Comme d vérifie la condition $(>)$, $\mu(\mathscr{E}_1) > 0$, avec $\mathscr{E}_1 = [x, z] \cap [y, \sigma(p, z)]$. Si $\mathscr{E}_2$ désigne $[x, p] \cap [p, y]$, on a clairement $\mathscr{E}_1 \subset \mathscr{E}_2$, donc $\mu(\mathscr{E}_2) > 0$; d'autre part, $\delta(x, p) + \delta(p, y) = \delta(x, y) + \frac{1}{2}\mu(\mathscr{E}_2)$, donc tout chemin passant par x, y et p a une longueur strictement supérieure à $\delta(x, y)$; d'où la conclusion.

Il reste à déterminer quand ces deux distances sont isométriques, c'est-à-dire déterminer quand il existe un homéomorphisme Φ de D dont la restriction à ∂D est l'identité et qui vérifie $\forall p, q \in D$, $\delta_1(p, q) = \delta_2(\Phi(p), \Phi(q))$.

DÉFINITION. *Deux systèmes de courbes admissibles Γ_1 et Γ_2 sont équivalents s'il existe un homéomorphisme Ψ de D dont la restriction à ∂D est l'identité et pour lequel on a $\forall x, y \in \partial D$ avec $x \neq y$, $\Psi(\gamma^1_{x,y}) = \gamma^2_{x,y}$.*

LEMME. *δ_1 et δ_2 sont isométriques si et seulement si Γ_1 et Γ_2 sont équivalents.*

La démonstration est immédiate si l'on remarque que, d'après le lemme précédent, $\gamma^i_{x,y} = \{z \in D / \delta_i(x, y) = \delta_i(x, z) + \delta_i(z, y)\}$ pour $i = 1$ et 2.

Pour obtenir des distances non isométriques, il faut donc construire des systèmes de courbes non équivalents, ce qui est possible grâce au résultat suivant:

THÉORÈME (de Beltrami, voir [Sp]). *Soit U un ouvert du plan muni d'une métrique riemannienne g; s'il existe $\Phi : U \to \Phi(U) \subset \mathbb{R}^2$ qui envoie toute g-géodésique de U sur un segment de droite euclidienne dans $\Phi(U)$, alors g est à courbure constante.*

Munissons D d'une métrique riemannienne g à courbure négative ou nulle mais non constante, et pour laquelle D est convexe. Définissons un système de courbes admissibles Γ_1 en prenant pour $\gamma_{x,y}$ la g-géodésique de x à y. Construisons un système de courbes admissibles Γ_2 par le même procédé, mais en prenant pour g la métrique euclidienne. D'après le théorème précédent, Γ_1 et Γ_2 ne sont pas équivalents. Cela prouve le

THÉORÈME 3. *Soit d une distance sur ∂D.*

(a) *Si d vérifie la condition $(>)$ et si d est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\partial D \times \partial D \backslash \Delta$, alors il existe deux espaces de longueur non isométriques (D, δ_1) et (D, δ_2) pour lesquels $\mathscr{B}(\delta_1) = \mathscr{B}(\delta_2) = d$.*

(b) *Si d est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\partial D \times \partial D \backslash \Delta$ avec $\partial^2 d / \partial x\, \partial y > 0$, alors il existe sur D deux métriques finslériennes N_1 et N_2 avec $\mathscr{B}(N_1) = \mathscr{B}(N_2) = d$ pour lesquelles (D, N_1) et (D, N_2) ne sont pas isométriques.*

Exemple. Prenons pour d la distance euclidienne. Alors il existe sur D une métrique finslérienne N non isométrique à la métrique euclidienne sur D et vérifiant $\mathscr{B}(N) = d$. De plus, on peut affirmer que N n'est pas une métrique riemannienne en vertu du résultat d'Otal rappelé dans la section I.

BIBLIOGRAPHIE

[Al] ALEXANDER R., *Planes for which the lines are the shortest paths between points*, Illinois J. Math., *22* (1978), 177–190.

[Am] AMBARTZUMIAN R. V., *A note on pseudometrics on the plane*, Z. Wahrsch. verw. Geb., *37* (1976), 145–155.

[Be] BEILKYN G. YA., *Stability and uniqueness of the solution of the inverse kinematic problem of seismology in higher dimensions*, J. Sov. Math., *21* (1983), 251–254.

[Be-Ge] BERNSHTEIN I. N., GERVER M. L., *A problem of integral geometry for a family of geodesics and an inverse kinematical problem of seismology*, Dokl. Earth Sect., *243* (1978), 10–12.

[Bu] BUSEMANN H., *The geometry of geodesics*, Academic Press, 1955.

[Cr1] CROKE C. B., *Rigidity for surfaces of non-positive curvature*, Comm. Math. Helv., *65* (1990), 150–169.

[Cr2] CROKE C. B., *Rigidity and the distance between boundary points*, J. Diff. Geom., *33* (1991), 445–464.

[DC] DO CARMO M., *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, 1976.

[Ge-Na] GERVER M. I., NADIRASHVILI N. S., *An isometricity condition for riemannian metrics in a disk*, Sov. Math. Dokl., *29* (1978), 199–203.

[Gr1] GROMOV M., *Filling riemannian manifolds*, J. Diff. Geom., *18* (1983), 1–147.

[Gr2] GROMOV M., *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, Nathan, Cedic, 1981.

[La-Ro-Sh] LAVRENT'EV M. M., ROMANOV V. G., SHISHATSKII S. P., *Ill-posed problems of mathematical physics and analysis*, AMS Translations of Mathematical Monographs, vol. 64, 1986.

[Me] METIVIER M., *Notions fondamantales de la théorie des probabilités*, Dunod, 1968.

[Mi] MICHEL R., *Sur la rigidité imposée par la longueur des géodésiques*, Inv. Math., *65* (1981), 71–83.

[Mu] MUKHOMETOV R. G., *The problem of recovery of a two-dimensional riemannian metric and integral geometry*, Sov. Math. Dokl., *18* (1977), 27–31.

[Mu-Ro] MUKHOMETOV R. G., ROMANOV V. G., *On the problem of determining an isotropic metric in n-dimensional space*, Sov. Math. Dokl., *19* (1978), 1330–1333.

[Ot] OTAL J. P., *Sur les longueurs des géodésiques d'une métrique à courbure négative dans le disque*, Comm. Math. Helv., *65* (1990), 334–347.

[Ro] ROMANOV V. G., *Integral geometry and inverse problems for hyperbolic equations*, Springer, Tracts in Natural Philosophy 26, Springer Verlag, 1974.

[Sp] SPIVAK M., *A comprehensive introduction to differential geometry*, vol. IV, Chap. 7, Publish or perish, 1975.

Université Fourier
URA 188 du CNRS
UFR de Mathématiques
B.P. 74
F-38402 Saint Martin d'Hères, France

Received April 8, 1993; April 22, 1993.