Lemmes de mulitiplicités et intersections.

Comment. Math. Helvetici 70 (1995) 235–247 0010-2571/95/020235-13$1.50 + 0.20/0

Lemmes de multiplicités et intersections

LAURENT DENIS

Résumé. Dans [P1] P. Philippon a démontré un lemme de multiplicités sur un groupe algébrique en employant des méthodes d'algèbre commutative. On introduit ici la théorie de l'intersection pour enlever une constante 2 qui apparaîssait dans le résultat final de [P1].

1. Enoncé des résultats

Soit G un groupe algébrique commutatif connexe de dimension g défini sur $\mathbb{C}$. On peut écrire une suite exacte:

$$0 \longrightarrow H \longrightarrow G \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0$$

où H est le sous groupe linéaire maximal de G et A est une variété abélienne. En désignant par G_a (resp. G_m) le groupe additif (resp. multiplicatif), on sait que H est de la forme $(G_a)^r \times (G_m)^m$, et nous poserons $h = \dim H = r + m$, $a = \dim A$. On dira que G est de type (r, m, a).

On se place dans le plongement projectif $\Psi : G \hookrightarrow \mathbb{P}^k$ considéré dans [S]. Le groupe G est alors compactifié en une variété lisse et complète $\mathbf{G}$, et il est muni d'un diviseur très ample L de la forme suivante:

$$L = M + N + R$$

où M est le diviseur de $\mathbf{G}$ considéré dans [S] relatif à $(G_a)^r$, N est de même le diviseur attaché à $(G_m)^m$, et $R = p^*(L_A)$ est l'image réciproque par la projection $p : \mathbf{G} \to A$, d'un diviseur très ample symétrique de A (voir plus loin pour des rappels plus précis).

Pour toute variété X de $\mathbb{P}^k$, on désigne par $\deg X$ son degré, rappelons que si X est quasi-projective de clôture $\bar{X}$ par définition $\deg X = \deg \bar{X}$. On suppose donné un sous-ensemble fini Γ de G contenant son élément neutre et on pose pour tout entier $i \geq 0 : \Gamma(i) = \{x_1 + \cdots + x_i / x_j \in \Gamma\}$ avec la convention $\Gamma(0) = \{0\}$.

On désigne par t_G l'espace vectoriel tangent à G en son origine, par $\exp_G$ son application exponentielle et par W un sous-espace-vectoriel de t_G. On identifiera t_G avec $\mathbb{C}^g$ via l'application:

$$\Psi \circ \exp_G : \mathbb{C}^g \to \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$$

représentée par des fonctions analytiques $(\xi_0(u), \ldots, \xi_k(u))$.

On désigne par Δ l'algèbre des opérateurs différentiels invariants sur G engendrée par W (cf. [M]) par $u_1, \ldots, u_n$ une base de W et par $D_1, \ldots, D_n$ les opérateurs différentiels correspondant. Un élément δ de Δ est d'ordre τ, s'il est combinaison linéaire de termes $(D_1)^{e_1} \circ \cdots \circ (D_n)^{e_n}$ où $e_1 + \cdots + e_n = \tau$ (on vérifie que cette définition ne dépend pas de la base choisie). Cet ordre fait de Δ une algèbre graduée dont Δ^τ désigne l'ensemble des éléments d'ordre τ.

Soient maintenant T un entier ≥ 0, f une fonction rationnelle sur G, on dit que f s'annule avec multiplicité T en un point $\gamma \in G$ le long de W si f est régulière en γ, et si pour tout opérateur différentiel δ dans Δ d'ordre inférieur ou égal à $T : \delta_0 f(\gamma + X) = 0$ (cf. [M] p. 105).

L'ordre d'annulation d'un polynôme homogène P sera celui de la fonction rationnelle ${}^hP$ déduite de P par déshomogénéïsation relativement à un hyperplan ne passant pas par γ. Il est usuel, pour les applications du résultat à la transcendance de partir d'un polynôme P d'un degré donné d, en terme de section, on considérera la section de $\mathcal{O}(d(L))$ qu'il définit. Le résultat se traduit alors comme suit:

THEOREME 1. *Soit P une section de $\mathcal{O}(d(L))$, s'annulant sur $\Gamma(g)$ à un ordre $\geq gT+1$ le long de W mais non identiquement nul sur G. Alors il existe un sous-groupe G' de G, différent de G, de type (r', m', a') d'espace tangent à l'origine $t_{G'}$ tel que*:

$$\binom{T + \dim(W/(W \cap t_{G'}))}{\dim(W/(W \cap t_{G'}))} \operatorname{Card}((\Gamma + G')/G') \deg G'$$

$$\leq \frac{\binom{r}{r'}\binom{m}{m'}\binom{a}{a'}}{\binom{g}{g'}} \deg G (d)^{\dim(G/G')}.$$

Ce résultat améliore une version homogène du théorème principal de [P1], où 2d apparaît à la place de d dans le terme de droite de cette inégalité. Plus généralement, on améliore la version sur les extensions établie dans [P3] qu'il est plus commode d'énoncer sous forme homogène, mais qu'on peut établir de manière similaire pour avoir le résultat multihomogène analogue du théorème 2.1 de [P1] (voir remarque finale).

Il a été démontré dans [D2] dans le cas des variétés abéliennes. La démonstration de nature plus géométrique que celle de [P1] (on pourra comparer aussi avec [Mo]), s'appuie comme dans [D1] sur la théorie de l'intersection. L'argument de Moreau sur l'invariance du polynôme de Hilbert par translation ne suffisait pas pour enlever le facteur 2 dans le résultat de Philippon, notamment à cause de la définition des opérateurs de dérivations (comme Philippon le remarque page 375 de [P1]). On commence donc par représenter les dérivées du polynôme P par des polynômes dont le sous-schéma des zéros sera linéairement équivalent sur $\mathbf{G}$ à $dM + dN + d''R$ où d'' est un entier $\leq d + gT = d'$, puis on utilise une astuce de type Landau pour conclure (notons que cette astuce avait aussi été utilisée dans [W]).

Bien que le résultat final permette d'enlever une puissance de 2 dans certaines constantes apparaîssant dans les résultats effectifs de transcendance (en particulier ceux faisant appel à la méthode de Baker (c.f. [Da])), nous espérons que la méthode utilisée et l'introduction de la théorie de l'intersection amèneront des progrès nouveaux sur ces questions.

2. Préliminaires

Commençons par rappeler les définitions de M, N, R (c.f. [S]). On sait que H se décompose en $H = H_r \times H_m$, où H_r est produit de groupes isomorphes au groupe additif G_a et H_m est produit de groupes isomorphes au groupe multiplicatif G_m. On note $H = \Pi H_\alpha$ où les H_α sont égaux à G_a ou à G_m.

On désigne par $\bar{H}_\alpha$ l'unique courbe lisse complète et connexe contenant H_α. On a $\bar{H}_\alpha - H_\alpha = \{\infty\}$ si $H_\alpha = G_a$, $\bar{H}_\alpha - H_\alpha = \{0, \infty\}$ si $H_\alpha = G_m$. On compactifie H en $\bar{H} = \Pi_\alpha \bar{H}_\alpha$. Soit $H^\infty = \bar{H} - H = U(H_\alpha)^\infty$ avec $(H_\alpha)^\infty = (\bar{H}_\alpha)\Pi_{\beta \neq \alpha}\bar{H}_\beta$. La projection canonique $\pi : G \to A$ fait de G un espace fibré principal de base A et de groupe structural H. La compactification $\mathbf{G}$ de G est alors l'espace fibré $G^H\bar{H}$ associé à l'espace fibré principal G et de fibre type $\bar{H}$. Chacun des $(H_\alpha)^\infty$ définit un sous-schéma de codimension 1 de $\mathbf{G} : (G_\alpha)^\infty = G^H(H_\alpha)^\infty$. On pose $M = U(G_\alpha)^\infty$ où l'union porte sur les α tels que $H_\alpha = G_a$ et $N = U(G_\alpha)^\infty$ où les α sont tels que $H_\alpha = G_m$, M et N sont donc des diviseurs effectifs de $\mathbf{G}$. Enfin, on choisit un diviseur L_A très ample et symétrique de A et on pose $R = p^*(L_A)$ où p désigne la projection de $\mathbf{G}$ sur A. Pour tout triplet d'entiers strictement positifs fixés a, b, c, le diviseur $aM + bN + cR$ est un diviseur très ample sur $\mathbf{G}$ (c.f. [S]). Pour toute famille finie de quadruplets d'entiers >0, $(x_i, y_i, z_i, t_i)_{1 \leq i \leq u}$ tels que $t_1 + \cdots + t_u =$

dim G, on notera $(x_1M+y_1N+z_1R)^{t_1}{}_{\mathbf{G}}\cdots{}_{\mathbf{G}}(x_uM+y_uN+z_uR)^{t_u}$ le degré du cycle obtenu comme intersection sur $\mathbf{G}$ des sous-schémas $x_iM+y_iN+z_iR$ chacun pris t_i fois.

On se fixe dans toute la suite trois entiers strictement positifs a, b, c. On va d'abord établir le résultat suivant:

PROPOSITION 1. *Soit le diviseur très ample $Z = aM + bN + cR$ et f une section de $\mathcal{O}(Z)$, passant par $\Gamma(g)$ à un order $\geq gT+1$ le long de W mais non identiquement nulle sur G. Alors il existe un sous-groupe G' de G, différent de G (dont on note $t_{G'}$ l'espace tangent à l'origine), de codimension $q = g - g' > 0$ dans G et de type (r', m', a') tel que:*

$$\binom{T+\dim(W/(W\cap T_{G'}))}{\dim(W/(W\cap T_{G'}))}\operatorname{Card}((\Gamma+G')/G')\deg G'$$
$$\leq \frac{g'!}{r'!m'!a'!}(aM+bN+(c'+1)R)^q_{\mathbf{G}}M^{r'}N^{m'}R^{a'}$$

avec $c' = c + gT$. (le degré étant toujours relatif au plongement défini par L).

On va utiliser des représentations des dérivations différentes de celles de [P1]. Celles-ci proviennent des lemmes techniques de [Da](§2-3-7), on a:

LEMME 1. *Il existe une famille finie d'opérateurs différentiels $\Delta_{\beta,i}$ l'indice $\beta\in B$ ensemble des éléments du système linéaire associé à R transformant les sections de $\mathcal{O}(aM+bN+cR)$ en sections de $\mathcal{O}(aM+bN+(c+1)R)$ et représentant la dérivation par rapport à la variable u_i.*

Preuve. Ce résultat est explicité dans [Da](§2-3-7), un résultat similaire (publié) se trouve dans [P2] (lemme 1.2) avec $c+1$ remplacé par $c+a$ où a est un réel fixé. Ce résultat suffirait encore pour la suite de nos démonstrations.

Comme nous l'a signalé l'arbitre, une formulation avantageuse de ce résultat est la suivante. Pour tout R_0 dans la classe d'équivalence linéaire de R, les sections de $\mathcal{O}(aM+bN+cR_0))$ s'identifient aux fonctions rationnelles f régulières hors de $M+N+R_0$ avec pôles d'ordre contrôlés. Pour tout opérateur différentiel invariant δ, d'ordre 1, δf a alors un pôle d'ordre $\leq c+1$ le long de R_0 et $\leq a$ le long de M et b le long de N (car ces derniers sont G-stables). Par conséquent δf s'identifie à une section de $\mathcal{O}(aM+bN+(c+1)R_0)$. On a ainsi obtenu notre famille d'opérateurs indexés par les éléments du système linéaire associé à R.

Soit f une section de $\mathcal{O}(aM+bN+cR)$ et δ un opérateur dans Δ d'ordre $\leq(k-1)T$, le lemme précédent fournit des sections $\Delta_{\beta,\delta}(f)$ de $\mathcal{O}(aM+bN+$

$(c+(k-1)T)R))$ dont le sous-schéma des zéros est linéairement équivalent á $aM+bN+c''R$, $c''\leq c+(k-1)T$. Quitte à multiplier chaque $\Delta_{\beta,\delta}(f)$ par une section convenable d'un diviseur linéairement équivalent à un multiple de R, on peut supposer que le sous-schéma des zéros de $\Delta_{\beta,\delta}(f)$ est linéairement équivalent à $aM+bN+c'R$ où $c'=c+gT$.

Comme dans [P1], on va construire une suite décroissante de sous-schémas de $\mathbf{G}$. Rappelons d'abord que dans le plongement considéré, l'addition sur G se prolonge en un morphisme de $G\times\mathbf{G}\to\mathbf{G}$. Pour toute section g, on note $Z(g)$ le sous-schéma dont les composantes primaires rencontrent G associé au schéma des zéros de g. Le translaté par un point x de G du sous-schéma précédent sera noté $Z(g)+x$. On considère alors la suite décroissante de sous-schémas de $\mathbf{G}$:

$$X_0=Z(f),\dots,X_k=Z(f)\cap(\cap(Z(\Delta_{\delta,\beta}(f))-\gamma),\ \beta\in B,\ \text{ordre}\,(\delta)\leq kT,\ \gamma\in\Gamma(k)).$$

La translation étant un isomorphisme analytique local X_k passe encore à l'ordre $(g-k)T$ en chaque point de $\Gamma(g-k)$. Soit $d_i=\dim X_i$, on a:

$$d_0=g-1\geq d_1\geq\cdots\geq d_i\geq d_{i+1}\geq\cdots\geq d_g\geq 0.$$

Il existe donc un indice r et une composante irréductible V de dimension d_r commune à X_r et X_{r+1}. Notons Y^{red} le sous-schéma réduit d'un schéma Y, et considérons:

$$H=\{y\in G/(X_r)^{\text{red}}\supset y+V\}=(\textstyle\bigcap_{v\in V}((X_r)^{\text{red}}-v))^{\text{red}}.$$

Le stabilisateur G' de V agit sur H. Pour $\gamma\in\Gamma$, $(X_r)^{\text{red}}-\gamma\supset(X_{r+1})^{\text{red}}\supset V$, d'où:

$$(X_r)^{\text{red}}\supset(X_{r+1})^{\text{red}}+\gamma\supset V+\gamma.$$

Ainsi $H\supset\cup_{x\in(\Gamma+G')/G'}(G'+x)$. Rappelons quelques définitions avant de regarder les multiplicités.

DEFINITION 1. ([H] exercise 5.10, p. 125) – Soit $S=\mathbb{C}[x_0,\dots,x_k]$ l'anneau affine des coordonnées de $\mathbb{P}^k$. Si Y est un sous-schéma de $\mathbb{P}^k$, l'ensemble des idéaux associés à Y (definissant Y) possède un élément maximal pour l'inclusion appelé l'idéal associé à Y. Cet idéal est le saturé de tout idéal associé à Y et sera noté I_Y.

DEFINITION 2. Soit I l'idéal associé à un sous-schéma de $\mathbf{G}$ défini dans $\mathbf{G}$ par des polynômes $(P_1,\dots,P_r)$, on définit $\Delta^T I$ comme dans [P1] (définition 4.2): c'est l'idéal saturé associé à l'intersection des composantes primaires rencontrant G de l'idéal engendré par $(\Delta^\tau P_i,\dots,\Delta^\tau P_r,J(\mathbf{G}))_{1\leq\tau\leq T}$, où $J(\mathbf{G})$ est l'idéal de définition de $\mathbf{G}$ dans $\mathbb{P}^k$.

Un schéma X de $\mathbf{G}$ est dit passé à un ordre $\geq T$ le long de W par un sous-schéma réduit Y de $\mathbf{G}$ si l'idéal I_X associé à X est tel que $I_Y \supset \Delta^T I_X$.

Remarque. Si Y est un point fermé γ de coordonnées $(1, y_1, \ldots, y_k)$ l'idéal associé est $((X_1 - y_1 X_0), \ldots, (X_k - y_k X_0))$. Le sous-schéma des zéros d'une fonction rationnelle f homogénéïsée d'un polynôme P a pour idéal associé $(X_0)^{\deg P} P(X_1/X_0, \ldots, X_k/X_0))$. La formule de Taylor montre alors que ce sous-schéma passe par γ le long de W à l'ordre T si et seulement si la fonction rationnelle f passe par γ le long de W à l'ordre T au sens de notre définition page 3. Les définitions sont donc bien compatibles. On va avoir besoin du lemme de Wüstholz (cf. [P1], prop. 4.7). Rappelons qu'une sous-variéte V de G est incomplètement définie par un idéal I si toutes les composantes de V sont des composantes de l'intersection de G avec l'ensemble des zéros des éléments de I (cf. [P1], déf. 3.5):

LEMME (Wüstholz). *Si I est un idéal homogène de S définissant incomplètement $x + G'$ et si pour un entier naturel T, l'idéal $\Delta^T I$ définit incomplètement $x + G'$ alors I définit incomplètement $x + G'$ avec une multiplicité $\geq (T+s)!/T!s!$ où $s = \dim(W/W \cap t_{G'})$, c'est à dire la longueur de chaque composante primaire de dimension maximale est minorée par $(T+s)!/T!s!$.*

Comme dans [P1], on voit que $I_{X^{r+1}}$ et $\Delta^T I_{X^r}$ ont les mêmes composantes primaires et donc que $X_r - v$ passe à un ordre $\geq T$ par $V - v$ (et ses translatés sous Γ) le long de W. Le sous-schéma $H' = \cap_{v \in V}(X_r - v)$ est de même dimension et passe par $\bigcup_{x \in (\Gamma + G')/G'}(G' + x)$ avec une multiplicité contrôlée par le lemme de Wüstholz. On peut donc affirmer:

$$\binom{T + \dim(W/(W \cap t_{G'}))}{\dim(W/(W \cap t_{G'}))} \operatorname{Card}((\Gamma + G')/G') \deg G' \leq \deg H'.$$

Désignons par H'' l'adhèrence de Zariski du sous-schéma de H', de même degré que H', associé à ses composantes primaires isolées de dimension maximale recontrant G. On a en fait également démontré l'inégalité précédente avec H' remplacé par H''.

3. Intersections

On va maintenant faire appel à la théorie de l'intersection pour majorer $\deg H''$. On se sert des propriétés rappelées dans [D1] et démontrées dans [F].

Si K est un hyperplan de $\mathbb{P}^k$, on note $K_{\mathbf{G}}$ un cycle de $\mathbf{G}$ représentant la classe $i^*(K)$ où $i: \mathbf{G} \hookrightarrow \mathbb{P}^k$ est le plongement associé à $M+N+R$. On sait que $K_{\mathbf{G}}$ est linéairement équivalent à $M+N+R$.

DÉFINITION. Soient C et C', deux cycles de $\mathbf{G}$ de même codimension dans $\mathbf{G}$. On dira que C' domine C numériquement si pour tout cycle Z de $\mathbf{G}$ de la forme $(x_1M+y_1N+z_1R)^{t_1}{}_{\mathbf{G}}\cdots{}_{\mathbf{G}}(x_uM+y_uN+z_uR)^{t_u}(x_j, y_j, z_j>0)$ et de codimension complémentaire on a:

$$\deg C\dot{{}_{\mathbf{G}}}Z \leq \deg C'\dot{{}_{\mathbf{G}}}Z$$

On dira que C et C' sont numériquement équivalent si on a l'égalité dans l'expression précédente.

Remarque. Le fait que $xM+yN+zN$ soit ample $(x, y, z>0)$ entraîne que si deux schémas sont de même dimension et inclus l'un dans l'autre alors le plus grand domine le plus petit.

On aura besoin des lemmes suivants:

LEMME 2. *Soient deux triplets d'entiers* >0, (x, y, z), (x', y', z') *et* Y *un sous-schéma fermé de* $\mathbf{G}$ *on a*:

a) $Y\cdot(xM+yN+zR)(x'M+y'N+z'R)$ *est dominé numériquement par* $Y\cdot(\max(x, x')M+\max(y, y')N+\max(z, z')R)^2$.

b) Si $x\leq x', y\leq y', z\leq z'$ *alors* $Y\cdot(xM+yN+zR)$ *est dominé numériquement par* $Y\cdot(x'M+y'N+z'R)$.

Preuve. On revient à la définition en calculant $Y\cdot(xM+yN+zR)$ contre un cycle de dimension complémentaire, on développe les expressions polynômiales et le lemme vient du fait que les polynômes obtenus sont à coefficients positifs. En effet, $xM+yN+zR$ est ample sur $\mathbf{G}$ dès que x, y et z sont strictement positifs, donc $\deg Y = Y\cdot(xM+yN+zR)^{\dim Y}$ est positif.

LEMME 3. *Soient* u, v, w *des entiers naturels tels que* $u+v+w=\dim G$ *où* G' *est un sous-groupe algébrique de* G *de type* (r, m, a) *alors* $\overline{G'}\cdot M^uN^vR^w\neq 0$ *entraîne* $u=r, v=m, w=a$.

Preuve. Le degré de G' dans un plongement défini par $aM+bN+cR$ (pour a, b, c fixés >0) est $\overline{G'}\cdot(aM+bN+cR)^{\dim G'}$.

Le théorème 1 de [L1] nous dit que ce degré est le produit (à une constante multiplicative C près, ne dépendant que de r, m, a) des degrés de H_r, H_m et A dans les plongements associés à aM, bN et cR. D'où l'on déduit l'égalité entre polynômes homogènes $(aM + bN + cR)^{\dim G'} = Ca^r b^m c^a M^r N^m R^a$. Ce qui entraîne bien la conclusion du lemme 3.

Remarque. Le résultat du lemme est suffisant pour nos applications. Il revient à dire que $M^k = 0$ si $k > r$, $N^k = 0$ si $k > m$ et $R^k = 0$ si $k > a$, où les égalités s'entendent modulo l'équivalence algébrique.

LEMME 4. *Soit* $[n]$ *le prolongement à* $\mathbf{G}$ *de la multiplication par* n *sur* G: $[n]^*(M + N + R) = M + |n|N + n^2 R$, *où l'égalité est prise dans* $\operatorname{Pic}(\mathbf{G})$.

Preuve. [S] (corollaire 1).

LEMME 5. *Un diviseur* W *de* $\mathbf{G}$ *algébriquement équivalent à zéro dont le fibré associé admet une action de* H *est linéairement équivalent à un diviseur de la forme* $p^*((L_A + u) - L_A)$ *où* u *est dans* A.

Preuve. D'après le théorème 2.1 de [K-L] $\operatorname{Pic}_H(\mathbf{G}) = \mathbb{Z}^{r+m} \oplus \operatorname{Pic}(A)$, W est donc de la forme $p^*(W_A)$ où W_A est algébriquement équivalent à zéro sur A. Le diviseur L_A étant très ample, on sait que tous les diviseurs algébriquement triviaux sont de la forme $(L_A + u) - L_A$.

On pose $c' = c + gT$ et on rappelle:

$$H' = (\cap(Z(\Delta_{\delta,\beta}(f)) - \gamma - v) \supset H'',$$

où les sous-schémas de codimension 1 de $\mathbf{G}$, $(Z(\Delta_{\delta,\beta}(f)) - \gamma - v)$ sont les translatés par $\gamma + v$ de zéros de dérivées de f, $\operatorname{ord}(\delta) \leq rT$, $\gamma \in \Gamma(r)$ $(r \leq g)$ et $v \in V$.

Prouvons maintenant l'analogue du lemme 2 de [D1] et [D2]. On rappelle d'abord que dans le plongement considéré, l'addition sur G se prolonge en un morphisme de $G \times \mathbf{G} \to \mathbf{G}$, et donc que la clôture de Zariski d'un sous-schéma de $\mathbf{G}$ est algébriquement équivalente à un de ses translatés.

LEMME 6. H'' *est dominé numériquement par le cycle* $(aM + bN + (c' + 1)R)^q$ *où* $q = \dim \mathbf{G} - \dim H''$.

Preuve. Par noethérianité, et d'après l'expression de H' rappelée ci-dessus, il existe un nombre fini w de sections f_i (de la forme $\Delta_{\delta,\beta}(f)$) et de points v_i (de la forme $\gamma + v$) de telle sorte que H'' soit composante de l'intersection $\bigcap_{1 \leq i \leq w}(Z(f_i) - v_i)$. Les diviseurs $(Z(f_i) - v_i)$ étant tous algébriquement équivalents à $Z = aM + bN + c'R$ on écrit $(Z(f_i) - v_i) = Z + W_i$ où W_i est algébriquement équivalent à zéro. Tous les diviseurs W_i sont algébriquement équivalents à zéro et sont des différences de translatés de Z, donc on peut écrire d'après le lemme 5, $W_i = p^*((L_A + u_i) - L_A)$.

Comme L_A est un diviseur très ample de A, pour tout i, le diviseur $L_A + \Sigma_{j \neq i}[(L_A + u_i) - L_A]$ est linéairement équivalent à un diviseur de la forme $L_A + (L_A + u) - L_A = (L_A + u)$, il est donc très ample comme translaté d'un très ample.

On note $|L_A + \Sigma_{j \neq i}[(L_A + u_i) - L_A]|$ le système linéaire complet associé. Le schéma H'' est toujours inclus dans:

$$\bigcap_{1 \leq i \leq w} Z + W_i + p^*|L_A + \Sigma_{j \neq i}[(L_A + u_i) - L_A]|$$

car on a seulement ajouté des diviseurs effectifs. Si H'' n'était plus composante de cette intersection, cela entraînerait que la projection sur A d'une composante de H'' est inclue dans l'ensemble des points base d'un système linéaire complet $|L_A + \Sigma_{j \neq i}[(L_A + u_i) - L_A]|$, ce qui contredit l'amplitude.

Par construction tous les diviseurs de la forme $Z + W_i + p^*|L_A + \Sigma_{j \neq i}[(L_A + u_i) - L_A]|$ sont linéairement équivalents à un même diviseur effectif dans la classe d'équivalence linéaire de $Z + R + \Sigma_i W_i$. Le lemme d'évitement des idéaux premiers nous permet comme dans [P1] d'extraire une suite régulière de sorte que H'' soit union de composantes de l'intersection de $q = \mathrm{codim}_{\mathrm{G}} H''$ diviseurs du type précédent. Cette intersection est alors localement intersection complète donc de Cohen-Macaulay. Ces diviseurs sont tous très amples et algébriquement équivalents à $aM + bN + (c' + 1)R$ d'où l'on tire que H'' est dominé numériquement par $(aM + bN + (c' + 1)R)^q$.

On va maintenant majorer le degré de H''. La variété $(H'')^{\mathrm{red}}$ est une union finie de translatés d'un groupe G' de type (r', m', a'). En conservant les notations du paragraphe 2, rappelons que a' est la dimension de $\pi(G')$, que $r = \dim(H_r \cap G')$, que $m' = \dim(H_m \cap G')$, posons $g' = r' + m' + a'$ de manière à avoir $q = g - g'$. Le lemme suivant conclut la preuve de la proposition 1:

LEMME 7. *Le degré de H' est majoré par le degré du cycle*:

$$\frac{g'!}{r'!m'!a'!}(aM + bN + (c' + 1)R)^q_{\mathrm{G}} M^{r'} N^{m'} R^{a'}.$$

Preuve. Le degré de H'' est par définition celui du cycle $H'' \cdot (M + N + R)^{r' + m' + a'}$ et est donc aussi égal à celui du cycle (voir la preuve du lemme 3):

$$\frac{g'!}{r'!m'!a'!} H''_{\mathrm{G}} M^{r'} N^{m'} R^{a'}.$$

D'après le lemme précédent le degré de H'' est donc inférieur à:

$$\frac{g'!}{r'!m'!a'!}(aM + bN + (c' + 1)R)^q_{\mathbf{G}} M^{r'} N^{m'} R^{a'}.$$

4. Conclusion

Sous les hypothèses de la proposition 1, on a une inégalité:

$$\binom{T + \dim (W/(W \cap t_{G'}))}{\dim (W/(W \cap t_{G'}))} \operatorname{Card} ((\Gamma + G')/G') \deg G'$$
$$\leq \frac{g'!}{r'!m'a'!}(aM + bN + (c' + 1)R)^q_{\mathbf{G}} M^{r'} N^{m'} R^{a'}.$$

(où $c' = c + gT$).

Soit f une section de $\mathcal{O}(dL)$, identifiée à une application rationnelle, l'application $f \circ [n]$ fournit une section de $\mathcal{O}([n]^*(dZ))$. D'après le lemme 4, $[n]^*(dZ)$ est linéairement équivalent à $dM + ndN + n^2dR$. L'application $f \circ [n]$ s'annule sur $[n]^*[\Gamma)(g)$. On applique alors la proposition 1 à $f \circ [n]$ et au triplet de diviseurs (dM, ndN, n^2dR) et on obtient un sous-groupe algébrique G_n de G de codimension $q_n = g - g_n$ et de type (r_n, m_n, a_n) tel que:

$$\binom{T + \dim (W/(W \cap t_{G_n}))}{\dim (W/(W \cap t_{G_n}))} \operatorname{Card} (([n]^*[\Gamma] + G_n)/G_n) \deg G_n$$
$$\leq \frac{g_n!}{r_n!m_n!a_n!}(dM + ndN + (n^2d + gT + 1)R)^{q_n}_{\mathbf{G}} M^{r_n} N^{m_n} R^{a_n}.$$

On déduit immédiatement du lemme 3:

$$(dM + ndN + (n^2d + gT + 1)R)^{q_n}_{\mathbf{G}} M^{r}{}_n N^{m_n} R^{a_n} = \alpha(n, d, T) M^r N^m R^a.$$

où $\alpha(n, d, T)$ est un polynôme en les variables n, d, t de degré en n exactement $m - m_n + 2(a - a_n)$.

La suite (q_n, r_n, m_n, a_n) est bornée, et quitte à extraire une sous-suite de valeurs de n, on peut supposer qu'elle est constante et égale à (q, r', m', a') où $q = g - g'$.

Si on écrit alors:

$$(dM + dN + dR)^q_{\mathbf{G}} M^{r'} N^{m'} R^{a'} = \alpha(d) M^r N^m R^a.$$

nous avons $\alpha(d) = d^q(g-g')!/[(r-r')!(m-m')!(a-a')!]$ et:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha(n, d, T)}{n^{m-m_n+2(a-a_n)}} = \alpha(d). \tag{1}$$

Un calcul similaire à celui de [D1](§2) (à comparer avec les formules de degré d'images réciproques de $[n]$ données dans [Hi] lemme 6) donne:

$$\operatorname{Card}(([n]^*(\Gamma) + G_n)/G_n)) = n^{m-m_n} n^{2(a-a_n)} \operatorname{Card}(((\Gamma) + G_n)/G_n)).$$

L'inégalité obtenue précédemment s'écrit donc encore:

$$\binom{T + \dim(W/(W \cap t_{G_n}))}{\dim(W/(W \cap t_{G_n}))} \operatorname{Card}((\Gamma + G_n)/G_n) \deg G_n \leq \frac{\alpha(n, d, T) M^r N^m R^a g'!}{n^{m-m_n+2(a-a_n)} r'! m'! a'!}.$$

Le terme de gauche est toujours un entier et le terme de droite tend vers un entier quand n tend vers l'infini. Il existe alors un $n \geqslant n_0$ tel que l'on ait:

$$\binom{T + \dim(W/(W \cap t_{G_n}))}{\dim(W/(W \cap t_{G_n}))} \operatorname{Card}((\Gamma + G_n)/G_n) \deg G_n \leq \frac{g'!}{r'! m' a'!} \alpha(d) M^r N^m R^a.$$

Grâce à (1) on obtient:

$$\binom{T + \dim(W/(W \cap t_{G_n}))}{\dim(W/(W \cap t_{G_n}))} \operatorname{Card}((\Gamma + G_n)/G_n) \deg G_n$$
$$\leq \frac{g'! \quad (g-g')! \quad r! m! a!}{r' m'! a' (r-r')(m-m')!(a-a')! \quad g!} d^{\dim(G/G_n)} \deg G.$$

Ce qui conclut la preuve du théorème, en choisissant $G' = G_{n_0}$.

Remarque 1. On peut remplacer, dans l'énoncé du théorème, le plongement $M+N+R$ par $aM+bN+cR$ (où a, b, c sont des entiers >0). Ceci permet d'avoir un résultat non homogène, parfois utile dans les applications (c.f. [P3]).

Remarque 2. Il peut également être utile d'avoir un résultat dans le cas d'un produit de plusieurs groupes algébriques. On part de $G_1, \ldots, G_p$ des groupes algébriques donnés comme extensions de variétés abéliennes par des groupes linéaires. Chaque $G_i (1 \leq i \leq p)$ est plongé dans un espace projectif $\mathbb{P}^{k_i}$ par un diviseur très ample $L_i = M_i + N_i + R_i$, à la manière du paragraphe 1. Le produit

$G = G_1 \times \cdots \times G_p$ est alors naturellement plongé dans un espace multiprojectif par le diviseur $L'_1 + \cdots + L'_p$, où $L'_i = L_i \times \Pi_{j \neq i} \mathbb{P}^{k_j}$. Le résultat multihomogène s'énonce alors comme suit (en conservant les notations du paragraphe 1): soit P un polynôme multihomogène de multidegré $\leq (d_1, \ldots, d_p)$, s'annulant sur $\Gamma(g)$ à un ordre $\geq gT + 1$ le long de W mais non identiquement nul sur G. Alors il existe un sous-groupe G' de G, différent de G, d'espace tangent à l'origine $t_{G'}$ tel que:

$$\binom{T + \dim (W/(W \cap t_{G'}))}{\dim (W/(W \cap t_{G'}))} \operatorname{Card} ((\Gamma + G')/G')\, G' \cdot (L'_1 + \cdots + L'_p)^{\dim G'}$$
$$\leq (d_1 L'_1 + \cdots + d_p L'_p)^{\dim (G/G')} \cdot (L'_1 + \cdots + L'_p)^{\dim G'}.$$

Pour obtenir ce résultat, notons qu'on emploie encore l'homogénéïté et la multilication par n sur **G**. Il convient de noter que les intersections sont toujours prises sur **G** et que le résultat n'est de formulation semblable à notre théorème 1 que si on prend soin de refaire les calculs avec chaque L_i décomposé en $M_i + N_i + R_i$ et que les sous-groupes G' de G sont de la forme $G'_1 \times \cdots \times G'_p$ où G'_i est un sous-groupe de G_i.

Remerciements

L'auteur remercie D. Bertrand, S. David, H. Lange, D. Masser, P. Philippon pour de nombreuses et utiles discussions et l'arbitre pour d'utiles remarques ayant permis diverses améliorations et corrections. Nous remercions tout particulièrement O. Gabber d'avoir relevé une erreur dans une version préliminaire du lemme 5 et de nous avoir permi de la corriger (c.f. aussi le lemme 3 de [D2]).

REFERENCES

[B] BERTRAND, D., *Lemmes de zéros et nombres transcendants*, Séminaire Bourbaki, no 652, 1985–86, p. 652-02 à 652-23.

[Da] DAVID, S., *Fonctions thêta, formes modulaires et approximation diophantienne*, Thèse Paris *6*, 1989.

[D1] DENIS, L., *Lemmes de zéros et intersections*, "*Approximations diophantiennes et nombres transcendants*", *Comptes rendus de Luminy*, P. Philippon et W. de Gruyter Ed., p. 99–106, 1990.

[D2] DENIS, L., *Lemmes de multiplicités et intersections*, C. R. Acad. Sci. Paris *314*, Série 1, p. 97–100, 1992.

[F] FULTON, W., *Intersection theory*, Springer Verlag, New York 1984.

[H] HARTSHORNE, R., *Algebraic geometry*, Springer Verlag, New York 1977.

[Hi] HINDRY, M., *Autour d'une conjecture de Serge Lang*, Inventiones Math., 94, p. 575–603, 1988.

[K] KLEIMAN, S., *Motives, dans Algebraic geometry*, Oslo 1970.

[K–L] KNOP, F. and LANGE, H., *Some remarks on compactifications of commutative algebraic groups*, Comment. Math. Helv. *60*, p. 497–507, 1985.

[L1] LANGE, H., *A remark on the degrees of commutative algebraic groups*, Illinois Journal of Math. *33*, no 3, 1989.

[L] LANGE, H., *Compactified commutative algebraic groups as intersection of quadrics*, Publications de Paris *6*, 58, 1982–1983.

[M] MUMFORD, D., *Abelian varieties*, Oxford University Press, 1970.

[Mo] MOREAU, J. C., *Démonstration géométrique des lemmes de zéros II, dans Approximations diophantiennes et nombres transcendants*, Luminy 1982, Birkhäuser Progress in Math. *31*, 1983, p. 191–197.

[N] NAKAMAYE, M., *Multiplicity estimates and the product theorem*, preprint, April 1993.

[P1] PHILIPPON, P., *Lemmes de zéros sur les groupes algébriques commutatifs*, Bull. SM France *114*, 1986, p. 355–383. Errata et addenda, Bull. SM France *115*, 1987, p. 397–398.

[P2] PHILIPPON, P., *Variétés abéliennes et indépendance algébrique II: Un analogue abélien du théorème de Lindemann Weierstraß*, Invent. Math. *72*, 1983, p. 389–405.

[P3] PHILIPPON, P., *Lemmes de zéros sur les extensions*, Publications de Paris *6*, 88, 1987–1988.

[S] SERRE, J. P., *Quelques propriétés des groupes algébriques commutatifs*, appendice 2, Astérisque, 69–70, 1979, p. 191–202.

[W] WÜSTHOLZ, G., *Über das Abelsche Analogon des Lindemannschen Satzes I*, Inventiones Math. *72*, 1983, p. 363–388.

Université Pierre et Marie Curie,
U.F.R. 920. "Problèmes diophantiens"
4 Place Jussieu,
Tour 45–46, 5ième étage,
75252 Paris, France

Received October 19, 1993; October 10, 1994