

Théorèmes d'annulation sur certaines variétés projectives.

Autor(en): **Manivel, Laurent**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **71 (1996)**

PDF erstellt am: **01.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-53850>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Théorèmes d’annulation sur certaines variétés projectives

LAURENT MANIVEL

1. Introduction

Les conjectures de Hartshorne relatives aux sous-variétés de petite codimension des espaces projectifs ont suscité de nombreux travaux sur leurs voisinages infinitésimaux, et les complétions formelles des espaces projectifs ambiants le long de ces sous-variétés. Relier la géométrie d’une sous-variété à celle de l’espace projectif requiert, dans ce contexte, des théorèmes d’annulation pour les puissances symétriques du fibré normal.

Cependant, la cohomologie des puissances symétriques d’un fibré ample de rang plus grand que un ne s’annule en général que sous des conditions beaucoup moins favorables qu’on aurait pu l’espérer (voir comment [14] et [15] corrigent [5] sur ce point). Plus précisément, l’annulation

$$H^q(X, \Omega_X^p \otimes S^k E) = 0 \quad \text{si } p + q > n + k(r - 1),$$

où n est la dimension de X et r le rang du fibré vectoriel ample E [4, 11], est optimale, comme des exemples construits à partir de simples grassmanniennes permettent de le vérifier [11].

L’objet de cet article est de montrer que sur certaines variétés projectives, la cohomologie des fibrés associés à un fibré ample s’annule sous des conditions exceptionnellement favorables, meilleures même que celles que proposaient les conjectures “optimistes”, aujourd’hui invalidées, de Le Potier et de Sommese [17]. En contrepartie, ces résultats ne seront valides que sur une classe assez restreinte de variétés, dont l’archétype est l’espace projectif. Donnons l’énoncé suivant:

THÉORÈME. *Soit E un fibré vectoriel ample de rang r sur \mathbb{P}^n . Alors*

- (1) $H^q(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}^p \otimes S^k E) = 0$ si $q \geq r$,
- (2) $H^q(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}^p \otimes \wedge^j E) = 0$ si $q > r - j$,
- (3) $H^q(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}^p \otimes E^{\otimes m}) = 0$ si $q > r(r - 1)/2$.

Nous espérons qu’un tel théorème d’annulation ait des conséquences intéressantes quant à la géométrie des sous-variétés de \mathbb{P}^n . Nous montrerons comment en

faire usage dans le cas de sous-variétés définies comme lieux des zéros d'une section d'un fibré ample, pour déterminer leur groupe de Picard, ou retrouver des énoncés de type Barth-Lefschetz.

Pour ce qui est d'étendre notre résultat principal à d'autres variétés que les espaces projectifs, nous avons proposé la notion de fibré *uniformément nef*. Est uniformément nef, dit informellement, un fibré que l'on peut construire au moyen d'extensions ou de quotients par des fibrés en droites numériquement effectifs: nous montrons que ceci assure un comportement très agréable pour ce qui concerne l'annulation de la cohomologie de Dolbeault. Notre théorème d'annulation est alors valable sur toute variété dont le fibré tangent est uniformément nef: donc, en dehors des espaces projectifs, sur les variétés abéliennes, et toutes les variétés qu'il est possible de construire à partir de celles-ci par produits, revêtements étales ou fibrations en espaces projectifs de fibrés vectoriels numériquement plats. Nous montrerons également comment étendre notre résultat principal à l'ensemble des variétés toriques.

Dans une autre direction, nous nous intéresserons aux sous-variétés d'un espace projectif, dont le fibré normal se décompose en somme directe de fibrés de petit rang. Nous obtenons dans ce contexte un théorème d'annulation pour les puissances symétriques d'un fibré ample qui généralise le théorème précédent, avec un facteur correctif dépendant du rang maximal n_X des fibrés dont le fibré normal est la somme.

THÉORÈME. *Soit E un fibré vectoriel ample de rang r sur X . Alors pour tout entier k strictement positif,*

$$H^q(X, \Omega_X^p \otimes S^k E) = 0 \quad \text{si } q > (n_X + 1)(r - 1) + n_X(n - p).$$

On notera que l'entier n_X est nul pour un espace projectif, de sorte que l'on retrouve la première partie du théorème précédent, et que n_X vaut un pour une intersection complète. De plus, on a toujours la majoration $n_X \leq \text{codim } X$: le théorème précédent donne donc des résultats sur les variétés projectives de petite codimension.

2. Théorèmes d'annulation sur les variétés dont le fibré tangent est uniformément nef

2.1. Cohomologie de Dolbeault sur \mathbb{P}^n

Sur un espace projectif, on obtiendra des théorèmes d'annulation pour la cohomologie des fibrés amples beaucoup plus forts qu'en toute généralité, du fait de la structure bien particulière du fibré tangent. Notre outil essentiel sera une observation élémentaire:

PRINCIPE. Soit F un fibré vectoriel sur \mathbb{P}^n , et supposons qu'il existe un entier $q(F)$ tel que pour tout entier naturel m ,

$$H^q(\mathbb{P}^n, K_{\mathbb{P}^n} \otimes F(m)) = 0 \quad \text{si } q > q(F),$$

où l'on note $F(m)$ le produit tensoriel de F par le fibré en droites $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)$. Alors il en est de même pour toute la cohomologie de Dolbeault: pour tout entier p ,

$$H^q(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}^p \otimes F(m)) = 0 \quad \text{si } q > q(F).$$

Démonstration. C'est une conséquence des suites exactes de cohomologie dérivées de la suite exacte d'Euler

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \rightarrow V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \rightarrow T\mathbb{P}^n \rightarrow 0,$$

où $V = \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$ est de dimension $n + 1$. En effet, on en déduit des résolutions des puissances extérieures du fibré tangent par des sommes de fibrés en droites

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \rightarrow V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \rightarrow \wedge^2 V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(2) \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow \wedge^{n-p} V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(n-p) \rightarrow \wedge^{n-p} T\mathbb{P}^n \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Si l'on tensorise ce complexe par le fibré $K_{\mathbb{P}^n} \otimes F(m)$, on obtient une résolution de $\Omega_{\mathbb{P}^n}^p \otimes F(m)$, qui se dévise en des suites exactes courtes:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow E_{n-p-1} \rightarrow \wedge^{n-p} V \otimes K_{\mathbb{P}^n} \otimes F(n-p+m) \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^n}^p \otimes F(m) \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow E_{j-1} \rightarrow \wedge^j V \otimes K_{\mathbb{P}^n} \otimes F(j+l) \rightarrow E_{j-1} \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow K_{\mathbb{P}^n} \otimes F(m) \rightarrow V \otimes K_{\mathbb{P}^n} \otimes F(l+1) \rightarrow E_1 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Les suites exactes longues de cohomologie correspondantes donnent alors si $q > q(F)$:

$$H^q(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}^p \otimes F(m)) = H^{q+j}(\mathbb{P}^n, E_{n-p-j}) = H^{q+n-p}(\mathbb{P}^n, K_{\mathbb{P}^n} \otimes F(m)) = 0,$$

et notre principe est donc établi. □

2.2. Fibrés uniformément nef

Comme nous l'a suggéré J. P. Demailly, le phénomène qui permet, sur l'espace projectif, de démontrer le principe précédent, peut se formaliser de la façon

suivante. Si \mathcal{F} est la catégorie des fibrés vectoriels définis sur les variétés algébriques (ou analytiques) lisses complexes, désignons par \mathcal{C} la plus petite sous-catégorie de \mathcal{F} vérifiant les propriétés suivantes:

(1) si $0 \rightarrow S \rightarrow E \rightarrow Q \rightarrow 0$ est une suite exacte de fibrés vectoriels; alors

$$S, E \in \mathcal{C} \Rightarrow Q \in \mathcal{C} \quad \text{et} \quad S, Q \in \mathcal{C} \Rightarrow E \in \mathcal{C};$$

(2) si $E = S \oplus Q \in \mathcal{C}$ alors $S, Q \in \mathcal{C}$;

(3) si $f: Y \rightarrow X$ est un morphisme fini, et E est un fibré sur X , alors $E \in \mathcal{C}$ si et seulement si $f^*E \in \mathcal{C}$;

(4) \mathcal{C} contient tous les fibrés de la forme $E \otimes L$, où L est un fibré en droites numériquement effectif, et E un fibré vectoriel hermitien plat de rang quelconque.

Rappelons qu'un fibré E sur X est dit hermitien plat s'il provient d'une représentation unitaire du groupe fondamental $\pi_1(X)$. Un fibré élément de \mathcal{C} sera dit *uniformément nef*, dans la mesure où il est nécessairement nef, et où sa "positivité" est contrôlée par celle de fibrés en droites numériquement effectifs.

PROPRIÉTÉS

● La catégorie \mathcal{C} est stable par produit tensoriel.

En effet, les éléments de \mathcal{C} sont les fibrés que l'on peut construire à partir des "blocs fondamentaux" $E \otimes L$, E hermitien plat et L nef de rang un, en utilisant un nombre fini de fois les trois premières propriétés qui définissent \mathcal{C} . L'ensemble de ces blocs fondamentaux étant évidemment stable par produit tensoriel, il suffit de vérifier que pour tout $F \in \mathcal{C}$, si E se construit en appliquant ces propriétés à des objets de \mathcal{C} dont le produit tensoriel par F est encore dans \mathcal{C} , alors $E \otimes F \in \mathcal{C}$: ce qui est une évidence.

● Si $E \in \mathcal{C}$, alors pour tout entier naturel k , $S^k E \in \mathcal{C}$ et $\wedge^k E \in \mathcal{C}$.

En effet, ce qui vient d'être dit assure que $E^{\otimes k} \in \mathcal{C}$. Il suffit alors pour conclure d'appliquer la propriété 2 à ses facteurs directs $S^k E$ et $\wedge^k E$. Plus généralement, il en sera de même pour tout fibré associé à E et à une représentation de dimension finie de son groupe structural.

● Si $E \in \mathcal{C}$, et si $\pi: Z \rightarrow X$ est un morphisme surjectif lisse, alors $\pi^*E \in \mathcal{C}$.

C'est clair si E est produit d'un fibré hermitien plat par un fibré en droites numériquement effectif, ou s'il en est ainsi de son image réciproque par un morphisme fini $f: Y \rightarrow X$, puisqu'alors la seconde projection $Y \times_X Z \rightarrow Z$ est également finie. Il en est donc de même pour tout objet de \mathcal{C} .

- Si E admet une filtration telle que le fibré quotient gradué associé soit dans \mathcal{C} , alors $E \in \mathcal{C}$.

En effet, chacun des quotients des termes consécutifs de la filtration est aussi dans \mathcal{C} d'après 2, puis par récurrence, il en est de même de chacun des termes de la filtration d'après la seconde partie de 1. En particulier, \mathcal{C} contient les fibrés *numériquement plats*, c'est-à-dire, d'après [3], ceux qu'il est possible de filtrer de telle façon que les quotients successifs soient hermitiens plats.

Nous nous intéresserons particulièrement aux propriétés cohomologiques des fibrés uniformément nef.

PROPOSITION. *Considérons un fibré ample F de rang r sur une variété X de dimension n , et supposons qu'un fibré G , défini sur X , soit un objet de \mathcal{C} . Alors*

$$H^q(X, \Omega_X^p \otimes G \otimes F) = 0 \quad \text{si } p + q \geq n + r,$$

$$H^q(X, K_X \otimes G \otimes \wedge^k F) = 0 \quad \text{si } q > r - k.$$

Démonstration. En effet, il en est bien ainsi lorsque G est de la forme $E \otimes L$, où E est hermitien plat et L nef de rang un. Le premier de ces énoncés, par exemple, se déduit de l'isomorphisme

$$H^q(X, \Omega_X^p \otimes G \otimes F) \simeq H^q(\mathbb{P}(F^*), \Omega_{\mathbb{P}(F^*)}^p \otimes \pi^* E \otimes \mathcal{O}_F(1) \otimes \pi^* L),$$

où $\pi: \mathbb{P}(F^*) \rightarrow X$ est la projection naturelle. Le théorème de Kodaira-Nakano s'applique alors directement au membre de droite de cet isomorphisme, puisque le fibré en droites $\mathcal{O}_F(1) \otimes \pi^* L$ est ample sur $\mathbb{P}(F^*)$, alors que $\pi^* E$ est hermitien plat.

Pour passer à l'ensemble des objets de la catégorie \mathcal{C} , reste à vérifier que les propriétés 1, 2 et 3 permettent d'étendre ces résultats aux fibrés qui se construisent à partir des précédents: c'est évident pour 2, et pour 1, cela s'ensuit directement des suites exactes longues de cohomologie associées à une suite exacte courte. Pour ce qui est de 3, il suffit de remarquer que pour tout fibré H sur X , le morphisme

$$f^*: H^q(X, \Omega_X^p \otimes H) \rightarrow H^q(Y, \Omega_Y^p \otimes f^* H)$$

est injectif lorsque f est fini. □

2.3. Variétés à tangent uniformément nef

Nous nous intéresserons particulièrement à la classe \mathcal{U} des variétés projectives lisses complexes dont le fibré tangent est uniformément nef. Celles-ci se comportent

de manière très favorable quant à l'annulation de la cohomologie de Dolbeault des fibrés vectoriels. En effet, les puissances extérieures $\wedge^{n-p}TX$ sont également uniformément nef, et l'on obtient en raisonnant comme dans la section précédente le "principe" suivant.

PRINCIPE. *Soit F un fibré vectoriel sur X , et $q(F)$ un entier tel que pour tout fibré G sur X appartenant à \mathcal{C} ,*

$$H^q(X, K_X \otimes F \otimes G) = 0 \quad \text{si } q > q(F).$$

Alors il en est de même en cohomologie de Dolbeault: pour tout entier p ,

$$H^q(X, \Omega_X^p \otimes F \otimes G) = 0 \quad \text{si } q > q(F).$$

La classe \mathcal{U} des variétés à fibré uniformément nef est évidemment restreinte. Elle contient cependant les exemples importants que sont les espaces projectifs et les variétés abéliennes. Elle est stable, de surcroît, par un certain nombre d'opérations naturelles.

PROPOSITION

- (1) *La classe \mathcal{U} contient les espaces projectifs et les variétés abéliennes.*
- (2) *Si X et Y sont dans \mathcal{U} , $X \times Y$ aussi.*
- (3) *Si $f: Y \rightarrow X$ est un revêtement étale fini, et si $X \in \mathcal{U}$, alors $Y \in \mathcal{U}$.*
- (4) *Si $X \in \mathcal{U}$, et si E_1, \dots, E_m sont des fibrés vectoriels numériquement plats sur X , alors $Y = \mathbb{P}(E_1^*) \times_X \cdots \times_X \mathbb{P}(E_m^*)$ est encore dans \mathcal{U} .*

Démonstration. La première assertion est une conséquence de la suite exacte d'Euler pour les espaces projectifs; les deux suivantes sont des évidences. Pour ce qui est de la dernière, supposons pour simplifier les notations que $Y = \mathbb{P}(E^*)$, où E est numériquement plat sur $X \in \mathcal{U}$. On dispose alors des suites exactes

$$0 \rightarrow T^v Y \rightarrow TY \rightarrow \pi^* TX \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow \pi^* E^* \otimes \mathcal{O}_E(1) \rightarrow T^v Y \rightarrow 0,$$

où $T^v Y$ est le fibré tangent vertical relativement à π . Comme E est numériquement plat, il en est de même de E^* , et le fibré en droites $\mathcal{O}_E(1)$ est nef sur Y . Donc $\pi^* E^* \otimes \mathcal{O}_E(1) \in \mathcal{C}$, donc $T^v Y$ également et $TY \in \mathcal{C}$ a fortiori. \square

Nous allons maintenant montrer que la cohomologie des fibrés vectoriels amples sur les variétés dont le tangent est uniformément nef, s'annule sous des conditions particulièrement favorables.

2.4. La suite spectrale de Borel et Le Potier

Rappelons brièvement de quelle manière sont démontrés la plupart des théorèmes d'annulation pour les fibrés vectoriels amples. Il s'agit essentiellement de faire usage du théorème d'annulation de Kodaira-Nakano pour les fibrés en droites naturellement définis sur les variétés de drapeaux du fibré considéré, disons E . La cohomologie de ces fibrés en droites doit d'autre part être reliée à celle, sur la base, de fibrés associés à E pour certaines représentations de son groupe structural $Gl(r, \mathbb{C})$.

C'est la *suite spectrale de Borel et Le Potier* qui établit ce lien. Il s'agit, pour construire cette suite spectrale, de remarquer que si $f: Y \rightarrow Z$ est un morphisme surjectif de variétés projectives lisses, le fibré Ω_Y^p des p -formes régulières sur Y peut être filtré selon le degré sur la base Z , autrement dit par les sous-fibrés

$$F^{t,p} = \Omega_Y^{p-t} \wedge f^* \Omega_Z^t.$$

Les quotients successifs de cette filtration sont les fibrés

$$G^{t,p} = F^{t,p} / F^{t+1,p} = \Omega_{Y/Z}^{p-t} \otimes f^* \Omega_Z^t,$$

où $\Omega_{Y/Z}^j$ désigne le fibré des j -formes relatives aux fibres de f . Pour tout faisceau \mathcal{F} sur Y , on obtient ainsi une filtration du complexe de Dolbeault, qui calcule les groupes de cohomologie $H^*(Y, \Omega_Y^p \otimes \mathcal{F})$. Ceux-ci sont donc l'aboutissement d'une suite spectrale, dont le terme d'ordre un s'écrit

$${}^p E_1^{t,q-t} = H^q(Y, G^{t,p} \otimes \mathcal{F}).$$

A leur tour, ces groupes de cohomologie sont susceptibles d'être déterminés via la suite spectrale de Leray, dont le terme d'ordre deux est en l'occurrence

$${}^{t,p} E_2^{i,j} = H^i(Z, \Omega_Z^t \otimes H^j(Y/Z, \Omega_{Y/Z}^{p-t} \otimes \mathcal{F})),$$

où les groupes de cohomologie relative $H^j(Y/Z, \Omega_{Y/Z}^s \otimes \mathcal{F})$, désignent, avec un léger abus de notations, les images directes supérieures par f du faisceau $\Omega_{Y/Z}^s \otimes \mathcal{F}$ sur Y .

Si l'on est capable de comprendre de manière suffisamment précise ces groupes de cohomologie relative, lorsque Y est par exemple une variété de drapeaux de E et \mathcal{F} un fibré en droites, on pourra obtenir ainsi, dans un premier temps, des théorèmes d'annulation pour la cohomologie du produit tensoriel K_Z par *certaines* fibrés associés à E : par exemple ses puissances extérieures (théorèmes de Le Potier [9]), ou le produit de ses puissances symétriques par son fibré déterminant (théo-

rème de Griffiths [6]). Si l'on veut atteindre dans de bonnes conditions d'autres fibrés associés, par exemple les puissances symétriques de E , il est alors indispensable de pouvoir annuler la cohomologie de Dolbeault des fibrés dont on contrôle la cohomologie du produit par le canonique. C'est ce qui fait l'intérêt du principe que nous venons d'énoncer.

2.5. Puissances symétriques et extérieures

Soit V un espace vectoriel complexe de dimension d . Nous noterons $S^{(k|j+1)}V$ le noyau de l'opérateur de contraction

$$S^k V \otimes \wedge^j V \xrightarrow{\otimes id_V} S^k V \otimes V \otimes V^* \otimes \wedge^j V \rightarrow S^{k+1} V \otimes \wedge^{j-1} V,$$

composé du produit tensoriel par l'identité $id_V \in V \otimes V^* = \text{End } V$, et des contractions naturelles $S^k V \otimes V \rightarrow S^{k+1} V$ et $V^* \otimes \wedge^j V \rightarrow \wedge^{j-1} V$.

Cet espace vectoriel $S^{(k|j)}V$ définit une représentation irréductible du groupe linéaire $Gl(V)$, et le produit tensoriel d'une puissance symétrique par une puissance extérieure de V se décompose en

$$S^k V \otimes \wedge^j V = S^{(k|j+1)}V \oplus S^{(k+1|j)}V.$$

Notons de plus que $S^{(k|1)}V = S^k V$ et $S^{(1|j)}V = \wedge^j V$, alors que $S^{(k|j)}V = 0$ si j ou k est nul, ou si $j > \dim V$. Ces espaces vectoriels sont des groupes de cohomologie de Dolbeault de puissances du fibré en droites quotient sur l'espace projectif des hyperplans de V ([10]; c'est aussi une conséquence du théorème de Borel-Weil-Bott):

LEMME. *On a l'isomorphisme de $Gl(V)$ -modules, si $k \geq 0$,*

$$H^q(\mathbb{P}(V^*), \Omega_{\mathbb{P}(V^*)}^p \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^*)}(k)) \simeq \delta_{q,0} S^{(k-p|p+1)}V.$$

On désigne ici par $\delta_{i,j}$ le symbole de Kronecker. Nous en déduisons le théorème d'annulation suivant:

THÉORÈME. *Soit X une variété dont le fibré tangent soit uniformément nef. Soient E_1, \dots, E_m des fibrés vectoriels amples, de rangs respectifs r_1, \dots, r_m , et L un fibré en droites numériquement effectif sur X . Alors*

$$H^q(X, \Omega_X^p \otimes S^{(k_1|j_1)}E_1 \otimes \dots \otimes S^{(k_m|j_m)}E_m \otimes L) = 0 \quad \text{si } q > \sum_{i=1}^m (r_i - j_i).$$

De même si les fibrés E_1, \dots, E_m sont nef, et si le fibré en droites L est ample.

COROLLAIRE. *Si E est ample (resp. numériquement effectif) de rang r , et si L est un fibré en droites nef (resp. ample) sur X à tangent uniformément nef, alors*

$$H^q(X, \Omega_X^p \otimes \wedge^j E \otimes L) = 0 \quad \text{si } q > r - j,$$

$$H^q(X, \Omega_X^p \otimes S^k E \otimes L) = 0 \quad \text{si } q \geq r,$$

les entiers j et k étant supposés strictement positifs. Plus généralement, pour $m \geq 0$,

$$H^q(X, K_X \otimes TX^{\otimes m} \otimes S^k E \otimes L) = 0 \quad \text{si } q \geq r.$$

REMARQUES. En particulier, on obtient sur l'espace projectif les deux premiers tiers du premier théorème de notre introduction. J'ignore dans quelle mesure le théorème précédent peut être considéré comme optimal. On notera que le tangent du projectif est ample, et que

$$H^{n-1, n-1}(\mathbb{P}^n) = H^{n-1}(\mathbb{P}^n, K_{\mathbb{P}^n} \otimes T\mathbb{P}^n) \neq 0.$$

Les résultats précédents, obtenus, insistons sur ce fait, pour des variétés bien particulières, sont respectivement plus forts que la conjecture de Sommese [17],

$$H^q(Y, \Omega_Y^p \otimes \wedge^j E \otimes L) = 0 \quad \text{si } p + q > n + r - j,$$

et le théorème, malheureusement inexact, énoncé par Faltings [5],

$$H^q(Y, \Omega_Y^p \otimes S^k E \otimes L) = 0 \quad \text{si } p + q \geq n + r.$$

Rappelons que des contre-exemples à la première ont été donnés par Schneider et Demailly [2], et que le second a dû baisser pavillon devant l'analyse de [14]. Il n'est pas même vrai, en général, que la cohomologie des puissances symétriques doive s'annuler sous une hypothèse du type suivant:

$$H^q(Y, \Omega_Y^p \otimes S^k E \otimes L) = 0 \quad \text{si } p + q \geq n + \varphi(r),$$

et des exemples construits à partir du fibré quotient sur des grassmanniennes, montrent qu'on ne peut espérer mieux, en général, que

$$H^q(Y, \Omega_Y^p \otimes S^k E \otimes L) = 0 \quad \text{si } p + q > n + k(r - 1).$$

Ce résultat est un cas particulier des théorèmes démontrés dans [11].

Démonstration du théorème. Les entiers j_1, \dots, j_m étant supposés strictement positifs, on procèdera par récurrence descendante sur la somme $j = j_1 + \dots + j_m - m$. Soit Y le produit fibré des variétés des hyperplans de E_1, \dots, E_m , et π sa projection sur X :

$$Y = \mathbb{P}(E_1^*) \times_X \dots \times_X \mathbb{P}(E_m^*) \xrightarrow{\pi} X.$$

Définissons sur Y le fibré en droites

$$\mathcal{L} = f_1^* \mathcal{O}_{E_1}(k_1 + j_1 - 1) \otimes \dots \otimes f_m^* \mathcal{O}_{E_m}(k_m + j_m - 1) \otimes \pi^* L,$$

où f_i est la projection sur le i -ème facteur de Y . Ce fibré en droites est ample sous l'une ou l'autre hypothèse du théorème.

Considérons les termes d'ordre deux de la suite spectrale de Leray associée aux termes d'ordre un de la suite spectrale de Borel et Le Potier de \mathcal{L} :

$${}^{p,p-t}E_2^{i,j} = H^i(X, \Omega_X^{p-t} \otimes H^j(Y/X, \Omega_{Y/X}^t \otimes \mathcal{L})).$$

La fibration π étant localement triviale, les groupes $H^j(Y/X, \Omega_{Y/X}^t \otimes \mathcal{L})$ de cohomologie relative se calculent fibre à fibre. Chacune de ces fibres est un produit d'espaces projectifs, son fibré cotangent et ses puissances extérieures se décomposent donc en conséquence. Utilisant la formule de Künneth et le lemme 2.1, on obtient aisément la dégénérescence de la suite spectrale de Leray, et l'expression suivante du terme d'ordre un de la suite spectrale de Borel et Le Potier:

$${}^p E_1^{p-t, q-p+t} = \bigoplus_{t_1 + \dots + t_m = t+m} H^q(X, \Omega_X^{p-t} \otimes (\bigotimes_{i=1}^m \mathcal{S}^{(k_i + j_i - t_i | t_i)} E_i) \otimes L).$$

Posons maintenant $p = n + j$, et considérons les morphismes cobords

$${}^p d_h^{n-h, q-n+h-1} : {}^p E_h^{n-h, q-n+h-1} \rightarrow {}^p E_h^{n, q-n}.$$

L'hypothèse de récurrence implique que pour tout $h \geq 1$, le terme d'ordre un de la suite spectrale ${}^p E_1^{n-h, q-n+h-1}$ est nul pour $q - 1 > \sum_{i=1}^m (r_i - j_i) - h$: il en est donc de même de ${}^p E_h^{n-h, q-n+h-1}$. Les morphismes cobords considérés sont donc tous nuls si $q > \sum_{i=1}^m (r_i - j_i)$, ce qui implique l'isomorphisme

$${}^p E_1^{n, q-n} = {}^p E_\infty^{n, q-n}.$$

Mais ce dernier terme est un quotient d'une filtration de $H^q(Y, \Omega_Y^{n+j} \otimes \mathcal{L})$, qui s'annule, en vertu du théorème de Kodaira-Nakano et de l'amplitude de \mathcal{L} , dès que

$n + q + j > \dim Y = n + \sum_{i=1}^m (r_i - 1)$. On en déduit l'annulation

$$H^q(X, K_X \otimes S^{(k_1|j_1)}E_1 \otimes \cdots \otimes S^{(k_m|j_m)}E_m \otimes L) = 0 \quad \text{si } q > \sum_{i=1}^m (r_i - j_i),$$

ce groupe de cohomologie étant un facteur direct de ${}^pE_1^{n,q-n}$. Enfin, il en est de même pour toute la cohomologie de Dolbeault selon le principe énoncé en 2.1. \square

REMARQUE. Il faut noter que les idées de cette section peuvent s'adapter à des situations plus générales que celles que nous avons examinées. Il suffit en effet que le fibré tangent, sans être forcément uniformément nef, puisse se construire à partir de fibrés en droites numériquement effectifs, et de suites exactes courtes, pour que l'on puisse obtenir des théorèmes d'annulation. Plus précisément, imaginons que l'on dispose de suites exactes de fibrés vectoriels

$$0 \rightarrow A_i \rightarrow B_i \rightarrow C_i \rightarrow 0, \quad 1 \leq i \leq s,$$

dans lesquelles deux de ces fibrés sont sommes directes de fibrés en droites numériquement effectifs, et de fibrés A_j , B_j ou C_j pour $j < i$. Notons E_i le troisième de ces fibrés, et disons que la suite exacte ci-dessus est de type a si $E_i = A_i$. Si $E_s = TX$, et si, parmi les suites exactes qui permettent de le construire, t sont de type a (TX est uniformément nef lorsque $t = 0$), on obtient sur X l'annulation

$$H^q(X, \Omega_X^p \otimes S^k E) = 0 \quad \text{si } q > t(n-p) + (t+1)(r-1),$$

pour tout fibré ample E de rang r .

Par exemple, notons \mathcal{Q}_n la quadrique des droites isotropes de $V \simeq \mathbb{C}^{n+2}$ relativement à une forme bilinéaire symétrique non dégénérée. Si L est le fibré en droites tautologique sur \mathcal{Q}_n , son dual est le générateur ample, que l'on notera donc aussi $\mathcal{O}(1)$, du groupe de Picard de la quadrique. De plus son orthogonal L^\perp est de rang $n+1$, et l'on a un isomorphisme $T\mathcal{Q}_n \simeq L^\perp/L \otimes \mathcal{O}(1)$, Ceci permet d'obtenir une description adéquate du fibré tangent de la quadrique, sous la forme des deux suites exactes

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow L^\perp \otimes \mathcal{O}(1) \rightarrow V \otimes \mathcal{O}(1) \rightarrow \mathcal{O}(2) \rightarrow 0, \\ 0 &\rightarrow \mathcal{O} \rightarrow L^\perp \otimes \mathcal{O}(1) \rightarrow T\mathcal{Q}_n \rightarrow 0, \end{aligned}$$

dont la première est de type a . On verra (Section 4.1) que le théorème d'annulation qui s'ensuit s'étend à toutes les intersections complètes de l'espace projectif.

3. Sur certaines sous-variétés de l'espace projectif

3.1. La cohomologie du fibré normal

On désignera désormais par X une sous-variété de codimension r de \mathbb{P}^n , définie comme lieu des zéros d'une section d'un fibré ample E de rang r sur \mathbb{P}^n , transverse à la section nulle. Le fibré normal à X s'identifie alors à la restriction de E . Nos théorèmes d'annulation pour la cohomologie de E sur \mathbb{P}^n ont pour conséquence sur X le résultat suivant:

THÉORÈME. $H^q(X, S^k E^* \otimes \mathcal{O}_X(m)) = 0$ si $k > 0$, $q < \dim X$ et $m \leq 0$.

Démonstration. Supposons pour alléger un peu les notations que $m = 0$. La section globale de E sur \mathbb{P}^n dont X est le lieu des zéros définit un complexe de Koszul

$$0 \rightarrow \wedge^r E^* \rightarrow \cdots \rightarrow E^* \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0.$$

Tensorisons ce complexe par $S^k E^*$. Comme le produit tensoriel $S^k E^* \otimes \wedge^j E^*$ se décompose en somme directe de $S^{(k|j+1)} E^*$ et $S^{(k+1|j)} E^*$, le théorème 1.2 appliqué au seul fibré E permet d'obtenir, après dualité de Serre,

$$H^{q+j}(\mathbb{P}^n, S^k E^* \otimes \wedge^j E^*) = 0, \quad \text{si } q < n - r, \quad 0 \leq j \leq r.$$

Les suites exactes de cohomologie associées à la résolution précédente de $S^k E^* \otimes \mathcal{O}_X$ impliquent alors bien que $H^q(X, S^k E^*) = 0$ si $q < n - r = \dim X$. \square

Un tel théorème d'annulation admet, selon Hartshorne [7], des conséquences, entre autres de nature topologique, que nous allons maintenant examiner.

3.2. Le groupe de Picard

PROPOSITION. Si $\dim X > \text{codim } X$, et si X n'est pas une surface dans \mathbb{P}^3 ,

$$\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}\mathcal{O}_X(1).$$

Démonstration. Sous cette hypothèse, on sait que tout fibré en droites sur la complétion formelle \mathbb{P}_X^n de \mathbb{P}^n le long de X , provient d'un fibré en droites sur \mathbb{P}^n . Il s'agit donc de démontrer que l'homomorphisme de restriction

$$\text{Pic}(\mathbb{P}_X^n) \rightarrow \text{Pic}(X)$$

est un isomorphisme. Si \mathcal{I}_X est le faisceau d'idéaux de X , et X_k son voisinage infinitésimal d'ordre k , il suffit donc de vérifier que chaque homomorphisme de restriction

$$\text{Pic}(X_k) \rightarrow \text{Pic}(X_{k-1})$$

est un isomorphisme. Considérons pour cela les suites exactes

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_X^k / \mathcal{I}_X^{k+1} \rightarrow \mathcal{O}_{X_k}^* \rightarrow \mathcal{O}_{X_{k-1}}^* \rightarrow 0.$$

La suite exacte longue de cohomologie correspondante montre que l'isomorphisme désiré est conséquence de l'annulation de $H^q(\mathbb{P}^n, \mathcal{I}_X^k / \mathcal{I}_X^{k+1})$ pour $q = 1$ et 2 . Mais $\mathcal{I}_X^k / \mathcal{I}_X^{k+1} = S^k E^* \otimes \mathcal{O}_X$, de sorte que cette annulation résulte du théorème 3.1 pour $\dim X \geq 3$. \square

REMARQUE. La restriction imposant à X de n'être pas une surface de \mathbb{P}^3 , est indispensable, puisqu'une quadrique de \mathbb{P}^3 possède un groupe de Picard de rang deux.

3.3. La dimension cohomologique du complémentaire

LEMME. *La variété X est connexe, et $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ pour $0 < i < \dim X$.*

Démonstration. L'argument est le même que dans la démonstration du théorème ci-dessus, où l'on fait $k = 0$. \square

La résultat suivant est connu pour les intersections complètes, et généralise la propriété qu'a le complémentaire d'une hypersurface de \mathbb{P}^n d'être un ouvert affine: soit de manière équivalente, d'après un théorème de Serre, d'avoir une dimension cohomologique nulle.

THÉORÈME. *La dimension cohomologique de $U = \mathbb{P}^n - X$ est strictement inférieure à la codimension de X .*

Démonstration. D'après [8, Proposition 2.9], il suffit de vérifier que les applications

$$H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \rightarrow H^i(\mathbb{P}_X^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_X^n})$$

sont des isomorphismes en degré $i < \dim X$, \mathbb{P}_X^n désignant la complétion formelle de \mathbb{P}^n le long de X .

Soit X_k le voisinage infinitésimal de X d'ordre k , $\mathcal{O}_{X_k} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} / \mathcal{I}_X^{k+1}$ son faisceau structural, où \mathcal{I}_X est le faisceau d'ideaux de X . On a des suites exactes

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_X^k / \mathcal{I}_X^{k+1} \rightarrow \mathcal{O}_{X_k} \rightarrow \mathcal{O}_{X_{k-1}} \rightarrow 0,$$

et $\mathcal{I}_X^k / \mathcal{I}_X^{k+1} = S^k E^* \otimes \mathcal{O}_X$ n'a pas de cohomologie en degré inférieur à la dimension de X , de sorte que les applications naturelles

$$H^i(X_k, \mathcal{O}_{X_k}) \rightarrow H^i(X_{k-1}, \mathcal{O}_{X_{k-1}})$$

sont des isomorphismes en degré $i < \dim X - 1$, et demeurent injectives en degré $i = \dim X - 1$. Après passage à la limite, il en est donc de même des applications naturelles

$$H^i(\mathbb{P}_X^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_X^n}) \rightarrow H^i(X, \mathcal{O}_X).$$

Le lemme précédent permet d'en déduire que

$$H^0(\mathbb{P}_X^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_X^n}) = \mathbb{C},$$

$$H^i(\mathbb{P}_X^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_X^n}) = 0 \quad \text{si } 0 < i < \dim X.$$

Il en est bien de même pour l'espace projectif lui-même, et le théorème s'ensuit. \square

Cet énoncé, comme l'a également observé Hartshorne, permet d'obtenir des énoncés de type "Barth-Lefschetz" pour la cohomologie à coefficients complexes.

COROLLAIRE. *Le morphisme de restriction $H^i(\mathbb{P}^n, \mathbb{C}) \rightarrow H^i(X, \mathbb{C})$ est un isomorphisme en degré $i < \dim X$, et reste injectif en degré $i = \dim X$.*

On aurait pu retrouver ce résultat par la méthode de Schneider et Zintl [16].

4. Fibré normal et théorèmes d'annulation

L'objet de cette section est d'établir un lien entre les conditions d'annulation de la cohomologie de Dolbeault des fibrés vectoriels amples sur une variété projective, et les propriétés de décomposition de son fibré normal.

Commençons par une définition. Si X est une sous-variété lisse de dimension n de \mathbb{P}^N , soit n_X le plus petit entier tel que le fibré normal de X se décompose en

somme directe de fibrés de rang inférieur ou égal à n_X . Bien entendu, $n_X \leq \text{codim } X$, et cet entier vaut zéro pour un espace projectif. Il est d'autre part égal à un pour une intersection complète, cas que nous allons commencer par examiner en détail.

4.1. Cas des intersections complètes

On a remarqué que le principe 2.1 pouvait s'étendre, avec quelques modifications, dès que le fibré tangent de la variété peut se dévisser par des sommes de fibrés en droites numériquement effectifs. Si X est une intersection complète dans \mathbb{P}^n , on en obtiendra la variante suivante:

PRINCIPE. *Soit F un fibré vectoriel sur l'intersection complète X , et supposons qu'il existe un entier $q(F)$ tel que pour tout fibré en droites L nef sur X ,*

$$H^q(X, K_X \otimes F \otimes L) = 0 \quad \text{si } q > q(F).$$

Alors, pour la cohomologie de Dolbeault:

$$H^q(X, \Omega_X^p \otimes F \otimes L) = 0 \quad \text{si } p + q > \dim X + q(F).$$

Démonstration. La suite exacte normale s'écrit

$$0 \rightarrow TX \rightarrow T\mathbb{P}^n|_X \rightarrow N \rightarrow 0,$$

où le fibré normal N est somme directe de fibrés en droites très amples. On en déduit l'existence de complexes

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \wedge^{\dim X - p} TX \rightarrow \wedge^{\dim X - p} T\mathbb{P}^n|_X \rightarrow \wedge^{\dim X - p - 1} T\mathbb{P}^n|_X \otimes N \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow T\mathbb{P}^n|_X \otimes S^{\dim X - p - 1} N \rightarrow S^{\dim X - p} N \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Tensorisons ces complexes par $K_X \otimes F \otimes L$. Pour montrer que la cohomologie de Dolbeault de $F \otimes L$ s'annule en degré $p + q > \dim X + q(F)$, il suffit de vérifier que pour tout entier j compris entre zéro et $\dim X - p$, et tout fibré en droites nef M ,

$$H^{q-j}(X, K_X \otimes F \otimes \wedge^{\dim X - p - j} T\mathbb{P}^n|_X \otimes M) = 0$$

sous la même condition de degré. Pour $j = \dim X - p$, c'est une conséquence directe de l'hypothèse. Supposons donc que $j < \dim X - p$. Tenant compte de la suite

exacte d'Euler et de ses puissances extérieures, comme on l'a fait pour établir le principe 2.1, il suffit de vérifier que

$$H^{q-j'}(X, K_X \otimes F \otimes M) = 0$$

sous la même condition, pour $j' = j$ ou $j - 1$. Mais sous cette condition, $q - j' > q(F)$, et l'annulation précédente fait partie de nos hypothèses. \square

En procédant de même que sur l'espace projectif, on obtiendra par exemple le théorème d'annulation suivant:

THÉORÈME. *Si E est un fibré vectoriel ample de rang r , et L un fibré en droites numériquement effectif sur une intersection complète X dans \mathbb{P}^n , alors*

$$H^q(X, \Omega_X^p \otimes S^k E \otimes \wedge^j E \otimes L) = 0 \quad \text{si } p + q > \dim X + 2(r - j).$$

Plus généralement, pour tout entier $m \geq 0$,

$$H^q(X, K_X \otimes TX^{\otimes m} \otimes S^k E \otimes \wedge^j E \otimes L) = 0 \quad \text{si } q > m + 2(r - j).$$

REMARQUE. Il en va de même si X est une sous-variété d'une variété Y dont le fibré tangent est uniformément nef, sous l'hypothèse où son fibré normal est somme directe de fibrés qui sont des objets de \mathcal{C} . Par exemple, si X est une hypersurface d'un tore.

Nous démontrerons en fait un énoncé plus général, qui s'applique à d'autres variétés projectives que les intersections complètes, et en particulier à celles qui sont de petite codimension.

4.2. Sous-variétés dont le fibré normal est très décomposé

On entend par là, essentiellement, des variétés X telles que l'entier n_X que nous leur avons associé soit petit devant leur dimension. C'est sous cette condition que l'énoncé qui suit n'est pas vide de sens:

THÉORÈME. *Soient E_1, \dots, E_m des fibrés vectoriels amples, de rangs r_1, \dots, r_m , et L un fibré en droites numériquement effectif sur la variété projective X , de dimension n . Alors*

$$H^q(X, \Omega_X^p \otimes S^{(k_1|j_1)} E_1 \otimes \dots \otimes S^{(k_m|j_m)} E_m \otimes L) = 0$$

sous l'hypothèse suivante:

$$q > \sum_{i=1}^m (r_i - j_i) + n_X \left(n - p + \sum_{i=1}^m \min(r_i - j_i, k_i - 1) \right).$$

De même si E_1, \dots, E_m sont nefes et si L est ample.

REMARQUE. Sous cette dernière hypothèse, ce résultat s'étend aux sous-variétés X de variétés complexes dont le fibré tangent est uniformément nef, sous l'hypothèse où le fibré normal se décompose en somme de fibrés de rang inférieur ou égal à n_X . Ces facteurs directs sont en effet automatiquement nefes, et la démonstration qui va suivre fonctionne sans changement.

Démonstration du théorème. On procèdera par récurrence sur $\delta = \sum_{i=1}^m (k_i - 1)$, le nombre de fibrés impliqués étant arbitraire, et pour δ fixé par récurrence descendante sur p .

PREMIÈRE ÉTAPE. Pour $\delta = 0$ et $p = n$, il s'agit de vérifier que

$$H^q(X, K_X \otimes \wedge^{j_1} E_1 \otimes \cdots \otimes \wedge^{j_m} E_m \otimes L) = 0 \quad \text{si } q > \sum_{i=1}^m (r_i - j_i).$$

Ce résultat est une extension presque immédiate du théorème de Le Potier [9, 4], que l'on obtiendra par exemple en appliquant ce théorème au fibré ample F , somme directe des fibrés E_1, \dots, E_m . En effet, il vient

$$H^q(X, K_X \otimes \wedge^j F \otimes L) = 0 \quad \text{si } q > \sum_{i=1}^m r_i - j,$$

et pour $j = j_1 + \cdots + j_m$, $\wedge^{j_1} E_1 \otimes \cdots \otimes \wedge^{j_m} E_m$ est un facteur direct de $\wedge^j F$.

DEUXIÈME ÉTAPE. Montrons que si le théorème est vrai en degré $p = n$, δ étant fixé, il l'est aussi en degré p quelconque. On considèrera pour cela la suite exacte normale

$$0 \rightarrow TX \rightarrow T\mathbb{P}_X^N \rightarrow N \rightarrow 0.$$

Par hypothèse, le fibré normal N se décompose en une somme directe

$$N = \bigoplus_{i=1}^s N_i,$$

où les fibrés N_1, \dots, N_s sont amples, comme quotients de la restriction à X du fibré tangent à l'espace projectif ambiant, et sont de rang inférieur ou égal à n_X . Considérant les puissances extérieures de la suite exacte normale, et de la suite exacte d'Euler restreinte à X , comme on l'a déjà fait à plusieurs reprises, on constate qu'il suffit de vérifier que pour tout j compris entre zéro et $n - p$,

$$H^{q-j}(X, K_X \otimes S^{(k_1|j_1)}E_1 \otimes \dots \otimes S^{(k_m|j_m)}E_m \otimes S^jN \otimes L) = 0.$$

Mais la puissance symétrique S^jN est un facteur direct de la puissance tensorielle $N^{\otimes j}$, qui se décompose en somme directes de produits tensoriels des facteurs de N . Il suffit donc de vérifier que pour toute suite d'indice i_1, \dots, i_j ,

$$H^{q-j}(X, K_X \otimes S^{(k_1|i_1)}E_1 \otimes \dots \otimes S^{(k_m|i_m)}E_m \otimes N_{i_1} \otimes \dots \otimes N_{i_j} \otimes L) = 0.$$

Appliquons notre hypothèse aux fibrés $E_1, \dots, E_m, N_{i_1}, \dots, N_{i_j}$, pour k_{m+h} et j_{m+h} égaux à un: la valeur de δ en est inchangée, ce qui nous permet d'annuler les groupes de cohomologie précédents sous l'hypothèse

$$q - j > \sum_{i=1}^m (r_i - j_i) + j(n_X - 1) + n_X \sum_{i=1}^m \min(r_i - j_i, k_i - 1),$$

donc a fortiori, puisque $j \leq n - p$, sous la condition du théorème.

TROISIÈME ÉTAPE. Reste à montrer que si le théorème est vrai pour $\delta' < \delta$, et pour tout p , il l'est encore pour δ en degré $p = n$. Considérons pour cela, une fois encore, la fibration

$$Y = \mathbb{P}(E_1^*) \times_X \dots \times_X \mathbb{P}(E_m^*) \xrightarrow{\pi} X,$$

et sur Y le fibré en droites ample

$$\mathcal{L} = f_1^* \mathcal{O}_{E_1}(k_1 + j_1 - 1) \otimes \dots \otimes f_m^* \mathcal{O}_{E_m}(k_m + j_m - 1) \otimes \pi^* L,$$

où f_i est la projection sur le i -ème facteur de Y . On a vérifié en démontrant le théorème 2.1 que les termes d'ordre un de la suite spectrale de Borel et Le Potier correspondante, d'ordre $p = n + j - m$, admettaient les expressions suivantes:

$${}^p E_1^{n-h, q-n+h} = \bigoplus_{h_1 + \dots + h_m = j+h} H^q(X, \Omega_X^{n-h} \otimes S^{(k_1+j_1-h_1)}E_1 \otimes \dots \otimes S^{(k_m+j_m-h_m)}E_m \otimes L),$$

où $j = j_1 + \dots + j_m$. Lorsque h est strictement positif, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence aux différents termes de cette somme: il vient

$${}^p E_1^{n-h, q-n+h} = 0$$

si $q > \sum_{i=1}^m (r_i - j_i) - h + n_X(h + \sum_{i=1}^m (\min(r_i - j_i, k_i - 1) - h))$. Les morphismes cobords

$${}^p d_h^{n-h, q-n+h-1} : {}^p E_h^{n-h, q-n+h-1} \rightarrow {}^p E_h^{n, q-n}$$

sont donc nuls pour $q > \sum_{i=1}^m (r_i - j_i) + n_X \sum_{i=1}^m \min(r_i - j_i, k_i - 1)$, ce qui implique l'isomorphisme

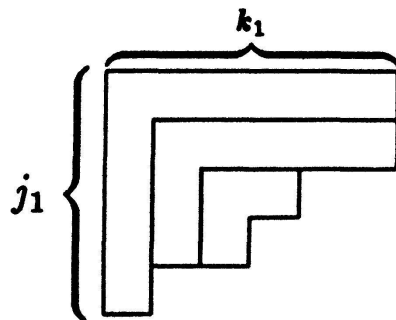
$${}^p E_1^{n, q-n} = {}^p E_\infty^{n, q-n}.$$

Mais ce dernier terme s'annule, d'après le théorème de Kodaira-Nakano, dès que $q > \sum_{i=1}^m (r_i - j_i)$, et notre théorème est démontré. □

COROLLAIRE. *Si E est un fibré vectoriel ample de rang r sur X ,*

$$H^q(X, K_X \otimes S^k E) = 0 \quad \text{si } q > (n_X + 1)(r - 1).$$

Plus généralement, on peut déduire de ce qui précède des théorèmes d'annulation pour la cohomologie des fibrés associés à E pour n'importe quelle représentation polynômiale du groupe structural $Gl(r, \mathbb{C})$. Rappelons que les représentations polynômiales irréductibles de $Gl(r, \mathbb{C})$ sont indexées par des suites d'entiers naturels $\rho_1 \geq \dots \geq \rho_r \geq 0$. Le diagramme de Young de la partition correspondante peut alors être décomposée en *équerres* de la façon suivante:

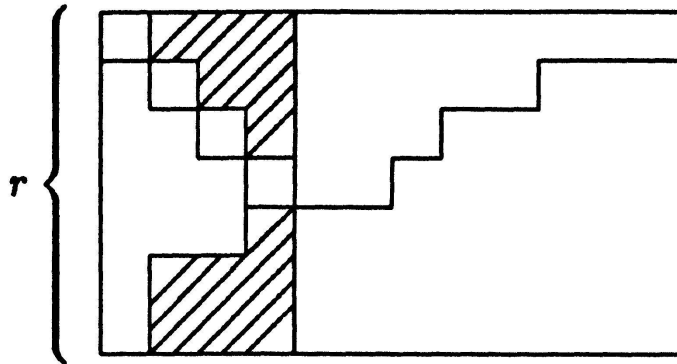


Notons k_1, \dots, k_m les longueurs de ces équerres, et j_1, \dots, j_m leurs hauteurs. Alors

$$\rho = (k_1, \dots, k_m \mid j_1, \dots, j_m)$$

en notation de Frobenius, et $S^{(k_1|j_1)}E$ coïncide avec le fibré associé à E pour la représentation de $Gl(r, \mathbb{C})$ définie par l'équerre de longueur k_1 et de hauteur j_1 . De plus, il est facile de vérifier que le fibré associé à E pour la représentation de $Gl(r, \mathbb{C})$ définie par ρ , fibré que l'on notera $S^\rho E$, est un facteur direct du produit tensoriel $S^{(k_1|j_1)}E \otimes \dots \otimes S^{(k_m|j_m)}E$.

On associera à la partition ρ un entier $q(\rho)$ de la façon suivante: considérons la partie de la demi-droite de pente -1 issue du coin supérieur gauche du diagramme de Young de ρ , qui se trouve à l'intérieur de ce diagramme; $q(\rho)$ est le nombre de cases situées soit strictement au-dessus de cette ligne, soit au-dessous et en dehors du diagramme de ρ .



Dans l'exemple ci-dessus, $q(\rho)$ est le nombre de cases hachurées. Sur la i -ème colonne, ce nombre de cases hachurées est exactement $r - j_i$. D'où le corollaire suivant:

COROLLAIRE. Si E est un fibré vectoriel ample de rang r sur X , et ρ une partition,

$$H^q(X, \Omega_X^p \otimes S^\rho E) = 0 \quad \text{si } q > (n_X + 1)q(\rho) + n_X(n - p).$$

Si m équerres suffisent à reconstituer la partition ρ , $q(\rho) \leq m(m - 1)/2 + m(r - m)$. Chaque puissances tensorielle de E se décomposant en somme directes de fibrés associés à des représentations irréductibles, on en déduira aisément le résultat suivant:

COROLLAIRE. Si E est un fibré vectoriel ample de rang r sur X , alors pour tout entier k strictement positif,

$$H^q(X, \Omega_X^p \otimes E^{\otimes k}) = 0 \quad \text{si } q > (n_X + 1) \frac{r(r - 1)}{2} + n_X(n - p).$$

En particulier, sur l'espace projectif, on obtient la troisième partie du premier théorème de notre introduction.

Insistons sur le fait que de tels théorèmes d'annulation, pour des produits tensoriels du fibré canonique par des fibrés associés à un fibré vectoriel ample, ne s'obtiennent en général qu'au moyen d'énoncés analogues, pour certains autres fibrés associés, en cohomologie de Dolbeault. Même si cela n'est pas apparent dans les énoncés de tous nos résultats, le passage à la cohomologie de Dolbeault est absolument indispensable.

REMARQUE. Signalons enfin que l'ensemble de nos résultats s'étend directement au cas de fibrés k -amples, c'est-à-dire tels que le fibré en droites quotient $\mathcal{O}_E(1)$ soit k -ample au sens de [17], sur la variété $\mathbb{P}(E^*)$ des hyperplans de E . Il suffit pour cela d'utiliser l'extension du théorème de Kodaira-Nakano établie par Sommese pour les fibrés en droites k -amples, et d'ajouter en conséquence k à toutes nos conditions d'annulation.

5. Théorèmes d'annulation sur les variétés toriques

5.1. Introduction

Une variété torique X est une variété algébrique normale, contenant un tore algébrique $T \simeq (\mathbb{C}^*)^n$ comme ouvert dense, et telle que l'action naturelle de T sur lui-même se prolonge en une action de T sur X (se reporter à [13] pour plus de détails, référence dont nous reprendrons autant que possible les notations).

Une telle variété peut être construite via un *éventail*, c'est-à-dire, une collection Δ de cônes rationnels polyédraux fortement convexes d'un réseau $N \simeq \mathbb{Z}^n$, telle que chacune des faces d'un élément de Δ soit encore dans Δ , et que l'intersection de deux cônes de Δ soit une face de chacun d'eux.

A chaque cône σ de Δ correspond une orbite du tore T dans X , dont on note $V(\sigma)$ l'adhérence: c'est encore une variété torique, lisse de surcroît dès que c'est le cas de X . Sa codimension dans X est égale à la dimension de σ .

5.2. Complexes d'Ishida

Soit X une variété torique projective et lisse. Notons D le diviseur effectif, qui n'est autre que le diviseur anticanonique,

$$D = \sum_{\rho \in \Delta(1)} V(\rho),$$

où $\Delta(j)$ désigne l'ensemble des cônes de Δ de dimension j .

Si $M = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$ est le réseau dual de N , le fibré trivial $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_X$ s'identifie au fibré des formes différentielles à pôles logarithmiques le long de D , ce dont on déduit l'existence d'une suite exacte de faisceaux

$$0 \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_X \rightarrow \bigoplus_{\rho \in \Delta(1)} \mathcal{O}_{V(\rho)} \rightarrow 0.$$

Plus généralement, on peut démontrer l'existence, pour chaque entier p , d'un complexe d'Ishida, de longueur p ([13], p. 121),

$$0 \rightarrow \Omega_X^p \rightarrow \mathcal{K}^*(X, p),$$

dont le i -ème terme est la somme directe

$$\mathcal{K}^i(X, p) = \bigoplus_{\sigma \in \Delta(i)} \wedge^{p-i}(M \cap \sigma^\perp) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{V(\sigma)}.$$

5.3. Théorèmes d'annulation

Le théorème suivant étend aux variétés toriques les résultats que nous avons obtenus sur le projectif:

THÉORÈME. *Soit X une variété torique projective lisse, de dimension n , et E un fibré vectoriel ample de rang r sur cette variété. Alors*

$$H^q(X, \Omega_X^p \otimes S^k E) = 0 \quad \text{si } q \geq r,$$

$$H^q(X, \Omega_X^p \otimes \wedge^j E) = 0 \quad \text{si } q > r - j.$$

Démonstration. Plus généralement, on démontrera, par récurrence sur la dimension de X , et par récurrence descendante sur j , que

$$H^{p,q}(X, S^{(k|j)} E) = 0 \quad \text{si } q > r - j.$$

Dans un premier temps, on démontre que si cette annulation est vérifiée en degré p quelconque pour les fibrés $S^{(k|j+h)} E$, avec $h > 0$, elle l'est encore en degré maximal n pour $S^{(k|j)} E$. L'argument, qui repose bien évidemment sur l'existence de la suite spectrale de Borel-Le Potier, est exactement le même que sur l'espace projectif, on ne le redonnera donc pas.

Dans un second temps, il s'agit d'établir que l'annulation pour $S^{(k|j)} E$ en degré maximal, implique l'annulation en degré quelconque. Sur l'espace projectif, c'est la

suite exacte d'Euler qui le permettait – sur les variétés toriques, ce sont les complexes d'Ishida qui joueront ce rôle.

Par commodité, on partira de l'énoncé qui se déduit de notre hypothèse par dualité de Serre:

$$H^q(X, S^{(k|j)}E^*) = 0 \quad \text{si } q < n - r + j.$$

Tensorisons par $S^{(k|j)}E^*$ le complexe d'Ishida de X de degré p :

$$0 \rightarrow \Omega_X^p \otimes S^{(k|j)}E^* \rightarrow \mathcal{K}^\bullet(X, p) \otimes S^{(k|j)}E^*.$$

Les groupes de cohomologie $H^{p,q}(X, S^{(k|j)}E^*)$ s'annuleront pour $q < n - r + j$ dès que les groupes de cohomologie

$$H^{q-i}(X, \mathcal{K}^i(X, p) \otimes S^{(k|j)}E^*) = 0$$

sous la même hypothèse. Mais le terme d'ordre i du complexe d'Ishida de degré p étant une somme directe de fibrés triviaux sur les sous-variétés $V(\sigma)$ de codimension i , il s'agit de vérifier que pour chaque cône σ de Δ de dimension i ,

$$H^{q-i}(V(\sigma), S^{(k|j)}E^*) = 0 \quad \text{si } q - i < n - i - r + j = \dim V(\sigma) - r + j.$$

Mais ceci n'est rien d'autre que le dual de Serre de notre théorème d'annulation, en degré maximal, sur la variété $V(\sigma)$. Il est donc bien vérifié, d'après notre hypothèse de récurrence sur la dimension: $V(\sigma)$ est en effet elle aussi, comme nous l'avons signalé, une variété torique lisse, sur laquelle la restriction du fibré E est bien entendu toujours ample. \square

Remerciements

Je tiens à remercier J. P. Demailly de quelques discussions utiles, et pour m'avoir suggéré la notion et l'appellation de "fibre" uniformément nef".

REFERENCES

- [1] BARTH, W., *Transplanting cohomology classes in complex projective space*, Amer. J. Math. 92 (1970) 951–967.
- [2] DEMAILLY, J. P., *Vanishing theorems for tensor powers of an ample vector bundle*, Invent. Math. 91 (1988) 203–220.
- [3] DEMAILLY, J. P., PETERNELL, TH. and SCHNEIDER, M., *Compact complex manifolds with numerically effective tangent bundles*, J. Algebr. Geom. 3, No. 2 (1994) 295–345.

- [4] EIN, L. and LAZARSFELD, R., *Szygies and Koszul cohomology of smooth projective varieties of arbitrary dimension*, Invent. Math. 111 (1993) 51–67.
- [6] FALTINGS, G., *Verschwindungssatz und Untermannigfaltigkeiten kleiner Kodimension des projektiven Raums*, J. reine angew. Math. 326 (1981) 136–151.
- [6] GRIFFITHS, P. A., *Hermitian differential geometry, Chern classes and positive vector bundles*, in: *Global analysis, papers in honor of K. Kodaira*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1969, 185–251.
- [7] HARTSHORNE, R., *Ample subvarieties of algebraic varieties*, LN 156, Springer, 1970.
- [8] HARTSHORNE, R., *Cohomology of non-complete algebraic varieties*, Compositio Math. 23 (1971) 257–264.
- [9] LE POTIER, J., *Annulation de la cohomologie à valeurs dans un fibré vectoriel holomorphe positif de rang quelconque*, Math. Ann. 218 (1975) 35–53.
- [10] LE POTIER, J., *Cohomologie de la Grassmannienne à valeurs dans les puissances extérieures et symétriques du fibré universel*, Math. Ann. 266 (1977) 257–270.
- [11] MANIVEL, L., *Théorèmes d'annulation pour les fibrés associés à un fibré ample*, Ann. Sc. N. Sup. Pisa 19 (1992) 515–565.
- [12] MANIVEL, L., *Un théorème d'annulation pour les puissances extérieures d'un fibré ample*, J. reine angew. Math. 422 (1991) 91–116.
- [13] ODA, T., *Convex bodies and algebraic geometry, an introduction to the theory of toric varieties*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1988.
- [14] PETERNELL, TH., LE POTIER, J. and SCHNEIDER, M., *Direct images of sheaves of differentials and the Atiyah class*, Math. Z. 196 (1987) 75–87.
- [15] PETERNELL, TH., LE POTIER, J. and SCHNEIDER, M., *Vanishing theorems, linear and quadratic normality*, Invent. Math. 87 (1987) 573–586.
- [16] SCHNEIDER, M. and ZINTL, J., *The theorem of Barth-Lefschetz as a consequence of Le Potier's vanishing theorem*, Manuscripta Math. 80 (1993) 259–263.
- [17] SOMMESE, A. J., *Submanifolds of abelian varieties*, Math. Ann. 233 (1978) 229–256.
- [18] SUMIHIRO, H., *A vanishing theorem for symmetric tensors of 2-bundles on \mathbb{P}^n and its applications*, Japanese J. of Math. 20 (1994) 269–278.

Laurent Manivel
Institut Fourier
Université de Grenoble I
BP 74, 38402 Saint Martin d'Hères
France
e-mail: manivel@fourier.ujf-grenoble.fr

Received October 3, 1994