

Formes différentielles sur l'espace projectif réel sous l'action du groupe linéaire général.

Autor(en): **Gaillard, Pierre-Yves**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **70 (1995)**

PDF erstellt am: **16.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-53003>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Formes différentielles sur l'espace projectif réel sous l'action du groupe linéaire général

PIERRE-YVES GAILLARD

Résumé. On montre que les seuls sous-espaces invariants par transformations projectives et fermés pour la topologie C^∞ de l'espace des p -formes sur l'espace projectif réel sont les suivants: le sous-espace nul, celui des formes exactes, celui des formes fermées, et l'espace lui-même – avec les coïncidences bien connues entre ces sous-espaces. On résoud aussi le problème analogue sur la sphère.

Summary. We show that the only subspaces of the space of p -forms on the real projective space which are invariant under projective transforms and closed for the C^∞ topology are the following ones: the zero subspace, the subspace of exact forms, the subspace of closed forms, and the space itself – with the well known coincidences between these subspaces. We also solve the analogous problem of the sphere.

Fixons un entier n plus grand ou égal à deux, et considérons, pour tout entier p (avec $0 \leq p \leq n - 1$) les espaces $B^p \subset Z^p \subset C^p$ formés respectivement des p -cobords, p -cocycles et p -cochaînes du complexe de de Rham des formes différentielles C^∞ sur l'espace projectif réel de dimension $n - 1$. Ces espaces seront vus comme des modules (topologiques) pour le groupe $G = GL(n, \mathbb{R})$ agissant par transformations projectives, et munis de la topologie C^∞ (le noyau de cette action est le sous-groupe \mathbb{R}^\times des homothéties, le quotient étant le groupe projectif, habituellement noté $PGL(n, \mathbb{R})$).

THÉORÈME.

(a) *Les seuls sous-espaces G -invariants fermés de C^p sont $0 \subset B^p \subset Z^p \subset C^p$. Plus précisément, les seuls sous-espaces G -invariants fermés non-triviaux de C^p sont:*

$$\mathbb{C} = \{\text{constantes}\} = Z^0 \text{ si } p = 0$$

$$B_p = Z^p \text{ si } 1 \leq p \leq n - 2,$$

$$B^{n-1} \text{ si } n \text{ est pair et } p = n - 1.$$

(b) *Notant $\text{Hom}_G(C^p, C^q)$ l'espace des applications linéaires continues G -équivariantes de C^p dans C^q , on a $\text{Hom}_G(C^p, C^p) = \mathbb{C}$, $\text{Hom}_G(C^p, C^{p+1}) = \mathbb{C}d$ et $\text{Hom}_G(C^p, C^q) = 0$ dans les autres cas.*

Le point (b) a été noté par le referee. La solution du problème analogue sur la sphère, suggéré par Pierre de la Harpe, est donnée au §3. D'après la théorie des "globalisations canoniques" de Casselman-Wallach et Schmid (voir [W] comme source de références), on a un résultat analogue pour les formes analytiques, les courants et les hyperformes. Il serait intéressant de savoir ce qui se passe lorsqu'on se restreint à $GL(n, \mathbb{Z})$. Comme Norbert A'Campo me l'a fait remarquer, l'énoncé analogue pour les courants et les hyperformes sera alors pris en défaut, ainsi qu'on le voit déjà dans le cas particulier traité par Hafliger et Li-Banghe [HL]. Une autre question naturelle serait de savoir si l'on peut classifier les actions de groupes de Lie sur des variétés telles que, dans les notations ci-dessus, les seuls sous-espaces invariants fermés de C^p soient $0 \subset B^p \subset Z^p \subset C^p$. Le seul autre exemple que je connaisse est celui du groupe $PO(n+1, 1)$ des transformations conformes (qui ne préservent pas nécessairement l'orientation) de la n -sphère, n impair [G1, thm 5].

Indiquons une autre question naturelle relative aux représentations de $GL(n, \mathbb{R})$ qui se pose au sujet du complexe de de Rham de $\mathbb{R}P^{n-1}$. Soient plus généralement G un groupe réductif (exemple: $GL(n, \mathbb{R})$, $PO(n, 1)$, ...) et X un G -espace homogène (connexe) compact de dimension k sans cohomologie en degré $1 \leq p \leq k-1$ (exemple $\mathbb{R}P^{n-1}$, S^{n-1}). Selon l'orientabilité de X les deux cas suivants sont possibles: (a) $H^k(X, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$, (b) $H^k(X, \mathbb{C}) = 0$. On a donc une suite exacte $0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow C^0 \rightarrow \dots \rightarrow C^k \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow 0$ dans le cas (a) – la seconde flèche étant l'inclusion des constantes, les suivantes provenant de la différentielle extérieure et l'avant-dernière donnée par intégration – ou $0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow C^0 \rightarrow \dots \rightarrow C^k \rightarrow 0$ dans le cas (b). D'où une classe $c(X) \in H^{k+1}(\mathfrak{g}, K; \mathbb{C}) \approx H^{k+1}(G_c/K_c; \mathbb{C})$ – où G_c/K_c est le dual compact – dans le cas (a), ou (en utilisant la dualité de Vogan) $c(X) \in H^k(\mathfrak{g}; K; C^k)$ dans le cas (b). Pour $PO(n, 1)$ agissant sur S^{n-1} on se trouve dans le cas (a), et l'on a: $c(S^{n-1}) = 0$ si n est impair, et $c(S^{n-1})$ est la classe fondamentale de $S^n = G_c/K_c$ si n est pair. Pour $GL(n, \mathbb{R})$ agissant sur $\mathbb{R}P^{n-1}$, j'ignore ce qui se passe, mais je soupçonne que $c(\mathbb{R}P^{n-1})$ n'est jamais nulle, que si n est pair $c(\mathbb{R}P^{n-1})$ est le générateur "spécial" de degré n de $H^*(U(n)/SO(n))$ qui apparaît dans Borel [Bor, prop. 31.4] (ce générateur est probablement la classe d'Euler), et que, si n est impair, C^{n-1} est unitaire – $c(\mathbb{R}P^{n-1}) \in H^{n-1}(\mathfrak{g}, K; C^{n-1})$ serait alors, en vertu du célèbre théorème d'annulation au-dessous du rang de Borel-Wallach [BW, V.3.3], une classe de cohomologie unitaire de degré minimum. Les résultats de [G2] suggèrent que c'est bien ce qui se produit lorsque n vaut 3. (Le résultat principal de ce texte dit que $c(\mathbb{R}P^{n-1})$ est un produit d'extensions de degré un entre modules simples.) Dans tous les cas, la méthode naturelle pour calculer $c(X)$ consiste à envoyer la suite exacte qui la définit dans le complexe de de Rham de G/K – lequel tient lieu en quelque sorte de "résolution injective" du module trivial – par "transformation de Poisson". C'est ainsi que les résultats mentionnés ci-dessus pour $PO(n, 1)$ découlent immédiatement de [G1, thm 1].

Ma principale source d'inspiration a été l'article [HT] de Howe et Tan. Je remercie Norbert A'Campo, Etienne Ghys, André Haefliger, Pierre de la Harpe et le referee pour de nombreuses et intéressantes remarques.

1. Préliminaires

Soit $K = O(n) \subset G$ le groupe orthogonal. D'après Harish-Chandra [HC] il existe une unique décomposition de C^p en somme directe topologique $C^p = \bar{\bigoplus}_{k \in \mathbb{N}} C^{p,k}$ de K -modules isotypiques de dimensions finies; si un K -sous-module est préservé par l'algèbre de Lie \mathfrak{g} de G alors son adhérence est G -invariante; et tout sous-espace G -invariant fermé (on dira " G -sous-module") est de cette forme. Ce principe général s'applique aussi au G -module V_p défini plus bas, et sera utilisé sans référence explicite.

Considérons dans un premier temps un entier p quelconque. Posons $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et formons le G -module

$$V_p = \{f \in C^\infty(U) \mid f(tx) = t^{-p}f(x), \forall t \in \mathbb{R}^\times, x \in U\}.$$

Pour décrire la relation entre V_p et C^p , introduisons la puissance extérieure $\Lambda^p = \bigwedge^p(\mathbb{C}^n)^*$ du G -module standard dual; désignons par x_i les coordonnées naturelles de \mathbb{R}^n , par ∂_i les champs $\partial/\partial x_i$, par $E = \sum x_i \partial_i$ le champ d'Euler, et par $i(E)$ le produit intérieur par E . L'espace des p -formes \mathbb{R}^\times -invariantes sur U s'identifie alors à $V_p \otimes \Lambda^p$, et l'on a

- 1.1. (a) $C^0 \approx V_0$,
- (b) $C^p \approx \text{Ker}(i(E): V_p \otimes \Lambda^p \rightarrow C^{p-1})$ si $p \geq 1$,
- (c) $C_p \approx i(E)(V_{p+1} \otimes \Lambda^{p+1})$,
- (d) $C^{n+1} \approx V_n \otimes \Lambda^n$.

On utilise librement dans la suite la théorie élémentaire des harmoniques sphériques (voir les références indiquées dans [HT]). Notons H_k l'espace des polynômes harmoniques homogènes de degré k sur \mathbb{R}^n . Rappelons que H_k est un K -module simple. Posons $Q = \sum x_i^2$. Pour $p+k$ pair définissons le K -module $V_{p,k} = Q^{-(p+k)/2} H_k$, et décrétons que $V_{p,k}$ est nul pour les autres valeurs de (p, k) . On a alors $V_{p,k} \subset V_p$ et $V_p = \bar{\bigoplus}_k V_{p,k}$ (somme directe topologique de K -modules simples non isomorphes deux à deux). Le résultat suivant est énoncé (sous une forme plus générale) par Gruber et Klimyk dans [GK]. Les auteurs ne démontrent pas leur théorème mais indiquent que la preuve est similaire à celle d'un résultat

analogue paru en russe dans la revue *Naukova dumka* éditée à Kiev. J'ai crû être agréable au lecteur en donnant une preuve aussi brève qu'élémentaire.

PROPOSITION 1.2. (Gruber et Klimyk [GK]). *Les G -sous-modules non triviaux de V_p sont*

$$\bigoplus_{k \leq -p} V_{p,k} \text{ si } p \leq 0,$$

$$\bar{\bigoplus}_{k \geq p-n+2} V_{p,k} \text{ si } n \text{ est pair et } p \geq n.$$

Soit $\pi_{p,k}$ la projection canonique de $V_p = \bar{\bigoplus}_k V_{p,k}$ sur $V_{p,k}$. Les champs $x_i \partial_j$ formant une base de \mathfrak{g} , l'action de \mathfrak{g} sur V_p est entièrement déterminée par les applications de "transition" $\varphi_{p,m,k,i,j} : H_k \rightarrow H_m$ données par

$$\varphi_{p,m,k,i,j}(f) = Q^{(p+m)/2} \pi_{p,m}(x_i \partial_j Q^{-(p+k)/2} f).$$

Calculer le treillis des sous-modules de V_p revient donc à décider pour quelles valeurs de (p, k, m) les applications $\varphi_{p,m,k,i,j}$ sont nulles pour tout i, j . C'est ce que nous allons faire.

LEMME 1.3.

- (a) Si $m \notin \{k-2, k, k+2\}$, alors $\varphi_{p,m,k,i,j} = 0$. En d'autres termes on a $\mathfrak{g}V_{p,k} \subset V_{p,k+2} + V_{p,k} + V_{p,k-2}$.
- (b) $\mathfrak{g}V_{p,k} \subset V_{p,k} + V_{p,k-2} \Leftrightarrow \varphi_{p,k+2,k,i,j} H_k = 0 \forall i, j \Leftrightarrow p = 0$.
- (c) $\mathfrak{g}V_{p,k} \subset V_{p,k+2} + V_{p,k} \Leftrightarrow \varphi_{p,k-2,k,i,j} H_k = 0 \forall i, j \Leftrightarrow k = p - n + 2$ ou $k \leq 1$,

Posons $\Delta = \Sigma \partial_i^2$. On utilisera librement les relations

$$[\partial_i, x_j] = \delta_{i,j}, \quad [\partial_i, Q] = 2x_i, \quad [\Delta, x_i] = 2\partial_i, \quad [\Delta, Q] = 4E + 2n.$$

Définissons $\Psi_{+,k,i} : H_k \rightarrow H_{k+1}$ et $\Psi_{-,k,i} : H_k \rightarrow H_{k-1}$ par $\Psi_{-,k,i} = (n + 2k - 2)^{-1} \partial_i$ (avec la convention $\Psi_{-,0,i} = 0$) et $\Psi_{+,k,i} = x_i - Q\Psi_{-,k,i}$.

LEMME 1.4.

- (a) $x_i h = \Psi_{+,k,i} h + Q\Psi_{-,k,i} h \forall h \in H_k$,
- (b) $\varphi_{p,k+2,k,i,j} = -(p+k)\Psi_{+,k+1,i}\Psi_{+,k,j}$,
 $\varphi_{p,k,k,i,j} = \Psi_{+,k-1,i}\partial_j - (p+k)(\Psi_{-,k+1,i}\Psi_{+,k,j} + \Psi_{+,k-1,i}\Psi_{-,k,j})$,
 $\varphi_{p,k-2,k,i,j} = \Psi_{-,k-1,i}(\partial_j - (p+k)\Psi_{-,k,j})$,
- (c) $\Psi_{+,k,i} h = 0 \forall i \Leftrightarrow h = 0$.
 $\Psi_{-,k,i} H_k = 0 \forall i \Leftrightarrow k = 0$,
 $(\partial_j - (p+k)\Psi_{-,k,j}) H_k = 0 \forall i \Leftrightarrow k = p - n + 2$ ou $k = 0$.

Preuve de (1.4.a). Pour $h \in H_k$ on a $\Delta x_i h = 2\partial_i h$ et donc $\Delta^2 x_i h = 0$. Par suite h est de la forme $h = \Psi_{+,k,i} h + Q\Psi_{-,k,i} h$ avec $\Psi_{+,k,i} h \in H_{k+1}$, $\Psi_{-,k,i} h \in H_{k-1}$. D'où $2\partial_i h = \Delta x_i h = \Delta Q\Psi_{-,k,i} h = (4k - 4 + 2n)\Psi_{-,k,i} h$. \square

Preuve de (1.3.a) et (1.4.b). On calcule $x_i \partial_j Q^{-(p+k)/2} h$ à l'aide de la règle de Leibniz et de (1.4.a). \square

Preuve de (1.4.c). Montrons $\Psi_{+,k,i} h = 0 \forall i \Leftrightarrow h = 0$. Soient $k \geq 1$ (le cas $k = 0$ est trivial) et $h \in H_k$ tel que $\Psi_{+,k,i} h = 0 \forall i$. D'après la définition de $\Psi_{+,k,i}$ cela est équivalent à $(n + 2k - 2)x_i h = Q\partial_i h \forall i$. En multipliant par dx_i et en sommant sur i on obtient $(n + 2k - 2)/2h dQ = Q dh$. On en déduit aisément $h = 0$, comme désiré. Les deux dernières assertions sont immédiates. \square

Preuve de (1.3.b) et (1.3.c). Ces relations découlent de (1.4.b) et (1.4.c). \square

Preuve de (1.2.). La proposition résulte de (1.3). \square

2. Preuve du résultat principal

Soit d^* la codifférentielle euclidienne sur \mathbb{R}^n (rappel: $\Lambda^p = \bigwedge^p (\mathbb{C}^n)^*$). Posons

$$H^{p,k} = \{\omega \in H_k \otimes \Lambda^p \mid i(E)\omega = 0 = d^*\omega\} \forall 0 \leq p \leq n - 1, k \geq 1, p + k \text{ pair,}$$

$$X^{p,k} = Q^{-(p+k)/2} H^{p,k} \subset C^p \quad \forall 0 \leq p \leq n - 1, k \geq 1, p + k \text{ pair,}$$

$$B^{p,k} = dX^{p-1,k+1} \subset B^p \quad \forall 1 \leq p \leq n - 1, k \geq 0, p + k \text{ pair.}$$

Décrétons que les $H^{p,k}$, $X^{p,k}$, $B^{p,k}$ sont nuls pour les autres valeurs de (p, k) . Enfin, pour $0 \leq p \leq n - 1$, notons X^p l'adhérence de $\Sigma_k X^{p,k}$ dans C^p .

THÉORÈME 2.1. (Ikeda & Tanaguchi, [IT, §6], voir aussi Boerner [Boe, 7.5]; ce théorème devrait pouvoir également se déduire de Howe [H]).

- (a) $H^{p,k} \approx X^{p,k} \approx B^{p+1,k-1} \forall 0 \leq p \leq n - 2, B^{p,0} \approx \Lambda^p \forall p$ pair (K -isomorphismes),
- (b) les $X^{p,k}$, pour $0 \leq p \leq n - 1, k \geq 1, p + k$ pair, sont des K -modules simples deux à deux non-isomorphes,
- (c) $\dim B^{p,k} \geq 2$,
- (d) $X_p = \bar{\bigoplus}_k X^{p,k} \forall 0 \leq p \leq n - 1; B^p = \bar{\bigoplus}_k B^{p,k}; C^p = B^p \oplus X^p \forall 1 \leq p \leq n - 1$ (somme directe de K -modules). \square

LEMME 2.2. Pour $1 \leq p \leq n - 1$ on a

- (a) $(\mathfrak{g}X^{p,k}) \cap X^p \subset X^{p,k+2} + X^{p,k} + X^{p,k-2}$,
 $\mathfrak{g}X^{p,k} \subset X^{p,k+2} + X^{p,k} + X^{p,k-2} + B^p$,
 $\mathfrak{g}B^{p,k} \subset B^{p,k+2} + B^{p,k} + B^{p,k-2}$,
 (b) B^p est un G -module simple.

Preuve. Les $X^{p,r}$, $r \geq 1$, $r + p$ pair, étant les composantes isotypiques de X^p par (2.1), on a $(\mathfrak{g}X^{p,k}) \cap X^p = \Sigma_r ((\mathfrak{g}X^{p,k}) \cap X^{p,r})$. Supposons $r \notin \{k + 2, k, k - 2\}$. Il vient

$$\begin{aligned} (\mathfrak{g}X^{p,k}) \cap X^{p,r} &\subset (\mathfrak{g}(V_{p,k} \otimes \Lambda^p)) \cap (V_{p,r} \otimes \Lambda^p) \quad \text{car } X^{p,q} \subset V_{p,q} \otimes \Lambda^p, \\ &\subset ((V_{p,k+2} + V_{p,k} + V_{p,k-2}) \otimes \Lambda^p) \cap (V_{p,r} \otimes \Lambda^p) \quad \text{par (1.3.a)} \\ &= ((V_{p,k+2} + V_{p,k} + V_{p,k-2}) \cap V_{p,r}) \otimes \Lambda^p \\ &= 0 \quad \text{par l'hypothèse sur } r. \end{aligned}$$

Cela prouve la première inclusion de (a). Les autres découlent alors de (2.1). Montrons que B^p est simple. Pour tout sous-module $V \subset B^p$ posons $S(V) = \{k \in \mathbb{Z} \mid 0 \neq B^{p,k} \subset V\}$. Par (2.1) on a alors $V = \bar{\Sigma}_{k \in S(V)} B^{p,k}$. D'après (2.2.a), B^p est simple si et seulement si $\mathfrak{g}B^{p,k} \supset B^{p,k+2} + B^{p,k-2}$ pour tout $k \in S(B^p)$. Supposons par l'absurde que cette inclusion est prise en défaut pour un certain $k \in S(B^p)$. Cela signifie que l'on a $B^{p,k+2} \not\subset \mathfrak{g}B^{p,k}$ ou $B^{p,k-2} \not\subset \mathfrak{g}B^{p,k}$ pour un certain $k \in S(B^p)$. Dans le premier cas $\Sigma_{i \leq k} B^{p,i}$ est un sous-module non nul de dimension finie; dans le deuxième cas $\bar{\Sigma}_{j \leq k} B^{p,j}$ est un sous-module propre de codimension finie. Or d'après la théorie des représentations des groupes semi-simples réels (voir par exemple [BW, III.3.2]), tous les sous-quotients de C^p ont le même caractère infinitésimal χ , et χ est le caractère du module trivial. De plus la théorie des représentations des algèbres de Lie semi-simples complexes (voir par exemple [D, ch. 7]), dit qu'il n'y a que deux G -modules de dimension finie dont le caractère est χ , à savoir $\mathbb{C} = \Lambda^0$ et Λ^n . Ces deux modules étant de dimension un, cela contredit (2.1). \square

LEMME 2.3.

- (a) $\text{Hom}_G(B^{p+1}, C^p) = 0$,
 (b) $\text{Hom}_G(C^p, B^p) = 0$.

Preuve. Les égalités (a) et (b) sont équivalentes. Supposons p pair et montrons

(a). En posant $\Lambda_p = (\Lambda^p)^*$ on a

$$\begin{aligned} \text{Hom}_G(B^{p+1}, C^p) &\subset \text{Hom}_G(B^{p+1}, V_p \otimes \Lambda^p) && \text{car } C^p \subset V_p \otimes \Lambda^p \text{ par (1.1.b),} \\ &\approx \text{Hom}_G(B^{p+1} \otimes \Lambda_p, V_p) && \text{par propriété générale du produit tensoriel,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\subset \text{Hom}_K(B^{p+1} \otimes \Lambda_p, V_{p,0}) && \text{car } V_p \text{ est simple par (1.2) et } \\
 & && V_{p,0} \neq 0, \\
 &\approx \text{Hom}_K(B^{p+1} \otimes \Lambda_p, \mathbb{C}) && \text{car } V_{p,0} \approx \mathbb{C}, \\
 &\approx \text{Hom}_K(B^{p+1}, \Lambda^p) && \text{par propriété générale du pro-} \\
 & && \text{duit tensoriel,} \\
 &\approx \text{Hom}_K(B^{p+1}, B^{p,0}) && \text{par (2.1.a),} \\
 &= 0 && \text{par (2.1.a) et (2.1.b).}
 \end{aligned}$$

Supposons p impair et montrons (b). Le raisonnement étant le “dual” du précédent, on omettra les justifications:

$$\begin{aligned}
 \text{Hom}_G(C^p, B^p) &\subset \text{Hom}_G(V_{p+1} \otimes \Lambda^{p+1}, B^p) \\
 &\approx \text{Hom}_G(V_{p+1}, B^p \otimes \Lambda_{p+1}) \subset \text{Hom}_K(V_{p+1,0}, B^p \otimes \Lambda_{p+1}) \\
 &\approx \text{Hom}_K(\mathbb{C}, B^p \otimes \Lambda_{p+1}) \approx \text{Hom}_K(\Lambda^{p+1}, B^p) \approx \text{Hom}_K(B^{p+1,0}, B^p) = 0. \quad \square
 \end{aligned}$$

Preuve du théorème. Le point (a) résulte de (2.2.b) et (2.3). Le point (b) découle du point (a) et de (2.1.b). □

3. Formes différentielles sur la sphère

Pierre de la Harpe m’a suggéré le raffinement suivant. Le groupe G agit sur la sphère S^{n-1} , vue comme l'espace des demi-droites issues de 0 dans \mathbb{R}^n , avec noyau \mathbb{R}^+ . Soient \mathcal{C}^p le G -module des p -formes sur S^{n-1} et $\sigma \in G$ l'homothétie de rapport -1 . Posons $C'^p = \{\omega \in C^p \mid \sigma\omega = -\omega\}$. On a alors $\mathcal{C}^p = C^p \oplus C'^p$, somme directe de complexes de G -modules. On a alors, avec des notations évidentes:

THÉORÈME. *Les seuls sous-espaces G -invariants fermés non-triviaux de C'^p sont:*

$$\begin{aligned}
 &B'^p = Z'^p \text{ si } 1 \leq p \leq n - 2, \\
 &B'^{n-1} \text{ si } n \text{ est impair.}
 \end{aligned}$$

Preuve. Posons $V'_p = \{f \in C^\infty(U) \mid f(tx) = t^{-p}f(x) \text{ et } f(-x) = (-1)^{p+1}f(x) \forall t > 0, x \in U\}$. Recopions mot à mot la preuve du premier théorème en remplaçant systématiquement “pair” par “impair”; $C^p, Z^p, B^p, V_p, V_{p,k}, H^{p,k}, X^{p,k}, B^{p,k}$ respectivement par $C'^p, Z'^p, B'^p, V'_p, V'_{p,k}, H'^{p,k}, X'^{p,k}, B'^{p,k}$; et (1.2.d) par l'énoncé suivant: si n est impair et $p \geq n$, le seul G -sous-module non trivial de V'_p est $\bigoplus_{k \geq p-n+2} V'_{p,k}$; dans les autres cas V'_p est simple. □

REFERENCES

- [Boe] BOERNER, H., *Representations of groups*, North-Holland, 1963.
- [Bor] BOREL, A., *Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts*, Ann. Math. (2) 57 (1953), 115–207.
- [BW] BOREL, A. and WALLACH, N., *Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive Lie groups*, Ann. Math. Study 94, Princeton University Press, 1980.
- [D] DIXMIER, J., *Algèbres enveloppantes*, Gauthier-Villars, 1974.
- [G1] GAILLARD, P.-Y., *Transformation de Poisson de formes différentielles. Le cas de l'espace hyperbolique*, Comment. Math. Helv. 61 (1986), 581–616.
- [G2] GAILLARD, P.-Y., *Les p -extensions entre représentations simples de $SL(3, \mathbb{R})$ au voisinage du caractère trivial, et leurs cup-produits*, Ann. Fac. Sc. Toulouse, Vol. II, no 2, 1993, 233–251.
- [GK] GRUBER, B. and KLIMYK, A., *Representations of the group $GL(n, \mathbb{R})$ and $SU(n)$ in an $SO(n)$ basis*, J. Math. Phys. 22 (1981), 2762–2769.
- [H] HOWE, R., *Remarks on classical invariant theory*, TAMS 313 (1989), 539–570.
- [HC] HARISH-CHANDRA, *Representations of a semisimple Lie group on a Banach space, I*, TAMS 75 (1953), 185–243.
- [HL] HAEFLIGER, A. and LI BANGHE, *Currents on a circle invariant by a fuchsian group*, Lect. Notes in Math., vol. 1007, 1983, 369–378.
- [HT] HOWE, R. and TAN, E.-C., *Homogeneous functions on light cones: the infinitesimal structure of some degenerate principal series representations*, BAMS 28.1 (1993), 1–74.
- [IT] IKEDA, A. and TANAGUCHI, Y., *Spectra and eigenforms of the Laplacian on S^n and $P^n(\mathbb{C})$* , Osaka J. Math 15 (1978), 515–545.
- [W] WALLACH, N., *Real reductive Lie groups II*, Academic Press, 1992.

Département de Mathématiques, URA CNRS 750
Université de Nancy 1
BP 239
F-54506 Vandoeuvre-lès-Nancy cedex

Received February 7, 1994; November 8, 1994