Relèvements des algèbres lisses et de leurs morphismes

Autor(en): **Arabia, Alberto**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **76 (2001)**

PDF erstellt am: **05.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-57407

Comment. Math. Helv. 76 (2001) 607–639
0010-2571/01/040607-33 \$ 1.50+0.20/0

Commentarii Mathematici Helvetici

Relèvements des algèbres lisses et de leurs morphismes

Alberto Arabia

Abstract. Let $\boldsymbol{R}$ be a commutative ring and let $\boldsymbol{I}$ be any ideal of $\boldsymbol{R}$, put $\overline{\boldsymbol{R}} := \boldsymbol{R}/\boldsymbol{I}$. We prove that for any smooth $\overline{\boldsymbol{R}}$-algebra $\overline{\boldsymbol{A}}$ there exist a smooth $\boldsymbol{R}$-algebra $\boldsymbol{A}$ such that $\overline{\boldsymbol{A}}$ is isomorphic to $\overline{\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A}$. We also show that for any morphism of smooth $\overline{\boldsymbol{R}}$-algebras $\bar{a} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}$, there exist a morphism of smooth $\boldsymbol{R}$-algebras $a : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ such that $\mathbf{1} \otimes a : \overline{\boldsymbol{R}} \otimes \boldsymbol{A} \to \overline{\boldsymbol{R}} \otimes \boldsymbol{B}$ is isomorphic to $\bar{a} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}$. As a corollary, when $\boldsymbol{R}$ is nœtherian, we show that for any smooth $\overline{\boldsymbol{R}}$-algebra $\overline{\boldsymbol{A}}$ there exist a *very smooth weakly complete* algebra $\boldsymbol{A}^\dagger$ over $\boldsymbol{R}$ such that $\overline{\boldsymbol{R}} \otimes \boldsymbol{A}^\dagger$ is isomorphic to $\overline{\boldsymbol{A}}$.

Résumé. Soient $\boldsymbol{R}$ un anneau commutatif et $\boldsymbol{I}$ un idéal de $\boldsymbol{R}$, notons $\overline{\boldsymbol{R}} := \boldsymbol{R}/\boldsymbol{I}$. Nous prouvons que pour toute $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre lisse $\overline{\boldsymbol{A}}$, il existe une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse $\boldsymbol{A}$ telle que $\overline{\boldsymbol{A}}$ est isomorphe à $\overline{\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A}$. Nous prouvons également que pour tout morphisme de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres lisses $\bar{a} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}$, il existe un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres lisses $a : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ tel que $\mathbf{1} \otimes a : \overline{\boldsymbol{R}} \otimes \boldsymbol{A} \to \overline{\boldsymbol{R}} \otimes \boldsymbol{B}$ est isomorphe à $\bar{a} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}$. On en déduit, lorsque $\boldsymbol{R}$ est nœthérien, que pour toute $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre lisse $\overline{\boldsymbol{A}}$, il existe une $\boldsymbol{R}$-algèbre *faiblement complète très lisse* $\boldsymbol{A}^\dagger$ telle que $\overline{\boldsymbol{R}} \otimes \boldsymbol{A}^\dagger$ est isomorphe à $\overline{\boldsymbol{A}}$.

Mathematics Subject Classification (2000). 14A15, 13A19, 14F30.

Keywords. Smooth algebra, very smooth algebra, Monsky–Washnitzer cohomology.

Introduction

Tous les anneaux et algèbres dans cet article sont commutatifs et possèdent une identité pour le produit.

Soient $\boldsymbol{R}$ un anneau et $\boldsymbol{I}$ un idéal dans $\boldsymbol{R}$. Notons $\overline{\boldsymbol{R}} := \boldsymbol{R}/\boldsymbol{I}$. Par réduction modulo $\boldsymbol{I}$, on fait correspondre à une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$, la $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre $\overline{\boldsymbol{A}} := \overline{\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A}$ et à un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\alpha : \boldsymbol{A}_1 \to \boldsymbol{A}_2$ le morphisme de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres $\overline{\alpha} : \overline{\boldsymbol{A}}_1 \to \overline{\boldsymbol{A}}_2$ donné par $\overline{\alpha}(x \otimes a) := x \otimes \alpha(a)$. Un "*relèvement d'une $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre $\overline{\boldsymbol{A}}$*" est alors la donnée d'un morphisme surjectif de $\boldsymbol{R}$-algèbres $p_{\boldsymbol{A}} : \boldsymbol{A} \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{A}}$ dont la réduction $\bar{p}_{\boldsymbol{A}}$ est bijective. La notion de relèvement des morphismes de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres est analogue.

Dans [G, SGA$_1$], Grothendieck introduit la notion de morphisme lisse dans la catégorie des schémas. C'est une notion stable par composition et par changement de base et donne lieu, dans le cas affine, à la notion d'algèbre lisse. La réduction modulo $\boldsymbol{I}$ d'une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse est alors une $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre lisse.

En géométrie algébrique on est emmené à considérer le problème inverse où l'on recherche des relèvements soumis à certaines contraintes de lissité. C'est le cas notamment dans [G] et dans l'article de Monsky et Washnitzer ([MW]) où les questions suivantes se posent de manière cruciale :

Rel-1) Existe-t-il des relèvements lisses pour une $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre lisse donnée ?

Rel-2) Étant données des $\boldsymbol{R}$-algèbres $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$, où $\boldsymbol{A}$ est lisse, dans quelle mesure un morphisme de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres $\overline{u} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}$ admet-il un relèvement $u : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$?

Rel-3) Étant données des $\boldsymbol{R}$-algèbres $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$, où $\boldsymbol{A}$ est lisse, et des morphismes de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres homotopes $\overline{u}_1, \overline{u}_2 : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}$, dans quelle mesure des relèvements $u_i : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ des $\overline{u}_i$, sont-ils homotopes ?

Dans ce travail, nous donnons des réponses très générales à ces questions.

Pour Rel-1, nous prouvons qu'elle admet une réponse affirmative sans aucune restriction sur le couple $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{I})$; autrement dit :

Théorème (1.3.1). *Pour tout anneau $\boldsymbol{R}$, tout idéal $\boldsymbol{I} \subseteq \boldsymbol{R}$ et toute $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre lisse $\overline{\boldsymbol{A}}$, il existe une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ est isomorphe à $\overline{\boldsymbol{A}}$.*

On généralise ainsi les versions de ce théorème précédemment connues : celle de Grothendieck ([G] et [SGA$_1$] III 6.10), où $\boldsymbol{R}$ est nœthérien et $\boldsymbol{I}$ est nilpotent, qui prouve également que deux relèvements lisses d'une même $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre lisse sont toujours isomorphes (non canoniquement) ; et celle de Renée Elkik ([E], §4) où le couple $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{I})$ est nœthérien hensélien, qui généralise la version de Grothendieck à ceci près que l'unicité de la classe d'isomorphie des relèvements lisses n'est plus garantie. Au delà du cas affine, Grothendieck démontre que toute courbe lisse sur le corps résiduel $\overline{\boldsymbol{R}}$ d'un anneau nœthérien local complet $\boldsymbol{R}$, admet un relèvement en une courbe lisse sur $\boldsymbol{R}$ ([G]) et J.-P. Serre donne des exemples de schémas projectifs lisses sur $\mathbb{F}_p$ n'admettant pas de relèvements lisses en caractéristique nulle ([S]).

Pour démontrer notre généralisation, nous avons repris l'idée, sous-jacente dans [E], de construire des relèvements lisses pour les $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres lisses à l'aide de relèvements projectifs de modules projectifs de type fini. Plus précisément, soit $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre et $(\overline{\ }) : \mathrm{Mod}_{\mathrm{t.f.}}(\boldsymbol{A}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}_{\mathrm{t.f.}}(\overline{\boldsymbol{A}})$ le foncteur de réduction modulo $\boldsymbol{I}$ sur les catégories de modules. Nous prouvons :

Théorème (1.2.3). *Pour tout anneau $\boldsymbol{R}$, tout idéal $\boldsymbol{I}$, toute $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini $\boldsymbol{A}$ et toute présentation libre et finie d'un $\overline{\boldsymbol{A}}$- module projectif de type fini $\overline{\boldsymbol{M}}$:*

$$\overline{\boldsymbol{A}}^p \xrightarrow{\overline{L}} \overline{\boldsymbol{A}}^q \xrightarrow{\overline{\Pi}} \overline{\boldsymbol{M}} \to 0\,, \qquad (\diamond)$$

il existe une $\boldsymbol{A}$-algèbre $\boldsymbol{A}_\varepsilon$ intersection complète et voisinage étale de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{A}$, *un $\boldsymbol{A}_\varepsilon$-module projectif de type fini $\boldsymbol{M}_\varepsilon$, et une présentation libre et finie de $\boldsymbol{M}_\varepsilon$:*

$$\boldsymbol{A}_\varepsilon^p \xrightarrow{L} \boldsymbol{A}_\varepsilon^q \xrightarrow{\Pi} \boldsymbol{M}_\varepsilon \to 0\,,$$

de réduction modulo $\boldsymbol{I}$ isomorphe à ($\diamond$).

Grâce à ce théorème la preuve de l'existence de relèvements lisses donnée par Elkik dans [E] s'applique à tout couple $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{I})$.

Concernant les questions Rel-2,3, nous prouvons les deux théorèmes suivants, toujours sans aucune hypothèse supplémentaire sur le couple $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{I})$.

Théorème (2.1.3). *Étant donnés un morphisme de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres $\overline{h} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}$, et des relèvements $p_{\boldsymbol{A}} : \boldsymbol{A} \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{A}}$ et $p_{\boldsymbol{B}} : \boldsymbol{B} \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{B}}$, où $\boldsymbol{A}$ est lisse, il existe une $\boldsymbol{B}$-algèbre $\boldsymbol{B}_\varepsilon$ intersection complète et voisinage étale de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{B}$, et un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $h : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}_\varepsilon$ qui relève $\overline{h}$. En d'autres termes, on a un diagramme :*

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{A} \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[d, two heads, "p_{\boldsymbol{A}}"'] & \boldsymbol{B}_\varepsilon \arrow[dr, two heads, "p_{\boldsymbol{B}_\varepsilon}"'] & \boldsymbol{B} \arrow[l, "\varepsilon"'] \arrow[d, two heads, "p_{\boldsymbol{B}}"] \\
\overline{\boldsymbol{A}} \arrow[rr, "\overline{h}"] & & \overline{\boldsymbol{B}}
\end{tikzcd}$$

où $\varepsilon : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}_\varepsilon$ désigne l'homomorphisme structural et où $p_{\boldsymbol{B}_\varepsilon}$ est l'homomorphisme induit par ε à partir de $p_{\boldsymbol{B}}$.

On rappelle que deux morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $u_0, u_1 : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ sont dits "*homotopes*" lorsqu'il existe un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $h : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}[T]$ tel que $u_0(a) = h(a)(0)$ et $u_1(a) = h(a)(1)$.

Théorème (2.2.2). *Soient $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse et $u_0, u_1 : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ deux morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres dont les réductions modulo $\boldsymbol{I}$ sont homotopes (par exemple égales). Il existe alors une $\boldsymbol{B}[T]$-algèbre $\boldsymbol{B}[T]_\varepsilon$, intersection complète et voisinage étale de $\boldsymbol{I}$, de (T) et de $(1-T)$ dans $\boldsymbol{B}[T]$, et un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $h : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}[T]_\varepsilon$ tels que $p_{i,\varepsilon} \circ h = u_i$. En d'autres termes, on a un diagramme :*

$$\begin{tikzcd}
 & \boldsymbol{B}[T]_\varepsilon \arrow[dr, two heads, "p_{0,\varepsilon}", "p_{1,\varepsilon}"'] & \boldsymbol{B}[T] \arrow[l, "\varepsilon"'] \arrow[d, two heads, "p_0"', "p_1"] & T \arrow[d, "p_0"'] & T \arrow[d, "p_1"] \\
\boldsymbol{A} \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[rr, "u_0", "u_1"'] & & \boldsymbol{B} & 0 & 1
\end{tikzcd}$$

où l'on note $\varepsilon : \boldsymbol{B}[T] \to \boldsymbol{B}[T]_\varepsilon$ l'homomorphisme structural et $p_{0,\varepsilon}, p_{1,\varepsilon} : \boldsymbol{B}[T]_\varepsilon \to \boldsymbol{B}$ les morphismes de $\boldsymbol{B}[T]$-algèbres induits par ε à partir de p_0 et p_1 respectivement.

Lorsque l'anneau $\boldsymbol{R}$ est nœthérien, Monsky et Washnitzer associent à chaque $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$ une certaine sous-algèbre $\boldsymbol{A}^\dagger$ du complété séparé $\boldsymbol{I}$-adique $\widehat{\boldsymbol{A}}$ de $\boldsymbol{A}$ qu'ils appellent la "*complétion faible*" de $\boldsymbol{A}$ ([MW]). L'algèbre $\boldsymbol{A}^\dagger$ est un relèvement de $\overline{\boldsymbol{A}}$

qui n'est généralement pas de type fini sur $\boldsymbol{R}$. Le caractère fonctoriel (aussi bien que la définition) de la cohomologie de Monsky–Washnitzer dépend alors de ce que toute $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre lisse $\overline{\boldsymbol{A}}$ admette des relèvements $\boldsymbol{A}^\dagger$ d'un type particulier que Monsky et Washnitzer qualifient de "*très lisses*". L'existence de tels relèvements est établie dans [MW] pour une classe de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres lisses contenant pour l'essentiel les intersections complètes, mais le problème de leur existence pour toute $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre lisse n'y est pas résolu. À ce sujet nous démontrons :

Théorème (3.3.2). *Soient $\boldsymbol{R}$ un anneau nœthérien et $\overline{\boldsymbol{A}}$ une $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre lisse. Pour tout relèvement $\boldsymbol{A}$ de $\overline{\boldsymbol{A}}$, lisse sur $\boldsymbol{R}$, l'algèbre $\boldsymbol{A}^\dagger$ est un relèvement très lisse de $\overline{\boldsymbol{A}}$.*

Dans notre travail ce théorème est corollaire immédiat du fait que les relèvements lisses sur $\boldsymbol{R}$ d'une $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre lisse sont "*très lisses au voisinage étale près*" (th. 2.1.2) (résultat valable pour tout couple $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{I})$ et dont on déduit les théorèmes 2.1.3 et 2.2.2 ci-dessus).

Organisation de l'article. Après la section **0**, destinée à fixer la terminologie et à des rappels, nous abordons dans les sections **1** et **2** l'étude des questions Rel-1,2,3. La section **3** interprète les résultats des sections précédentes après complétion $\boldsymbol{I}$-adique (faible) et donne un aperçu des simplifications apportées à l'introduction de la cohomologie de Monsky–Washnitzer.

Remerciements. Cette étude a été proposée par Zoghman Mebkhout et s'insère dans son programme des recherches autour de la factorisation de la fonction Zêta d'une variété affine non singulière sur un corps fini ([M]). Je lui suis très reconnaissant pour toutes les discussions mathématiques que nous avons eues à ce sujet de même que pour son appui et enthousiasme constants.

0. Rappels

0.1. Notations et terminologie

Les anneaux et algèbres dans cet article sont tacitement supposés commutatifs et munis d'une identité pour le produit qui sera respectée par les homomorphismes (et inclusions) d'anneaux et algèbres.

La donnée de base sera un couple $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{I})$ où $\boldsymbol{R}$ désigne un anneau et $\boldsymbol{I}$ un idéal dans $\boldsymbol{R}$. Ces données ne seront astreintes à vérifier *a priori* aucune autre propriété particulière.

Pour toute $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$, on note :

- $\mathbf{1}_{\boldsymbol{A}}$: l'identité pour le produit.
- $\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}$: localisé de $\boldsymbol{A}$ en un idéal premier $\mathfrak{P} \subseteq \boldsymbol{A}$; $k(\mathfrak{P})$: le corps résiduel de $\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}$.

- $\mathrm{Alg}(\boldsymbol{A})$: la catégorie des $\boldsymbol{A}$-algèbres où $\mathrm{Homom}_{\boldsymbol{A}}(\_,\_)$ désignera $\mathrm{Mor}_{\mathrm{Alg}(\boldsymbol{A})}(\_,\_)$.
- $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{A})$ (resp. $\mathrm{Mod}_{\mathrm{t.f.}}(\boldsymbol{A})$) : la catégorie des $\boldsymbol{A}$-modules (resp. de type fini) où $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\_,\_)$ désignera $\mathrm{Mor}_{\mathrm{Mod}_{\boldsymbol{A}}}(\_,\_)$.
- $\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$: le module des différentielles relatives de $\boldsymbol{A}$ sur $\boldsymbol{R}$ et $d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} : \boldsymbol{A} \to \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ la $\boldsymbol{R}$-dérivation canonique.
- Pour tout morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\alpha : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$, on note $\Omega(\alpha) : \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \to \Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}}$ le morphisme des modules des différentielles relatives induit par α ; il est déterminé par les égalités $\Omega(\alpha)(d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}(a)) = d_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}}(\alpha(a))$, pour tout $a \in \boldsymbol{A}$.
- Pour tout morphisme *surjectif* de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\alpha : \boldsymbol{A} \twoheadrightarrow \boldsymbol{B}$, on dispose d'une suite exacte à droite canonique de $\boldsymbol{B}$-modules :

$$\ker(\alpha)/\ker(\alpha)^2 \xrightarrow{\partial_\alpha} \boldsymbol{B} \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \xrightarrow{\mathrm{id}_{\boldsymbol{B}} \times \Omega(\alpha)} \Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}} \to 0 \tag{1}$$

  où $\big(\mathrm{id}_{\boldsymbol{B}} \times \Omega(\alpha)\big)(b \otimes d(a)) := b\, d(\alpha(a))$ et où ∂_α (notée aussi ∂ lorsque la surjection α est sous-entendue) est l'application induite par la restriction de la dérivation $d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ à $\ker(\alpha)$. Cette suite est appelée "*la première suite fondamentale associée à la surjection* α".

  Dans le cas où $\alpha : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ n'est pas nécessairement surjectif, on dispose d'une suite exacte à droite canonique de $\boldsymbol{B}$-modules :

$$\boldsymbol{B} \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \xrightarrow{\mathrm{id}_{\boldsymbol{B}} \times \Omega(\alpha)} \Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}} \longrightarrow \Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{A}} \to 0 \tag{2}$$

  où le morphisme $\Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}} \to \Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{A}}$ provient de la structure de $\boldsymbol{A}$-algèbre de $\boldsymbol{B}$ définie par α et de ce qu'alors toute $\boldsymbol{A}$-dérivation de $\boldsymbol{B}$ est une $\boldsymbol{R}$-dérivation. Cette suite est appelée "*la seconde suite fondamentale associée à* α".

Le couple $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{I})$ étant sous-entendu, la notation $\overline{\boldsymbol{R}}$ désigne l'anneau quotient $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{I}$. Pour toute $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$, la notation $\overline{\boldsymbol{A}}$ désigne la $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre $\overline{\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A}$.

Pour toute $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$, on entend par foncteur de "*réduction modulo* $\boldsymbol{I}$", à la fois, le foncteur $(\bar{\ })$: $\mathrm{Alg}(\boldsymbol{A}) \rightsquigarrow \mathrm{Alg}(\overline{\boldsymbol{A}})$ qui fait correspondre à une $\boldsymbol{A}$-algèbre $\boldsymbol{B}$ la $\overline{\boldsymbol{A}}$-algèbre $\overline{\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{B}$ et à un morphisme de $\boldsymbol{A}$-algèbres $\alpha : \boldsymbol{B}_1 \to \boldsymbol{B}_2$ l'homomorphisme $\overline{\alpha} : \overline{\boldsymbol{B}}_1 \to \overline{\boldsymbol{B}}_2$ donné par $\overline{\alpha}(x \otimes b) := x \otimes \alpha(b)$; mais aussi le foncteur $(\bar{\ })$: $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{A}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(\overline{\boldsymbol{A}})$ qui fait correspondre à un $\boldsymbol{A}$-module $\boldsymbol{M}$ le $\overline{\boldsymbol{A}}$-module $\overline{\boldsymbol{M}} := \overline{\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{M}$ et *mutatis mutandis* pour les morphismes. Dans ce contexte, un "*relèvement*" d'une $\overline{\boldsymbol{A}}$-algèbre $\overline{\boldsymbol{B}}$ est la donnée d'une $\boldsymbol{A}$-algèbre $\boldsymbol{B}$ dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ est isomorphe à $\overline{\boldsymbol{B}}$, ou, ce qui revient au même : la donnée d'un morphisme surjectif de $\boldsymbol{A}$-algèbres $p_{\boldsymbol{B}} : \boldsymbol{B} \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{B}}$ dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ est bijective. La notion de relèvements des $\overline{\boldsymbol{A}}$-modules et de leurs morphismes résulte de considérations semblables.

0.2. Lissité

On rappelle la notion de lissité et quelques résultats connus qui seront utilisés dans la suite (cf. [SGA_1, EGA_4, BLR]).

0.2.1. Définition. Un morphisme de schémas $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{S}$ est dit "*lisse au point* $x \in \boldsymbol{X}$ (*de dimension relative* r)" s'il existe un voisinage ouvert $U \ni x$ et une $\boldsymbol{S}$-immersion $\jmath : U \hookrightarrow \mathbb{A}^n_{\boldsymbol{S}}$ de U dans un espace linéaire $\mathbb{A}^n_{\boldsymbol{S}}$ sur $\boldsymbol{S}$, tel que les conditions suivantes sont satisfaites :

L-(a) Localement en $y := \jmath(x)$, le faisceau d'idéaux de définition du sous-schéma $\jmath(U)$ de $\mathbb{A}^n_{\boldsymbol{S}}$, est engendré par $(n-r)$ sections $g_{r+1}, \ldots, g_n$; et

L-(b) $\{dg_{r+1}, \ldots, dg_n\}$ est linéairement indépendant dans $\underline{\Omega}^1_{\mathbb{A}^n_{\boldsymbol{S}}/\boldsymbol{S}} \otimes k(y)$.

Le morphisme $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{S}$ est dit "*lisse*" lorsqu'il est lisse en chaque point de $\boldsymbol{X}$; il est dit "*étale*" s'il est lisse et de dimension relative nulle en chaque point de $\boldsymbol{X}$. Une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$ est dite "*lisse (resp. étale)*" lorsque le morphisme de schémas $\operatorname{Spec}(\boldsymbol{A}) \to \operatorname{Spec}(\boldsymbol{R})$ induit par l'homomorphisme structural $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{A}$, $r \mapsto r\cdot\mathbf{1}_{\boldsymbol{A}}$, est lisse (resp. étale).

Une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse admet toujours des présentions globales finies puisqu'elle est localement de présentation finie par définition. On rappelle à continuation une liste de conditions équivalentes à la lissité pour une $\boldsymbol{R}$-algèbre munie d'une présentation finie.

0.2.2. Proposition. *Soit* $0 \to \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_n] \xrightarrow{\pi} \boldsymbol{A} \to 0$ *une présentation finie d'une* $\boldsymbol{R}$*-algèbre* $\boldsymbol{A}$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) $\boldsymbol{A}$ *est une* $\boldsymbol{R}$*-algèbre lisse.*

b) *La première suite fondamentale de* $\boldsymbol{A}$*-modules associée à la surjection* π *:*

$$0 \longrightarrow \boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2 \xrightarrow{\partial_\pi} \boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}[\underline{X}]} \Omega_{\boldsymbol{R}[\underline{X}]/\boldsymbol{R}} \xrightarrow{\mathrm{id}_{\boldsymbol{A}} \times \Omega(\pi)} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \to 0 \tag{3}$$

est exacte et scindée.

c) *Le* $\boldsymbol{A}$*-module* $\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ *est projectif et* ∂_π *est injective.*

c') *Le morphisme* ∂_π *admet des rétractions* (*locales*).

d) *Soit* $\boldsymbol{K}$ *un idéal de carré nul* (*resp. nilpotent*) *d'une* $\boldsymbol{R}$*-algèbre* $\boldsymbol{B}$, *notons* $\mu : \boldsymbol{B} \twoheadrightarrow \boldsymbol{B}/\boldsymbol{K}$ *la projection canonique. Alors, l'application entre les ensembles des morphismes de* $\boldsymbol{R}$*-algèbres :*

$$\begin{aligned} \operatorname{Homom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) &\longrightarrow \operatorname{Homom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}/\boldsymbol{K}) \\ \varphi &\longmapsto \mu \circ \varphi \end{aligned}$$

est surjective.

On utilisera également le critère de lissité plus général suivant, valable pour un quotient d'une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse, et pas uniquement d'une algèbre de polynômes.

0.2.3. Corollaire. *Soient* $\boldsymbol{R}$ *un anneau,* $\boldsymbol{C}$ *une* $\boldsymbol{R}$*-algèbre lisse et* $\boldsymbol{K}$ *un idéal de type fini de* $\boldsymbol{C}$. *Notons* $\boldsymbol{A} := \boldsymbol{C}/\boldsymbol{K}$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) $\boldsymbol{A}$ *est une* $\boldsymbol{R}$*-algèbre lisse.*

b) *Le morphisme de $\boldsymbol{A}$-modules $\partial_\alpha : \boldsymbol{K}/\boldsymbol{K}^2 \to \boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{C}} \Omega_{\boldsymbol{C}/\boldsymbol{R}}$ de la première suite fondamentale associée à la surjection canonique de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\alpha : \boldsymbol{C} \twoheadrightarrow \boldsymbol{A}$, est injectif et admet une rétraction.*

Démonstration. Étant donnée une présentation finie de $\boldsymbol{C}$:

$$0 \to \boldsymbol{J} \hookrightarrow \boldsymbol{R}[\overline{X}] := \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_q] \xrightarrow{\pi_{\boldsymbol{C}}} \boldsymbol{C} \to 0\,,$$

on a la présentation finie (induite) de $\boldsymbol{A}$:

$$0 \to \pi_{\boldsymbol{C}}^{-1}(\boldsymbol{K}) \hookrightarrow \boldsymbol{R}[\overline{X}] \xrightarrow[\alpha\circ\pi_{\boldsymbol{C}}]{\pi_{\boldsymbol{A}}} \boldsymbol{A} \to 0\,,$$

et le morphisme de présentations :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & \boldsymbol{J} & \hookrightarrow & \boldsymbol{R}[\overline{X}] & \xrightarrow{\pi_{\boldsymbol{C}}} & \boldsymbol{C} & \to 0 \\ & \downarrow \subseteq & & \downarrow = & & \downarrow \alpha & \\ 0 \to & \pi_{\boldsymbol{C}}^{-1}(\boldsymbol{K}) & \hookrightarrow & \boldsymbol{R}[\overline{X}] & \xrightarrow[\alpha\circ\pi_{\boldsymbol{C}}]{\pi_{\boldsymbol{A}}} & \boldsymbol{A} & \to 0 \end{array} \qquad (*)$$

D'autre part, comme $\boldsymbol{C}$ est supposée lisse sur $\boldsymbol{R}$, la première suite fondamentale associée à $\pi_{\boldsymbol{C}}$ est scindée (0.2.2-(b)) :

$$0 \to \boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2 \underset{\rho}{\overset{\partial_{\pi_{\boldsymbol{C}}}}{\rightleftarrows}} \boldsymbol{C} \otimes_{\boldsymbol{R}[\overline{X}]} \Omega_{\boldsymbol{R}[\overline{X}]/\boldsymbol{R}} \xrightarrow{\mathrm{id}_{\boldsymbol{C}} \times \Omega(\pi_{\boldsymbol{C}})} \Omega_{\boldsymbol{C}/\boldsymbol{R}} \to 0\,, \qquad (\diamond)$$

(ρ désigne une rétraction de $\partial_{\pi_{\boldsymbol{C}}}$).

Considérons maintenant le morphisme de complexes induit par le morphisme de présentations $(*)$:

$$\begin{array}{ccccc} 0 \to \boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{C}} (\boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2) & \underset{\mathrm{id}_{\boldsymbol{A}} \otimes \rho}{\overset{\mathrm{id}_{\boldsymbol{A}} \otimes \partial_{\pi_{\boldsymbol{C}}}}{\rightleftarrows}} & \boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}[\overline{X}]} \Omega_{\boldsymbol{R}[\overline{X}]/\boldsymbol{R}} & \xrightarrow[\nu]{\mathrm{id}_{\boldsymbol{A}} \otimes (\mathrm{id}_{\boldsymbol{C}} \times \Omega(\pi_{\boldsymbol{C}}))} & \boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{C}} \Omega_{\boldsymbol{C}/\boldsymbol{R}} \to 0 \\ \varphi \downarrow & & \downarrow = & & \downarrow \mathrm{id}_{\boldsymbol{A}} \times \Omega(\alpha) \\ \pi_{\boldsymbol{C}}^{-1}(\boldsymbol{K})/\pi_{\boldsymbol{C}}^{-1}(\boldsymbol{K})^2 & \xrightarrow{\partial_{\pi_{\boldsymbol{A}}}} & \boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}[\overline{X}]} \Omega_{\boldsymbol{R}[\overline{X}]/\boldsymbol{R}} & \xrightarrow[(\mathrm{id}_{\boldsymbol{A}} \times \Omega(\alpha))\circ\nu]{\mathrm{id}_{\boldsymbol{A}} \otimes \Omega(\pi_{\boldsymbol{A}})} & \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \longrightarrow 0 \end{array} \qquad (\mathcal{D})$$

où :

- la première ligne est la suite $(\diamond)$ tensorisée par $\boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{C}} (\_)$ et ν désigne de manière abrégée le morphisme $\mathrm{id}_{\boldsymbol{A}} \otimes (\mathrm{id}_{\boldsymbol{C}} \times \Omega(\pi_{\boldsymbol{C}}))$;
- la deuxième ligne est la première suite fondamentale associée à $\pi_{\boldsymbol{A}}$;
- φ est le morphisme de $\boldsymbol{A}$-modules induit par l'inclusion $\boldsymbol{J} \subseteq \pi_{\boldsymbol{C}}^{-1}(\boldsymbol{K})$ dans $(*)$. On vérifie que $\mathrm{coker}(\varphi) \simeq \boldsymbol{K}/\boldsymbol{K}^2$ et que la composée $\nu \circ \partial_{\pi_{\boldsymbol{A}}}$ induit sur $\mathrm{coker}(\varphi)$ le morphisme ∂_α de l'assertion (b) dont le noyau est isomorphe à la cohomologie du complexe simple associé au bicomplexe $(\mathcal{D})$.

Lorsque $\boldsymbol{A}$ est lisse sur $\boldsymbol{R}$, la deuxième ligne dans $(\mathcal{D})$ est exacte et scindée et une simple chasse au diagramme montre que la suite :

$$0 \to \mathrm{coker}(\alpha) = \boldsymbol{K}/\boldsymbol{K}^2 \xrightarrow[\partial_\alpha]{\nu\circ\partial_{\pi_{\boldsymbol{A}}}} \boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{C}} \Omega_{\boldsymbol{C}/\boldsymbol{R}} \xrightarrow{\mathrm{id}_{\boldsymbol{A}} \times \Omega(\alpha)} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \to 0 \qquad (\ddagger)$$

est exacte. Comme $\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ est projectif (0.2.2-(c)), le morphisme $\mathrm{id}_{\boldsymbol{A}} \times \Omega(\alpha)$ admet une section et ∂_α admet une rétraction.

Réciproquement, lorsque ∂_α est injective, la suite (‡) est exacte, la cohomologie du complexe simple associé au bicomplexe $(\mathcal{D})$ est nulle, et la deuxième ligne de $(\mathcal{D})$ est donc exacte. Lorsque ∂_α admet, en plus, une rétraction, le $\boldsymbol{A}$-module $\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ est projectif (puisque facteur direct alors du module projectif $\boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{C}} \Omega_{\boldsymbol{C}/\boldsymbol{R}}$), la deuxième ligne de $(\mathcal{D})$ est scindée et $\boldsymbol{A}$ est par conséquent lisse sur $\boldsymbol{R}$ (0.2.2-(b)). □

1. Relèvements des algèbres lisses

Dans la démarche de Renée Elkik ([E]) pour prouver l'existence de relèvements des algèbres lisses, le cas des $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres intersections complètes lisses et le problème du relèvement des modules projectifs de type fini sur des algèbres de type fini sur $\overline{\boldsymbol{R}}$, sont les ingrédients fondamentaux. La section 1.1 rappelle le cas des intersections complètes et ne comporte aucun résultat nouveau ; dans la section 1.2, on apporte une réponse générale au problème du relèvement des modules projectifs de type fini. On applique ensuite ces résultats pour démontrer, dans 1.3, le théorème général d'existence de relèvements lisses 1.3.1.

1.1. Relèvements des intersections complètes lisses

1.1.1. Définition. Une $\boldsymbol{R}$-algèbre de présentation finie $\boldsymbol{A}$ est appelée "*intersection complète lisse* (*de dimension relative* r) *sur* $\boldsymbol{R}$" si elle admet une présentation finie de la forme :

$$0 \to \boldsymbol{J} = (g_{r+1}, \ldots, g_n) \to \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_n] \to \boldsymbol{A} \to 0\,,$$

telle que l'idéal de $\boldsymbol{A}$ engendré par les mineurs d'ordre $(n{-}r)$ de la matrice jacobienne $[\,\partial g_i/\partial X_j\,]$ est l'idéal unité (en particulier $\boldsymbol{A}$ est lisse sur $\boldsymbol{R}$).

La même terminologie est utilisée en langage des schémas affines : Soient $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{S}$ les schémas affines correspondant respectivement à $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{R}$. L'expression "$\boldsymbol{X}$ *est intersection complète lisse au-dessus de* $\boldsymbol{S}$" est synonyme de "$\boldsymbol{A}$ *est une* $\boldsymbol{R}$*-algèbre intersection complète lisse*".

Lorsque l'on se donne un homomorphisme d'anneaux $\alpha : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$, on notera $\alpha : \boldsymbol{A} \xrightarrow[\text{ícl}]{} \boldsymbol{B}$, le fait que $\boldsymbol{B}$, munie de la structure de $\boldsymbol{A}$-algèbre définie par α, est intersection complète lisse sur $\boldsymbol{A}$.

1.1.2. Lemme. *Soit* $\boldsymbol{A}$ *une* $\boldsymbol{R}$*-algèbre de présentation finie.*
Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $\boldsymbol{A}$ *est intersection complète lisse* (*de dimension relative* r).

b) $\boldsymbol{A}$ *admet une présentation finie* $0 \to \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{R}[\overline{X}] \xrightarrow{\pi} \boldsymbol{A} \to 0$ *telle que* $\boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2$ *est un* $\boldsymbol{A}$*-module* libre *(de rang* $n-r$*) et l'application canonique* $\partial_\pi : \boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2 \to \boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}[\overline{X}]} \Omega_{\boldsymbol{R}[\overline{X}]/\boldsymbol{R}}$ *est injective et admet une rétraction.*

1.1.3. Remarque. Soit $\boldsymbol{J} = (f_{r+1}, \ldots, f_n)$ un idéal de $\boldsymbol{R}[\overline{X}] := \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_n]$ et notons $\pi : \boldsymbol{R}[\overline{X}] \twoheadrightarrow \boldsymbol{R}[\overline{X}]/\boldsymbol{J} =: \boldsymbol{A}$ la surjection canonique. Soit $\boldsymbol{Mn}(f_{r+1}, \ldots, f_n)$ l'idéal de $\boldsymbol{R}[\overline{X}]$ engendré par les mineurs d'ordre $(n-r)$ de la matrice jacobienne $[\,\partial f_i/\partial X_j\,]$. Pour chaque $f \in \boldsymbol{Mn}(f_{r+1}, \ldots, f_n)$, tel que $\pi(f)$ n'est pas nilpotent dans $\boldsymbol{A}$, la localisation $\boldsymbol{A}_f$ est intersection complète lisse de dimension relative r sur $\boldsymbol{R}$.

1.1.4. Fibré conormal à un plongement fermé. Soit $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse. Pour toute présentation finie :

$$0 \to \boldsymbol{J} = (f_1, \ldots, f_s) \longrightarrow \boldsymbol{R}[\overline{X}] := \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_N] \longrightarrow \boldsymbol{A} \to 0\,, \qquad (*)$$

le $\boldsymbol{A}$-module $\boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2$ est projectif de type fini et l'algèbre symétrique $\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2)$ est par conséquent lisse sur $\boldsymbol{A}$ (donc sur $\boldsymbol{R}$). Le schéma affine au-dessus de $\boldsymbol{X} := \operatorname{Spec}(\boldsymbol{A})$ correspondant à $\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2)$ est le "*fibré conormal au plongement fermé* $\boldsymbol{X} \subseteq \mathbb{A}^N_{\boldsymbol{R}}$ *associé à la présentation* $(*)$" ; on le note : $T^*_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{A}^N_{\boldsymbol{R}})$.

La proposition suivante est démontrée dans [E] (lemme 3, p. 562) dans un cadre nœthérien, mais sa démonstration est valable en toute généralité.

1.1.5. Proposition ([E]). *Soit* $0 \to \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_N] \to \boldsymbol{A} \to 0$ *une présentation finie d'une* $\boldsymbol{R}$*-algèbre lisse* $\boldsymbol{A}$ *de plongement fermé associé* $\boldsymbol{X} := \operatorname{Spec}(\boldsymbol{A}) \subseteq \mathbb{A}^N_{\boldsymbol{R}}$. *Alors, le fibré conormal* $T^*_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{A}^N_{\boldsymbol{R}})$ *est intersection complète lisse sur* $\operatorname{Spec}(\boldsymbol{R})$.

1.1.6. Proposition ([E]).

a) *Toute* $\overline{\boldsymbol{R}}$*-algèbre intersection complète lisse (de dimension relative* r*) admet un relèvement intersection complète lisse (de dimension relative* r*) sur* $\boldsymbol{R}$.

b) *Soit* $\overline{\boldsymbol{A}}$ *une* $\overline{\boldsymbol{R}}$*-algèbre lisse. Alors, le fibré conormal de tout plongement fermé* $\operatorname{Spec}(\overline{\boldsymbol{A}}) \subseteq \mathbb{A}^N_{\overline{\boldsymbol{R}}}$ *associé à une présentation finie de* $\overline{\boldsymbol{A}}$ *admet un relèvement intersection complète lisse sur* $\boldsymbol{R}$.

Démonstration ([E] §4).

a) On considère une présentation de $\overline{\boldsymbol{A}}$ en tant que $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre intersection complète lisse de dimension relative r :

$$0 \to (\bar{g}_{r+1}, \ldots, \bar{g}_n) \to \overline{\boldsymbol{R}}[\overline{X}] := \overline{\boldsymbol{R}}[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow \overline{\boldsymbol{A}} \to 0\,.$$

L'idéal $\bar{\mathbb{J}}$ de $\overline{\boldsymbol{R}}[\overline{X}]$ engendré par $\{\bar{g}_{r+1}, \ldots, \bar{g}_n\}$ et les mineurs d'ordre $n-r$ de la matrice jacobienne $[\,\partial \bar{g}_i/\partial X_j\,]$ est alors l'idéal unité. Pour chaque $i = r+1, \ldots, n$, notons g_i un relèvement arbitraire de $\bar{g}_i$ dans $\boldsymbol{R}[\overline{X}]$ et posons $\boldsymbol{A} := \boldsymbol{R}[\overline{X}]/(g_{r+1}, \ldots, g_n)$.

Soit $\mathbb{J}$ l'idéal de $\boldsymbol{R}[\underline{X}]$ engendré par $\{g_{r+1},\ldots,g_n\}$ et les mineurs d'ordre $n-r$ de la matrice jacobienne $[\,\partial g_i/\partial X_j\,]$. L'idéal $\overline{\mathbb{J}}$ est l'image de $\mathbb{J}$ par la surjection canonique $\nu : \boldsymbol{R}[\underline{X}] \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{R}}[\underline{X}]$, de sorte qu'il existe $f \in \mathbb{J}$ vérifiant $\nu(f) = 1$. On en déduit une surjection $\boldsymbol{A}_f \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{A}}$ induite par ν qui fait de $\overline{\boldsymbol{A}}$ la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ de $\boldsymbol{A}_f$. D'autre part, la $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}_f$ est intersection complète lisse de dimension relative r (rem. 1.1.3).

b) Conséquence de (a) d'après 1.1.5. □

1.2. Relèvements projectifs des modules projectifs de type fini

1.2.1. Définition. Soit $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre. On appelle "*voisinage étale de* $\boldsymbol{I}$ *dans* $\boldsymbol{A}$" toute $\boldsymbol{A}$-algèbre $\boldsymbol{B}$, **étale** sur $\boldsymbol{A}$ et telle que la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ du morphisme structural de $\boldsymbol{A}$ dans $\boldsymbol{B}$ est un isomorphisme.

1.2.2. Définitions.

a) Soit $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre ; on appellera "*relèvement d'une présentation* (*libre et finie*) *d'un* $\overline{\boldsymbol{A}}$*-module projectif de type fini*" :

$$\overline{\boldsymbol{A}}^p \xrightarrow{\overline{L}} \overline{\boldsymbol{A}}^q \to \overline{\boldsymbol{M}} \to 0\,, \tag{$*$}$$

la donnée d'un $\boldsymbol{A}$-module projectif de type fini $\boldsymbol{M}$ et d'une présentation :

$$\boldsymbol{A}^p \xrightarrow{L} \boldsymbol{A}^q \to \boldsymbol{M} \to 0\,,$$

tels que $\mathrm{id}_{\overline{\boldsymbol{A}}} \otimes L = \overline{L}$. Lorsque un tel relèvement existe on dira que "*la présentation de module projectif* $(*)$ *se relève à* $\boldsymbol{A}$".

b) On dira que le couple $(\boldsymbol{R},\boldsymbol{I})$ "*vérifie la propriété de relèvement*" lorsque pour toute $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini $\boldsymbol{A}$ et pour toute présentation libre et finie de $\overline{\boldsymbol{A}}$-module projectif de type fini $\overline{\boldsymbol{M}}$:

$$\overline{\boldsymbol{A}}^p \xrightarrow{\overline{L}} \overline{\boldsymbol{A}}^q \xrightarrow{\overline{\Pi}} \overline{\boldsymbol{M}} \to 0\,, \tag{$\diamond$}$$

il existe un voisinage étale $\boldsymbol{A}_\varepsilon$ de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{A}$ tel que la présentation de module projectif $(\diamond)$ se relève à $\boldsymbol{A}_\varepsilon$.

1.2.3. Théorème. *Pour tout anneau* $\boldsymbol{R}$ *et tout idéal* $\boldsymbol{I}$ *dans* $\boldsymbol{R}$, *le couple* $(\boldsymbol{R},\boldsymbol{I})$ *vérifie la propriété de relèvement.*

Démonstration. Soit $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini. Donnons-nous une présentation libre et finie d'un $\overline{\boldsymbol{A}}$-module projectif de type fini $\overline{\boldsymbol{M}}$:

$$\overline{\boldsymbol{A}}^p \xrightarrow{\overline{L}} \overline{\boldsymbol{A}}^q \xrightarrow{\overline{\Pi}} \overline{\boldsymbol{M}} \to 0\,. \tag{$\diamond$}$$

Comme $\overline{\boldsymbol{M}}$ est un $\overline{\boldsymbol{A}}$-module projectif, $\overline{\Pi}$ admet une section $\overline{\sigma}$, la composée $\overline{\psi} := \overline{\sigma}\circ\overline{\Pi} \in \mathrm{End}_{\overline{\boldsymbol{A}}}(\overline{\boldsymbol{A}}^q)$ vérifie $\overline{\psi}^2 = \overline{\psi}$ et $\mathrm{im}(\overline{\psi}) \simeq \overline{\boldsymbol{M}}$. L'endomorphisme $\overline{\psi}$ est donc idempotent et $\overline{\boldsymbol{M}}$ s'identifie au sous-module de $\overline{\boldsymbol{A}}^q$ des vecteurs propres associés à la valeur propre 1. On a ainsi une nouvelle présentation libre et finie de $\overline{\boldsymbol{M}}$:

$$\overline{\boldsymbol{A}}^q \xrightarrow{1-\overline{\psi}} \overline{\boldsymbol{A}}^q \longrightarrow \overline{\boldsymbol{M}} \to 0\,, \quad \text{avec } \overline{\psi}^2 = \overline{\psi}, \tag{$\dagger$}$$

qui est un cas particulier des présentations considérées dans le théorème et que nous étudierons dans un premier temps.

Notons $\psi \in \mathrm{End}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}^q)$ un relèvement quelconque de $\overline{\psi}$. Comme $\overline{\psi}$ est idempotent, on a $\det(2\overline{\psi}-1) = \pm 1$ et donc $\det(2\psi - 1) = \pm 1 + x$, pour un certain $x \in \boldsymbol{I}$. Ainsi, quitte à remplacer $\boldsymbol{A}$ par le localisé $\boldsymbol{A}_{\pm 1+x}$ (voisinage ouvert de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{A}$), on peut supposer que l'endomorphisme $2\psi - 1 \in \mathrm{End}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}^q)$ est inversible.

Nous allons montrer maintenant comment déformer l'endomorphisme ψ (quitte à remplacer $\boldsymbol{A}$ par un voisinage étale de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{A}$) pour en faire un relèvement **idempotent** de $\overline{\psi}$.

– *Supposons l'idéal $\boldsymbol{I}$ principal de générateur noté π*

On a alors $\psi^2 - \psi = \pi\alpha$ pour un certain $\alpha \in \mathrm{End}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}^q)$.

Considérons l'algèbre de polynômes à q^2 inconnues $\boldsymbol{A}[\underline{X}] := \boldsymbol{A}[X_{1,1}, \dots, X_{q,q}]$ et notons $\beta \in \mathrm{End}_{\boldsymbol{A}[\underline{X}]}(\boldsymbol{A}[\underline{X}]^q)$ l'endomorphisme dont la matrice $[\,\beta_{i,j}\,]$, par rapport à la base canonique de $\boldsymbol{A}[\underline{X}]^q$, est donnée par $\beta_{i,j} = X_{i,j}$. Soit :

$$R := \alpha + (2\psi - 1)\beta + \pi\beta^2 \in \mathrm{End}_{\boldsymbol{A}[\underline{X}]}(\boldsymbol{A}[\underline{X}]^q)\,, \tag{$\ddagger$}$$

de matrice associée $[\,R_{i,j}\,]$. On pose : $\boldsymbol{A}_1 := \boldsymbol{A}[\underline{X}]/(R_{i,j})$.

Le jacobien $f := \det[\,\partial R_{i,j}/\partial X_{k,l}\,]$ est de la forme $f = \pm 1 + \pi P$ pour un certain $P \in \boldsymbol{A}[\underline{X}]$. En effet, f modulo π est le jacobien de l'application $\overline{\mathcal{R}} : \mathrm{End}_{\overline{\boldsymbol{A}}}(\overline{\boldsymbol{A}}^q) \to \mathrm{End}_{\overline{\boldsymbol{A}}}(\overline{\boldsymbol{A}}^q)$, définie par $\overline{\mathcal{R}}([\,X_{i,j}\,]) := \overline{\alpha} + (2\overline{\psi} - 1)[\,X_{i,j}\,]$, qui est une application affine de $\mathrm{End}_{\overline{\boldsymbol{A}}}(\overline{\boldsymbol{A}}^q)$ dont l'application tangente est la multiplication à gauche par l'endomorphisme $2\overline{\psi} - 1$. Or, comme $\overline{\psi}$ est idempotent dans $\mathrm{End}_{\overline{\boldsymbol{A}}}(\overline{\boldsymbol{A}}^q)$, on a la décomposition en somme directe de sous-$\boldsymbol{A}$-modules :

$$\mathrm{End}_{\overline{\boldsymbol{A}}}(\overline{\boldsymbol{A}}^q) = \overline{\psi}\cdot \mathrm{End}_{\overline{\boldsymbol{A}}}(\overline{\boldsymbol{A}}^q) \oplus (1 - \overline{\psi})\cdot \mathrm{End}_{\overline{\boldsymbol{A}}}(\overline{\boldsymbol{A}}^q)\,,$$

et la multiplication à gauche par $2\overline{\psi} - 1$ est bien de déterminant ± 1.

L'algèbre localisée $\boldsymbol{A}_{1,f}$ est par conséquent intersection complète étale sur $\boldsymbol{A}$ (1.1.3), et comme la réduction modulo π de $\boldsymbol{A}_{1,f}$, *i.e.* $\overline{\boldsymbol{A}}[\underline{X}]/(\overline{R}_{i,j})$, est clairement isomorphe à $\overline{\boldsymbol{A}}$ puisque $(2\overline{\psi} - 1)$ est inversible, la $\boldsymbol{A}$-algèbre $\boldsymbol{A}_{1,f}$ est un voisinage étale de (π) dans $\boldsymbol{A}$.

Nous étudions maintenant le problème de la commutation entre ψ et $\pi\cdot\beta$.

Comme $\pi\alpha$ commute à ψ (puisque $\pi\alpha = \psi^2 - \psi$) et que R est nul dans $\mathrm{End}_{\boldsymbol{A}_{1,f}}(\boldsymbol{A}_{1,f}{}^q)$, l'égalité ($\ddagger$) donne :

$$[\psi, \pi\beta] = -\pi(2\psi - 1)^{-1}\big(\beta[\psi, \pi\beta] + [\psi, \pi\beta]\beta\big)\,.$$

Notons $[t_{i,j}]$ la matrice de l'endomorphisme $[\psi, \pi\beta]$ relative à la base canonique de $\boldsymbol{A}_{1,f}{}^{q}$. Le développement de la dernière égalité donne lieu à une égalité de la forme :

$$\begin{bmatrix} t_{1,1} \\ \vdots \\ t_{q,q} \end{bmatrix} = \pi\cdot\boldsymbol{Q} \begin{bmatrix} t_{1,1} \\ \vdots \\ t_{q,q} \end{bmatrix}$$

où $\boldsymbol{Q}$ est une matrice à q^2 lignes et colonnes et à coefficients dans $\boldsymbol{A}_{1,f}$. Comme le déterminant de $\mathbb{1}-\pi\cdot\boldsymbol{Q}$ est congruent à 1 modulo π, le vecteur $(t_{1,1}, \ldots, t_{q,q})$ (et donc le commutateur $[\psi, \pi\beta]$) est nul dans la localisation $\boldsymbol{A}_\varepsilon := (\boldsymbol{A}_{1,f})_{\det(\mathbb{1}-\pi\cdot\boldsymbol{Q})}$ qui est bien une intersection complète étale sur $\boldsymbol{A}_{1,f}$ (donc sur $\boldsymbol{A}$) et un voisinage de (π) dans $\boldsymbol{A}_{1,f}$ (donc dans $\boldsymbol{A}$).

Grâce à la commutation de ψ et $\pi\beta$ dans $\mathrm{End}_{\boldsymbol{A}_\varepsilon}(\boldsymbol{A}_\varepsilon{}^q)$, le développement de la différence $(\psi+\pi\beta)^2-(\psi+\pi\beta)$ est égal à πR d'après (‡), et $\psi+\pi\beta$ est un idempotent de $\mathrm{End}_{\boldsymbol{A}_\varepsilon}(\boldsymbol{A}_\varepsilon^q)$ qui relève $\overline{\psi}$, puisque $R = 0$ dans $\mathrm{End}_{\boldsymbol{A}_\varepsilon}(\boldsymbol{A}_\varepsilon^q)$ par construction.

– *Lorsque l'idéal $\boldsymbol{I}$ est de type fini : $\boldsymbol{I} = (\pi_1, \ldots, \pi_m)$ avec $m > 1$*

Notons $\boldsymbol{A}' := \boldsymbol{A}/\pi_1\cdot\boldsymbol{A}$. On peut supposer, par hypothèse de récurrence sur m, qu'il existe une intersection complète étale $\boldsymbol{A}'_\varepsilon$ sur $\boldsymbol{A}'$ et un relèvement idempotent $\psi' \in \mathrm{End}_{\boldsymbol{A}'}(\boldsymbol{A}'_\varepsilon{}^q)$ de $\overline{\psi} \in \mathrm{End}_{\overline{\boldsymbol{A}}}(\overline{\boldsymbol{A}}^q)$.

Soit $\boldsymbol{A}'_\varepsilon = \boldsymbol{A}'[Z_1, \ldots, Z_n]/(f'_1, \ldots, f'_n)$ une présentation de $\boldsymbol{A}'_\varepsilon$ telle que l'élément de $\boldsymbol{A}'_\varepsilon$ défini par $\det[\partial f'_i/\partial Z_j]$ est inversible. La surjection canonique $\boldsymbol{A} \twoheadrightarrow \boldsymbol{A}'$ induit une surjection $\boldsymbol{A}[Z_1, \ldots, Z_n] \twoheadrightarrow \boldsymbol{A}'[Z_1, \ldots, Z_n]$ et l'on a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{A} \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \boldsymbol{A}[Z_1, \ldots, Z_n]/(f_1, \ldots, f_n) \arrow[d, two heads] \\ \boldsymbol{A}' \arrow[r, "\pitchfork"'] & \boldsymbol{A}'_\varepsilon \equiv \boldsymbol{A}'[Z_1, \ldots, Z_n]/(f'_1, \ldots, f'_n) \end{tikzcd}$$

où f_i désigne un relèvement de f'_i dans $\boldsymbol{A}[Z_1, \ldots, Z_n]$. La $\boldsymbol{A}$-algèbre $\boldsymbol{A}_\varepsilon$, localisation de $\boldsymbol{A}[Z_1, \ldots, Z_n]/(f_1, \ldots, f_n)$ par $\det[\partial f_i/\partial Z_j]$, est clairement une intersection complète lisse, voisinage étale de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{A}$ et le diagramme induit suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{A} \arrow[r, "\pitchfork"'] \arrow[d, two heads, "\bmod \pi_1"'] & \boldsymbol{A}_\varepsilon \arrow[d, two heads, "\bmod \pi_1"] \\ \boldsymbol{A}' \arrow[r, "\pitchfork"'] & \boldsymbol{A}'_\varepsilon \end{tikzcd}$$

Il existe alors, toujours par hypothèse inductive, une $\boldsymbol{A}_\varepsilon$-algèbre, intersection complète étale $(\boldsymbol{A}_\varepsilon)_\varepsilon$, voisinage de (π_1) dans $\boldsymbol{A}_\varepsilon$ (donc intersection complète étale et voisinage de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{A}$), telle que ψ' se relève en un idempotent $\psi \in \mathrm{End}_{(\boldsymbol{A}_\varepsilon)_\varepsilon}((\boldsymbol{A}_\varepsilon)_\varepsilon{}^q)$.

– *Lorsque $\boldsymbol{I}$ est un idéal non nécessairement de type fini de $\boldsymbol{R}$*

La relation $\psi^2 - \psi \in \boldsymbol{I}\cdot\mathrm{End}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}^q)$ admet des explicitations de la forme $\psi^2 - \psi = \sum_{k=1}^{k=\ell} x_k\,\varphi_k$, avec $x_k \in \boldsymbol{I} \subseteq \boldsymbol{R}$ et $\varphi_k \in \mathrm{End}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}^q)$. Notons $\boldsymbol{I}'$ l'idéal (de type fini) de $\boldsymbol{R}$ engendré par l'ensemble $\{x_1,\ldots,x_\ell\}$. On a $\psi^2-\psi\in\boldsymbol{I}'\cdot\operatorname{End}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}^q)$ et l'existence d'un voisinage étale $\boldsymbol{A}_\varepsilon$ de $\boldsymbol{I}'$ dans $\boldsymbol{A}$ (donc de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{A}$) de même que le relèvement idempotent ψ_ε résulte de l'étude précédente.

Ceci étant, posons $\boldsymbol{M}_\varepsilon:=\operatorname{im}(\psi_\varepsilon)$. Comme ψ_ε est un endomorphisme idempotent, on a $\boldsymbol{A}_\varepsilon^q=\boldsymbol{M}_\varepsilon\oplus\operatorname{im}(1-\psi_\varepsilon)$ et $\boldsymbol{M}_\varepsilon$ est un $\boldsymbol{A}_\varepsilon$-module projectif de type fini. La présentation $\boldsymbol{A}_\varepsilon^q\xrightarrow{1-\psi_\varepsilon}\boldsymbol{A}_\varepsilon^q\to\boldsymbol{M}_\varepsilon\to 0$ est donc un relèvement de la présentation de module projectif (†), ce qui termine la démonstration du théorème pour ce type de présentations.

On reprend maintenant la donnée d'une présentation de module projectif de la forme générale ($\diamond$) :

$$\overline{\boldsymbol{A}}^p\xrightarrow{\overline{L}}\overline{\boldsymbol{A}}^q\xrightarrow{\overline{\Pi}}\overline{\boldsymbol{M}}\to 0\,.$$

Fixons une section $\overline{\sigma}$ de $\overline{\Pi}$ et notons $\overline{\psi}:=\overline{\sigma}\circ\overline{\Pi}$. D'après l'étude précédente, il existe une $\boldsymbol{A}$-algèbre $\boldsymbol{A}_{\tilde\varepsilon}$, intersection complète étale sur $\boldsymbol{A}$ et voisinage de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{A}$, telle que l'idempotent $\overline{\psi}\in\operatorname{End}_{\overline{\boldsymbol{A}}}(\overline{\boldsymbol{A}}^q)$ se relève en un idempotent $\psi_{\tilde\varepsilon}\in\operatorname{End}_{\boldsymbol{A}_{\tilde\varepsilon}}(\boldsymbol{A}_{\tilde\varepsilon}^q)$. Notons $L_1\in\operatorname{Hom}_{\boldsymbol{A}_{\tilde\varepsilon}}(\boldsymbol{A}_{\tilde\varepsilon}^p,\boldsymbol{A}_{\tilde\varepsilon}^q)$ un relèvement quelconque de $\overline{\boldsymbol{L}}$ et posons $L_{\tilde\varepsilon}=(1-\psi_{\tilde\varepsilon})\circ L_1$ de sorte que la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ de $L_{\tilde\varepsilon}$ s'identifie toujours à $\overline{L}$:

$$\begin{array}{ccccc}
\boldsymbol{A}_{\tilde\varepsilon}^p & \xrightarrow[(1-\psi_{\tilde\varepsilon})\circ L_1]{L_{\tilde\varepsilon}} & \boldsymbol{A}_{\tilde\varepsilon}^q & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
\overline{\boldsymbol{A}}^p & \xrightarrow{\quad\overline{L}\quad} & \overline{\boldsymbol{A}}^q & \twoheadrightarrow & \overline{\boldsymbol{M}}\to 0
\end{array}$$

Mais, si $L_{\tilde\varepsilon}$ relève bien $\overline{L}$, rien n'assure *a priori* que son conoyau soit projectif, ce pour quoi il suffirait que l'on ait $\operatorname{im}(L_{\tilde\varepsilon})=\operatorname{im}(1-\psi_{\tilde\varepsilon})$ puisque $\psi_{\tilde\varepsilon}$ est idempotent. Or, le conoyau $\mathcal{K}$ de l'inclusion $\operatorname{im}(L_{\tilde\varepsilon})\subseteq\operatorname{im}(1-\psi_{\tilde\varepsilon})$ est un $\boldsymbol{A}_{\tilde\varepsilon}$-module de type fini dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ est nulle, autrement dit, on a $\boldsymbol{I}\cdot\mathcal{K}=\mathcal{K}$. Il existe par conséquent un élément g de $\boldsymbol{A}_{\tilde\varepsilon}$ congruent à 1 modulo $\boldsymbol{I}$, tel que le foncteur de localisation $\boldsymbol{A}_{\tilde\varepsilon,g}\otimes_{\boldsymbol{A}_{\tilde\varepsilon}}(\_)$ annule $\mathcal{K}$ (Nakayama). On pose alors $\boldsymbol{A}_\varepsilon:=\boldsymbol{A}_{\tilde\varepsilon,g}$ et $L_\varepsilon:=\operatorname{id}_{\boldsymbol{A}_\varepsilon}\otimes L_{\tilde\varepsilon}$. (On remarquera que la $\boldsymbol{A}$-algèbre $\boldsymbol{A}_\varepsilon$ est toujours intersection complète étale sur $\boldsymbol{A}$ et voisinage de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{A}$.)

L'image de L_ε s'identifie bien maintenant à l'image de l'idempotent $\operatorname{id}_{\boldsymbol{A}_\varepsilon}\otimes(1-\psi_{\tilde\varepsilon})$ de supplémentaire $\boldsymbol{M}_\varepsilon:=\operatorname{im}(\operatorname{id}_{\boldsymbol{A}_\varepsilon}\otimes\psi_{\tilde\varepsilon})$. Le $\boldsymbol{A}_\varepsilon$-module $\boldsymbol{M}_\varepsilon$ est donc projectif de type fini, et nous avons la présentation :

$$\boldsymbol{A}_\varepsilon^p\xrightarrow{L_\varepsilon}\boldsymbol{A}_\varepsilon^q\twoheadrightarrow\boldsymbol{M}_\varepsilon\to 0$$

qui est un relèvement de ($\diamond$). □

1.2.4. Remarque. La preuve de l'existence du relèvement idempotent de $\overline{\psi}$ se simplifie remarquablement dans le cas où l'idéal $\boldsymbol{I}$ est nilpotent (plus généralement lorsque chaque élément de $\boldsymbol{I}$ est nilpotent). Dans ce cas on peut prendre $\boldsymbol{A}_\varepsilon=\boldsymbol{A}$. En effet, pour tout relèvement ψ de $\overline{\psi}$, l'endomorphisme $1-2\psi$ est inversible puisque de déterminant $\pm 1 + x$ avec x nilpotent. D'autre part, on a $\psi^2 - \psi = \alpha$ avec $\alpha \in \boldsymbol{I}' \cdot \mathrm{End}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}^q)$ pour un certain idéal de type fini $\boldsymbol{I}' \subseteq \boldsymbol{I}$. L'élément α commute clairement à ψ et si $\alpha \in (\boldsymbol{I}')^r \cdot \mathrm{End}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}^q)$, on pose :

$$\psi' := \psi + (1 - 2\psi)^{-1}\alpha\,,$$

de sorte que ψ' relève toujours $\overline{\psi}$ et vérifie :

$$\psi'^2 - \psi' = (1 - 2\psi)^{-2}\alpha^2 =: \alpha' \in (\boldsymbol{I}')^{2r} \cdot \mathrm{End}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}^q)\,.$$

L'itération de cette idée permet, grâce à la nilpotence de $\boldsymbol{I}'$, de construire un relèvement idempotent $\psi_\varepsilon \in \mathrm{End}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}^q)$ de $\overline{\psi}$.

1.3. Relèvements lisses des algèbres lisses

La démonstration du théorème suivant est une transcription presque littérale de celle de Renée Elkik (cf. [E] §4 p. 580) qui prouvait l'existence de relèvements lisses lorsque le couple $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{I})$ était supposé hensélien nœthérien.

1.3.1. Théorème. *Toute $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre lisse se relève en une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse.*

Démonstration. Soit $\overline{\boldsymbol{B}}$ une $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre lisse et fixons une présentation finie de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre : $\overline{\boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{R}}[X_1, \ldots, X_N]/\overline{\boldsymbol{J}}$. Le $\overline{\boldsymbol{B}}$-module $\overline{\boldsymbol{J}}/\overline{\boldsymbol{J}}^2$ est alors projectif de type fini. Notons $\overline{\boldsymbol{C}} := \mathsf{S}^*_{\overline{\boldsymbol{B}}}(\overline{\boldsymbol{J}}/\overline{\boldsymbol{J}}^2)$ la $\overline{\boldsymbol{B}}$-algèbre symétrique de $\overline{\boldsymbol{J}}/\overline{\boldsymbol{J}}^2$. Le schéma affine associé à $\boldsymbol{C}$, noté $\mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{C}})$, est le fibré conormal à $\mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{B}})$ dans le plongement $\mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{B}}) \subseteq \mathbb{A}^N_{\overline{\boldsymbol{R}}}$ déterminé par la présentation ci-dessus (1.1.4). Le morphisme de $\overline{\boldsymbol{B}}$-algèbres $\sigma_0 : \overline{\boldsymbol{C}} \to \overline{\boldsymbol{B}}$, nul sur $\overline{\boldsymbol{J}}/\overline{\boldsymbol{J}}^2$, donne le morphisme de schémas "*section nulle*" $\mathrm{Spec}(\sigma_0) : \mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{B}}) \to \mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{C}})$. Notons $f : \mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{C}}) \to \mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{B}})$ le morphisme structural ; on a $f \circ \mathrm{Spec}(\sigma_0) = \mathrm{id}_{\mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{B}})}$.

Ces données étant conformes aux hypothèses de la proposition 1.1.6-(b), on peut fixer pour la suite une $\boldsymbol{R}$-algèbre (intersection complète) lisse $\boldsymbol{C}$ qui relève $\overline{\boldsymbol{C}}$, d'où le diagramme des morphismes canoniques $(\mathcal{D})$ ci-après. D'autre part, le $\overline{\boldsymbol{C}}$-module $\overline{\boldsymbol{M}} := \overline{\boldsymbol{C}} \otimes_{\overline{\boldsymbol{B}}} (\overline{\boldsymbol{J}}/\overline{\boldsymbol{J}}^2)$ est projectif de type fini et, quitte à remplacer $\boldsymbol{C}$ par un voisinage étale de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{C}$, il existe un $\boldsymbol{C}$-module projectif de type fini $\boldsymbol{M}$ dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ est isomorphe à $\overline{\boldsymbol{M}}$ (propriété de relèvement du couple $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{I})$ (1.2.3)). L'algèbre $\boldsymbol{D} := \mathsf{S}^*_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{M})$ est lisse sur $\boldsymbol{C}$ (et donc sur $\boldsymbol{R}$) puisque $\boldsymbol{M}$ est projectif de type fini.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(\boldsymbol{C}) \arrow[dd] & & \mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{C}}) \arrow[ll, hook'] \arrow[d, shift right, "f"'] \\ & (\mathcal{D}) & \mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{B}}) \arrow[u, shift right, "\text{section nulle}"'] \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}(\boldsymbol{R}) & & \mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{R}}) \arrow[ll, hook'] \end{tikzcd}$$

Complétons le diagramme $(\mathcal{D})$ par les morphismes canoniques indiqués cidessous :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathrm{Spec}\left(\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{M})\right) = \mathrm{Spec}(\boldsymbol{D}) \arrow[d, shift left, "\text{section nulle}"', leftarrow] \arrow[d, shift right=2] \arrow[d, dashed, leftarrow, shift left=4, "\Delta"] & & \mathrm{Spec}\left(\overline{\boldsymbol{C}} \otimes_{\boldsymbol{B}} \overline{\boldsymbol{C}}\right) = \mathrm{Spec}\left(\mathsf{S}^*_{\overline{\boldsymbol{C}}}(\overline{\boldsymbol{M}})\right) \arrow[ll, hook'] \arrow[d, shift right=2, leftarrow, "\overline{\Delta}"'] \arrow[d] \arrow[d, shift left=2, leftarrow, "\text{section nulle}"] \\
\mathrm{Spec}(\boldsymbol{C}) \arrow[ddd] & & \mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{C}}) \arrow[ll, hook'] \arrow[d, shift right, "f"'] \\
& (\mathcal{D}) & \mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{B}}) \arrow[u, shift right, "\text{section nulle}"'] \arrow[dd] \\
& & \\
\mathrm{Spec}(\boldsymbol{R}) & & \mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{R}}) \arrow[ll, hook']
\end{tikzcd} \qquad (\mathcal{D}')$$

où $\overline{\Delta}$ désigne la "*section diagonale*" du morphisme structural de $\mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{C}} \otimes_{\boldsymbol{B}} \overline{\boldsymbol{C}})$ vers $\mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{C}})$. Il s'agit du morphisme de schémas associé au momorphisme de $\overline{\boldsymbol{C}}$-algèbres $\overline{\delta} : \mathsf{S}^*_{\overline{\boldsymbol{C}}}(\overline{\boldsymbol{M}}) \to \boldsymbol{C}$ défini par la forme $\overline{\boldsymbol{C}}$-linéaire :

$$\begin{aligned} \overline{\delta}|_{\overline{\boldsymbol{M}}} : \overline{\boldsymbol{M}} = \overline{\boldsymbol{C}} \otimes_{\boldsymbol{B}} \left(\boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2\right) &\longrightarrow \overline{\boldsymbol{C}} = \mathsf{S}^*_{\boldsymbol{B}}\left(\boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2\right) \\ c \otimes v &\longmapsto c \cdot v \end{aligned} \qquad (\ddagger)$$

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{M} \arrow[r, two heads] \arrow[d, dashed, "\delta|_{\boldsymbol{M}}"'] \arrow[dr] & \overline{\boldsymbol{M}} \arrow[d, "\overline{\delta}|_{\overline{\boldsymbol{M}}}"] \\
\boldsymbol{C} \arrow[r, two heads] & \overline{\boldsymbol{C}}
\end{tikzcd}$$

Comme $\boldsymbol{D}$ est l'algèbre symétrique de $\boldsymbol{M}$, l'homomorphisme $\overline{\delta}$ admet un relèvement en un morphisme de $\boldsymbol{C}$-algèbres $\delta : \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{C}$, si et seulement si, la forme $\overline{\boldsymbol{C}}$-linéaire $\overline{\delta}|_{\overline{\boldsymbol{M}}} : \overline{\boldsymbol{M}} \to \overline{\boldsymbol{C}}$ se relève en une forme $\boldsymbol{C}$-linéaire $\delta|_{\boldsymbol{M}} : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{C}$. L'existence du relèvement $\delta|_{\boldsymbol{M}}$ est conséquence du fait que $\boldsymbol{M}$ est un $\boldsymbol{C}$-module projectif (cf. diagramme ci-après, où les lignes correspondent à la réduction modulo $\boldsymbol{I}$). On note $\Delta : \mathrm{Spec}(\boldsymbol{C}) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(\boldsymbol{D})$ la section du morphisme structural $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{D}) \to \mathrm{Spec}(\boldsymbol{C})$ correspondante à δ. Le morphisme de schémas Δ prolonge section diagonale $\overline{\Delta}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{C}}) \arrow[r, hook, "\overline{\Delta}", "\mathrm{Spec}(\overline{\delta})"'] \arrow[d, "\subseteq"] & \mathrm{Spec}\left(\overline{\boldsymbol{C}} \otimes_{\boldsymbol{B}} \overline{\boldsymbol{C}}\right) = \mathrm{Spec}\left(\mathsf{S}^*_{\overline{\boldsymbol{C}}}(\overline{\boldsymbol{M}})\right) \arrow[d, "\subseteq"] \\
\mathrm{Spec}(\boldsymbol{C}) \arrow[r, hook, "\Delta", "\mathrm{Spec}(\delta)"'] & \mathrm{Spec}\left(\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{M})\right)
\end{tikzcd}$$

Nous avons donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\boldsymbol{M} \arrow[rrr, two heads] \arrow[dr, dashed, hook, "\subseteq"] \arrow[dd, "\delta|_{\boldsymbol{M}}"'] & & & \overline{\boldsymbol{M}} \arrow[dr, dashed, hook, "\subseteq"] \arrow[dd, "\overline{\delta}|_{\overline{\boldsymbol{M}}}"'] & & \\
& \mathsf{S}^*_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{M}) \arrow[rrr, two heads] \arrow[dd, "\delta"] & & & \mathsf{S}^*_{\overline{\boldsymbol{C}}}(\overline{\boldsymbol{M}}) \arrow[dd, "\overline{\delta}"] & \\
\delta\boldsymbol{M} \arrow[rrr, two heads] \arrow[dr, dashed, hook, "\subseteq"] & & & \overline{\delta}\overline{\boldsymbol{M}} \arrow[dr, dashed, hook, "\subseteq"] & & \\
& \boldsymbol{C} \arrow[rrr, two heads] \arrow[dr] & & & \overline{\boldsymbol{C}} \arrow[dr] & \\
& & \boldsymbol{B} := \dfrac{\boldsymbol{C}}{\delta\boldsymbol{M}} \arrow[rrr, two heads] & & & \dfrac{\overline{\boldsymbol{C}}}{\overline{\delta}\overline{\boldsymbol{M}}} = \overline{\boldsymbol{B}}
\end{tikzcd}$$

où les morphismes horizontaux correspondent à la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ et où l'équivalence $\overline{\boldsymbol{B}} \equiv \overline{\boldsymbol{C}}/\overline{\delta}\overline{\boldsymbol{M}}$ résulte de la définition de $\overline{\delta}$ $(\ddagger)$ (Spec$(\overline{\boldsymbol{B}})$ apparaît, heuristiquement parlant, comme l'intersection de la section nulle et de la section diagonale de la fibration $\mathrm{Spec}(\mathrm{S}^*_{\overline{\boldsymbol{C}}}(\overline{\boldsymbol{M}})) \twoheadrightarrow \mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{C}})$. Enfin, la $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{B} := \boldsymbol{C}/\delta\boldsymbol{M}$ est un relèvement de $\overline{\boldsymbol{B}}$ par construction. Nous prouvons dans la suite que $\boldsymbol{B}$ est lisse sur $\boldsymbol{R}$.

Considérons la suite d'applications :

$$\overline{\boldsymbol{M}} \xrightarrow{\ \bar\delta\ } \overline{\boldsymbol{C}} \xrightarrow{d_{\overline{\boldsymbol{C}}/\overline{\boldsymbol{R}}}} \Omega_{\overline{\boldsymbol{C}}/\overline{\boldsymbol{R}}} \xrightarrow{\ \bar\nu\ } \!\!\!\!\rightarrow \Omega_{\overline{\boldsymbol{C}}/\overline{\boldsymbol{B}}} = \overline{\boldsymbol{M}}\,, \tag{$*$}$$

où $\bar\nu$ est la surjection donnée par la seconde suite fondamentale associée à l'homomorphisme structural de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres de $\overline{\boldsymbol{B}}$ dans $\overline{\boldsymbol{C}}$. Les applications $\bar\delta$ et $\bar\nu$ sont $\overline{\boldsymbol{C}}$-linéaires et lorsque l'on tensorise chaque terme de $(*)$ par $\overline{\boldsymbol{C}}/\bar\delta\overline{\boldsymbol{M}} = \overline{\boldsymbol{B}}$, l'application $\mathrm{id}_{\overline{\boldsymbol{B}}} \otimes (d_{\overline{\boldsymbol{C}}/\overline{\boldsymbol{B}}} \circ \bar\delta)$ le devient également ; le morphisme de $\overline{\boldsymbol{C}}$-modules $\mathrm{id}_{\overline{\boldsymbol{B}}} \otimes (\bar\nu \circ d_{\overline{\boldsymbol{C}}/\overline{\boldsymbol{B}}} \circ \bar\delta) : \overline{\boldsymbol{B}} \otimes_{\overline{\boldsymbol{C}}} \overline{\boldsymbol{M}} \to \overline{\boldsymbol{B}} \otimes_{\overline{\boldsymbol{C}}} \overline{\boldsymbol{M}}$ est alors l'identité d'après la définition même de $\bar\delta$ dans (‡).

Ceci étant, le $\boldsymbol{C}$-module $\Omega_{\boldsymbol{C}/\boldsymbol{R}}$ est projectif car $\boldsymbol{C}$ est lisse sur $\boldsymbol{R}$, et le morphisme $\bar\nu$ se relève en un morphisme de $\boldsymbol{C}$-modules ν. On a :

$$\begin{tikzcd}
\Omega_{\boldsymbol{C}/\boldsymbol{R}} \arrow[r, dashed, "\nu"] \arrow[d, two heads] & \boldsymbol{M} \arrow[d, two heads] \\
\Omega_{\overline{\boldsymbol{C}}/\overline{\boldsymbol{R}}} \arrow[r, two heads, "\bar\nu"] & \Omega_{\overline{\boldsymbol{C}}/\overline{\boldsymbol{B}}} = \overline{\boldsymbol{M}}
\end{tikzcd}$$

où les morphismes verticaux correspondent à la réduction modulo $\boldsymbol{I}$.

La suite $(*)$ tensorisée par $\overline{\boldsymbol{B}}$ se relève donc en une suite de morphismes de $\boldsymbol{C}$-modules :

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{B} \otimes_{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{M} \arrow[r, "\mathrm{id}_{\boldsymbol{B}} \otimes (d_{\boldsymbol{C}/\boldsymbol{R}} \circ \delta)"] \arrow[rr, bend right, "\xi"'] & \boldsymbol{B} \otimes_{\boldsymbol{C}} \Omega_{\boldsymbol{C}/\boldsymbol{R}} \arrow[r, "\mathrm{id}_{\boldsymbol{B}} \otimes \nu"] & \boldsymbol{B} \otimes_{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{M}
\end{tikzcd} \tag{$**$}$$

dont la composée, notée ξ, est l'identité modulo $\boldsymbol{I}$. Le conoyau de ξ est donc annulé par la réduction modulo $\boldsymbol{I}$, autrement dit, on a $\boldsymbol{I} \cdot \mathrm{coker}(\xi) = \mathrm{coker}(\xi)$. Comme $\boldsymbol{M}$ est de type fini, l'annulateur dans $\boldsymbol{C}$ de $\mathrm{coker}(\xi)$ contient un élément de la forme $g = 1 + x{\cdot}c$, avec $x \in \boldsymbol{I}$ (Nakayama), de sorte que, quitte à remplacer $\boldsymbol{C}$ par le localisé $\boldsymbol{C}_g$ (voisinage ouvert de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{C}$), on peut supposer ξ surjectif. Mais alors $\ker(\xi)$ est facteur direct de $\boldsymbol{B} \otimes_{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{M}$ puisque $\boldsymbol{B} \otimes_{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{M}$ est un $\boldsymbol{B}$-module projectif. Il s'ensuit que $\ker(\xi)$ est un $\boldsymbol{B}$-module (donc un $\boldsymbol{C}$-module) de type fini qui est également annulé par la réduction modulo $\boldsymbol{I}$. En remplaçant, si besoin, une fois de plus $\boldsymbol{C}$ par un nouveau voisinage de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{C}$, on peut supposer le morphisme ξ **bijectif**.

D'autre part, on a la factorisation de $\mathrm{id}_{\boldsymbol{B}} \otimes (d_{\boldsymbol{C}/\boldsymbol{R}} \circ \delta)$ en :

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{B} \otimes_{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{M} \arrow[r, two heads, "\delta"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_{\boldsymbol{B}} \otimes (d_{\boldsymbol{C}/\boldsymbol{R}} \circ \delta)"'] & \dfrac{\delta\boldsymbol{M}}{(\delta\boldsymbol{M})^2} \arrow[r, "\partial"] & \boldsymbol{B} \otimes_{\boldsymbol{C}} \Omega_{\boldsymbol{C}/\boldsymbol{R}}
\end{tikzcd}$$

où ∂ est le morphisme de la première suite fondamentale associée à la surjection canonique $\boldsymbol{C} \twoheadrightarrow \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}/\delta\boldsymbol{M}$. La bijectivité de ξ implique que le morphisme ∂ admet une rétraction et la $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{B}$ est lisse d'après le corollaire 0.2.3. □

1.4. À propos de l'unicité des relèvements d'une algèbre lisse

Le dernier théorème montre que pour tout couple $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{I})$ les $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres lisses admettent des relèvements lisses. Une question naturelle alors est de savoir à quelle condition deux relèvements d'une même algèbre lisse sont isomorphes.

Lorsque l'idéal $\boldsymbol{I}$ n'est pas nilpotent, on construit facilement des exemples de relèvements non isomorphes. Il suffit, par contre, que l'idéal $\boldsymbol{I}$ soit nilpotent pour que tout relèvement soit unique à isomorphisme (non canonique) près. Le résultat suivant est dû à Grothendieck.

1.4.1. Proposition ([SGA$_1$]). *Soient $\boldsymbol{R}$ un anneau arbitraire et $\boldsymbol{I}$ un idéal nilpotent de $\boldsymbol{R}$. Soient $\boldsymbol{A}_1$ et $\boldsymbol{A}_2$ deux $\boldsymbol{R}$-algèbres* **lisses** *dont les réductions $\overline{\boldsymbol{A}}_1$ et $\overline{\boldsymbol{A}}_2$ sont des $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres isomorphes. Alors, les $\boldsymbol{R}$-algèbres $\boldsymbol{A}_1$ et $\boldsymbol{A}_2$ sont isomorphes.*

1.4.2. Remarque sur les relèvements formellement lisses. Pour tout couple $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{I})$ et chaque $m = 1, 2, \ldots$, notons $\nu_m : \boldsymbol{R}/\boldsymbol{I}^{m+1} \twoheadrightarrow \boldsymbol{R}/\boldsymbol{I}^m$ la surjection canonique. Le complété séparé $\boldsymbol{I}$-adique de $\boldsymbol{R}$ est la limite du système projectif défini par les ν_m, *i.e.* $\widehat{\boldsymbol{R}} := \varprojlim_m \boldsymbol{R}/\boldsymbol{I}^m$. Le noyau de ν_m est l'idéal de carré nul $\boldsymbol{I}^m/\boldsymbol{I}^{m+1} \subseteq \boldsymbol{R}/\boldsymbol{I}^{m+1}$ et un argument inductif sur $m = 1, 2, \ldots$, permet de construire de proche en proche un relèvement $\boldsymbol{A}_m$ lisse sur $\boldsymbol{R}_m := \boldsymbol{R}/\boldsymbol{I}^m$ d'une $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre lisse donnée $\overline{\boldsymbol{A}}$ et ceci pour chaque entier positif m. Le théorème précédent affirme que ces relèvements sont toujours deux à deux isomorphes pour chaque m fixé. Pour toute suite $(\boldsymbol{A}_m)_{m=1,2\ldots}$ de tels relèvements, la limite projective $\boldsymbol{A}^\infty$ est une $\widehat{\boldsymbol{R}}$-algèbre complète et séparée isomorphe à toute autre algèbre $\boldsymbol{A}'^\infty$ ainsi construite. Lorsque l'anneau $\boldsymbol{R}$ est en plus nœthérien (ou que $\boldsymbol{I}/\boldsymbol{I}^2$ est de type fini) les réductions modulo $\boldsymbol{I}^m$ de $\boldsymbol{A}^\infty$ sont des $\boldsymbol{R}_m$-algèbres isomorphes aux algèbres lisses $\boldsymbol{A}_m$ pour tout m ; on dit que $\boldsymbol{A}^\infty$ est un relèvement "*$\boldsymbol{I}$-formellement lisse*" de $\overline{\boldsymbol{A}}$. Dans le cas nœthérien on montre, toujours à l'aide de 1.4.1, que deux relèvements $\boldsymbol{I}$-formellement lisses complets et séparés d'une même $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre lisse sont isomorphes ([SGA$_1$]). En particulier, lorsque $\boldsymbol{A}$ est un relèvement lisse sur $\boldsymbol{R}$ de $\overline{\boldsymbol{A}}$, les relèvements formellement lisses complets et séparés de $\overline{\boldsymbol{A}}$ sont isomorphes à $\widehat{\boldsymbol{A}} := \varprojlim_m \boldsymbol{A}/\boldsymbol{I}^m{\cdot}\boldsymbol{A}$. On a donc :

1.4.3. Proposition. *Soient $\boldsymbol{R}$ un anneau nœthérien et $\boldsymbol{A}_1$ et $\boldsymbol{A}_2$ deux $\boldsymbol{R}$-algèbres* lisses *dont les réductions $\overline{\boldsymbol{A}}_1$ et $\overline{\boldsymbol{A}}_2$ sont des $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres isomorphes. Alors, les algèbres $\widehat{\boldsymbol{A}}_1$ et $\widehat{\boldsymbol{A}}_2$ sont isomorphes.*

2. Relèvements des morphismes

2.0.1. Définition. Soit $\overline{h} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}$ un morphisme de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres, on appelle "*relèvement de* $\overline{h}$" la donnée des relèvements d'algèbres $p_{\boldsymbol{A}} : \boldsymbol{A} \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{A}}$ et $p_{\boldsymbol{B}} : \boldsymbol{B} \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{B}}$ et d'un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $h : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$, tels que $p_{\boldsymbol{B}} \circ h = \overline{h} \circ p_{\boldsymbol{A}}$. Soit, en termes de diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{A} \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[d, two heads, "p_{\boldsymbol{A}}"'] & \boldsymbol{B} \arrow[d, two heads, "p_{\boldsymbol{B}}"] \\ \overline{\boldsymbol{A}} \arrow[r, "\overline{h}"] & \overline{\boldsymbol{B}} \end{tikzcd}$$

2.1. Relèvements de morphismes à source lisse

Dans cette section nous allons étudier les questions des relèvements de morphismes Rel-3,4. Les théorèmes concernant ces questions découlent du résultat technique 2.1.2 dont la preuve utilise à plusieurs reprises la remarque suivante.

2.1.1. Scolie sur les algèbres étales. Soient $\boldsymbol{B}$ un anneau et $\boldsymbol{B}_\varepsilon$ une $\boldsymbol{B}$-algèbre d'homomorphisme structural noté $\varepsilon : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}_\varepsilon$. Soit $\boldsymbol{K}$ un idéal dans $\boldsymbol{B}$ et notons $(\overline{\ })$ le foncteur de réduction modulo $\boldsymbol{K}$. Lorsque ε est étale, $\overline{\varepsilon}$ l'est également (propriété stable par changement de base). Le lemme suivant donne une condition simple permettant de relever une algèbre étale sur $\overline{\boldsymbol{B}}$.

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{B} \arrow[r, "\varepsilon", "\text{étale}"'] \arrow[d, two heads, "p_{\boldsymbol{A}}"'] & \boldsymbol{B}_\varepsilon \arrow[d, two heads, "p_{\boldsymbol{B}}"] \\ \overline{\boldsymbol{B}} \arrow[r, dashed, "\overline{\varepsilon}", "\text{étale}"'] & \overline{\boldsymbol{B}}_\varepsilon \end{tikzcd}$$

Lemme. *Soit $\overline{\varepsilon} : \overline{\boldsymbol{B}} \to \overline{\boldsymbol{B}}_\varepsilon$ un homomorphisme d'anneaux et supposons $\overline{\boldsymbol{B}}_\varepsilon$ intersection complète étale sur $\overline{\boldsymbol{B}}$. Il existe alors une $\boldsymbol{B}$-algèbre $\boldsymbol{B}_\varepsilon$, intersection complète étale sur $\boldsymbol{B}$, et un homomorphisme surjectif $p_{\boldsymbol{B}_\varepsilon} : \boldsymbol{B}_\varepsilon \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{B}}_\varepsilon$ de réduction modulo $\boldsymbol{K}$ bijective, tels que le diagramme ci-après est commutatif.*

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{B} \arrow[r, dashed, "\varepsilon", "\pitchfork\ \text{étale}"'] \arrow[d, two heads, "p_{\boldsymbol{A}}"'] & \boldsymbol{B}_\varepsilon \arrow[d, dashed, two heads, "p_{\boldsymbol{B}}"] \\ \overline{\boldsymbol{B}} \arrow[r, "\overline{\varepsilon}", "\pitchfork\ \text{étale}"'] & \overline{\boldsymbol{B}}_\varepsilon \end{tikzcd}$$

Démonstration. Soit $\overline{\boldsymbol{B}}_\varepsilon := \overline{\boldsymbol{B}}[X_1, \ldots, X_n]/(\overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_n)$ une présentation de $\overline{\boldsymbol{B}}_\varepsilon$ telle que l'élément de $\boldsymbol{B}_\varepsilon$ défini par $\det[\partial\overline{f}_i/\partial X_j]$ est inversible. Posons $\boldsymbol{B}' := \boldsymbol{B}[X_1, \ldots, X_n]/(f_1, \ldots, f_n)$, où f_i est un relèvement de $\overline{f}_i$ dans $\boldsymbol{B}[X_1, \ldots, X_n]$. Le localisé $\boldsymbol{B}_\varepsilon := \boldsymbol{B}'_{\det[\partial f_i/\partial X_j]}$ vérifie alors les conditions requises (cf. 1.1.3). $\square$

La propriété énoncée dans la proposition suivante est l'analogue *algébrique* de la propriété de Monsky–Washnitzer qui définit les *algèbres très lisses*; nous y reviendrons dans 3.3.

2.1.2. Théorème. *Soit $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse et donnons-nous :*

$$\left\{\begin{array}{l}\bullet\ \textit{Une paire d'homomorphismes de } \boldsymbol{R}\textit{-algèbres } \boldsymbol{A} \xrightarrow{\varphi} \boldsymbol{C} \overset{p}{\twoheadleftarrow} \boldsymbol{B}, \textit{ où } p \textit{ est surjectif de noyau noté } \boldsymbol{K}\ (\boldsymbol{K} = \boldsymbol{B} \textit{ compris}).\\ \bullet\ \textit{Un homomorphisme de } \overline{\boldsymbol{R}}\textit{-algèbres } \overline{h} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}} \textit{ vérifiant } \overline{\varphi} = \overline{p} \circ \overline{h}.\end{array}\right.$$

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{A} \arrow[dr, "\varphi"'] & \boldsymbol{B} \arrow[d, two heads, "p"] \\ & \boldsymbol{C} \end{tikzcd} + \begin{tikzcd} \overline{\boldsymbol{A}} \arrow[r, "\overline{h}"] \arrow[dr, "\overline{\varphi}"'] & \overline{\boldsymbol{B}} \arrow[d, two heads, "\overline{p}"] \\ & \overline{\boldsymbol{C}} \end{tikzcd}$$

Alors :

a) *Pour chaque entier strictement positif n, il existe une* **application** $\eta_n : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ *telle que :*

$$\left\{\begin{array}{l}\text{(i) } p_{\boldsymbol{B}} \circ \eta_n = \overline{h} \circ p_{\boldsymbol{A}}\,,\\ \text{(ii) } p \circ \eta_n = \varphi\,,\\ \text{(iii) } \nu_n \circ \eta_n \textit{ est un morphisme de } \boldsymbol{R}\textit{-algèbres.}\end{array}\right. \qquad \begin{tikzcd} \boldsymbol{A} \arrow[r, dashed, "\exists\, \eta_n"] \arrow[d, two heads, "p_{\boldsymbol{A}}"'] & \boldsymbol{B} \arrow[d, two heads, "p_{\boldsymbol{B}}"] \\ \overline{\boldsymbol{A}} \arrow[r, "\overline{h}"] & \overline{\boldsymbol{B}} \end{tikzcd}$$

où $\nu_n : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}/((\boldsymbol{I}{\cdot}\boldsymbol{B}) \cap \boldsymbol{K})^n$ désigne la surjection canonique.

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{A} \arrow[dr, "\varphi"'] & \boldsymbol{B} \arrow[d, two heads, "p"] \\ & \boldsymbol{C} \end{tikzcd} + \begin{tikzcd} \overline{\boldsymbol{A}} \arrow[r, "\overline{h}"] \arrow[dr, "\overline{\varphi}"'] & \overline{\boldsymbol{B}} \arrow[d, two heads, "\overline{p}"] \\ & \overline{\boldsymbol{C}} \end{tikzcd} \Longrightarrow \begin{tikzcd} \boldsymbol{A} \arrow[r, dashed, "\exists\, \eta_n"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \boldsymbol{B} \arrow[r, two heads, "\nu_n"] \arrow[d, two heads, "p"] & \dfrac{\boldsymbol{B}}{((\boldsymbol{I}{\cdot}\boldsymbol{B}) \cap \boldsymbol{K})^n} \arrow[dl, two heads, "p_n"] \\ & \boldsymbol{C} & \end{tikzcd}$$

(*L'homomorphisme p_n est celui induit par p.*)

b) *Il existe un voisinage étale $\boldsymbol{B}_\varepsilon$ de $\boldsymbol{I}{\cdot}\boldsymbol{K}$ dans $\boldsymbol{B}$, intersection complète sur $\boldsymbol{B}$, dont on note $\varepsilon : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}_\varepsilon$ l'homomorphisme structural et $p_\varepsilon : \boldsymbol{B}_\varepsilon \twoheadrightarrow \boldsymbol{C}$ l'homomorphisme induit par p, et il existe un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $h_\varepsilon : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}_\varepsilon$ tels que $\overline{h}_\varepsilon = \overline{\varepsilon} \circ \overline{h}$ et $\varphi = p_\varepsilon \circ h_\varepsilon$. En d'autres termes, on a un diagramme :*

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{A} \arrow[dr, "\varphi"'] & \boldsymbol{B} \arrow[d, two heads, "p"] \\ & \boldsymbol{C} \end{tikzcd} + \begin{tikzcd} \overline{\boldsymbol{A}} \arrow[r, "\overline{h}"] \arrow[dr, "\overline{\varphi}"'] & \overline{\boldsymbol{B}} \arrow[d, two heads, "\overline{p}"] \\ & \overline{\boldsymbol{C}} \end{tikzcd} \Longrightarrow \begin{tikzcd} \boldsymbol{A} \arrow[r, dashed, "\exists\, h_\varepsilon"] \arrow[rr, dotted, bend left, "\overline{h}"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \boldsymbol{B}_\varepsilon \arrow[d, two heads, "p_\varepsilon"] & \boldsymbol{B} \arrow[l, "\varepsilon"'] \arrow[dl, two heads, "p"] \\ & \boldsymbol{C} & \end{tikzcd}$$

Démonstration.

• *Cas où $\boldsymbol{A}$ est intersection complète lisse*

Soit $\boldsymbol{A}{=}\boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_m]/(f_{r+1}, \ldots, f_m)$ une présentation de $\boldsymbol{A}$ en tant qu'intersection complète lisse sur $\boldsymbol{R}$ et notons $\nu : \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_m] \to \boldsymbol{A}$ la surjection canonique.

a) L'existence des applications η_n de l'assertion (a) vérifiant (i) et (ii) équivaut à l'existence de morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\alpha_n : \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_m] \to \boldsymbol{B}$ rendant commutatifs diagrammes :

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{R}[X_1,\ldots,X_m] \arrow[r, "\alpha_n"] \arrow[d, two heads, "\nu"'] & \boldsymbol{B} \arrow[d, two heads, "p"] \\ \boldsymbol{A} \arrow[r, "\varphi"] & \boldsymbol{C} \end{tikzcd} \qquad \Bigg| \qquad \begin{tikzcd} \overline{\boldsymbol{R}}[X_1,\ldots,X_m] \arrow[r, "\bar{\alpha}_n"] \arrow[d, two heads, "\bar{\nu}"'] & \overline{\boldsymbol{B}} \arrow[d, two heads, "\bar{p}"] \\ \overline{\boldsymbol{A}} \arrow[r, "\bar{\varphi}"] \arrow[ur, "\bar{h}"] & \overline{\boldsymbol{C}} \end{tikzcd} \tag{$\mathcal{D}$}$$

la condition (iii) s'exprime alors par l'inclusion :

$$\alpha_n\big((f_{r+1},\ldots,f_m)\big) \subseteq \big((\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{B})\cap\boldsymbol{K}\big)^n . \tag{$*$}$$

Nous allons démontrer l'existence de α_n par induction sur l'entier n.

Lorsque $n = 1$, la condition $(*)$ est automatiquement vérifiée par tout homomorphisme α_1 rendant les diagrammes $(\mathcal{D})$ commutatifs, il suffit donc de prouver son existence. Comme $\bar{\alpha}_1$ est alors uniquement déterminé par l'égalité $\bar{\alpha}_1 = \bar{h}\circ\bar{\nu}$, nous sommes encore réduits à prouver seulement l'existence d'un relèvement $\alpha_1(X_i) \in p^{-1}\big(\varphi(\nu(X_i))\big)$ de $\bar{\alpha}_1(X_i)$, pour chaque $i = 1,\ldots,m$. L'assertion résulte donc de prouver que, pour tout $c\in\boldsymbol{C}$, la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ de la fibre $p^{-1}(c)$ se surjecte sur la fibre $\bar{p}^{-1}(\bar{c})$. Soit $\bar{b}\in\bar{p}^{-1}(\bar{c})$. Pour chaque relèvement $b\in\boldsymbol{B}$ de $\bar{b}$, on a $c-p(b) = \sum_j x_j\cdot c_j$, avec $x_j\in\boldsymbol{I}$ et $c_j\in\boldsymbol{C}$. Comme p est surjective, il existe $b_j\in\boldsymbol{B}$ tel que $p(b_j) = c_j$ et alors $b' := b + \sum_j x_j\cdot b_j$ est bien un relèvement de $\bar{b}$ vérifiant $p(b') = c$.

Supposons avoir défini α_ℓ pour $\ell\geq 1$ et soit $\alpha_{\ell+1} : \boldsymbol{R}[X_1,\ldots,X_m]\to\boldsymbol{B}$ un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres donné par :

$$\alpha_{\ell+1}(X_j) = \alpha_\ell(X_j) + b_j\,, \quad \text{avec } b_j\in\big((\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{B})\cap\boldsymbol{K}\big)^\ell, \tag{$\star$}$$

pour $j = 1,\ldots,m$. Les conditions (i) et (ii) de l'assertion (a) pour $n = \ell+1$ sont alors clairement satisfaites et l'étude de la condition (iii) nous amène à considérer, pour chaque $k = r+1,\ldots,m$, le début d'un développement en série de puissances par rapport aux variables b_j :

$$\begin{aligned} \alpha_{\ell+1}(f_k) &= f_k\big(\alpha_\ell(\vec{X}) + \vec{b}\big) \\ &= \alpha_\ell(f_k) + \left[\frac{\partial f_k}{\partial X_1},\cdots,\frac{\partial f_k}{\partial X_m}\right]\big(\alpha_\ell(\vec{X})\big)\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} + \cdots, \end{aligned}$$

où $\vec{X}$ et $\vec{b}$ désignent respectivement les m-uplets $(X_1,\ldots,X_m)$ et $(b_1,\ldots,b_m)$, $\alpha_\ell(\vec{X})$ désigne $\big(\alpha_\ell(X_1),\ldots,\alpha_\ell(X_m)\big)$ et $\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\big(\alpha_\ell(\vec{X})\big)$ est l'élément de $\boldsymbol{B}$ obtenu à partir de $\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(X_1,\ldots,X_m)$ en remplaçant X_i par $\alpha_\ell(X_i)$; enfin, les points de suspension rassemblent des termes appartenant à l'idéal $\big((\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{B})\cap\boldsymbol{K}\big)^{2\ell}$. Le regroupement de ces développements pour $k = r+1,\ldots,m$, donne alors l'égalité de vecteurs de $\boldsymbol{B}^{m-r}$ modulo $\big((\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{B})\cap\boldsymbol{K}\big)^{2\ell}$:

$$\begin{bmatrix}\alpha_{\ell+1}(f_{r+1})\\ \vdots\\ \alpha_{\ell+1}(f_m)\end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix}\alpha_{\ell}(f_{r+1})\\ \vdots\\ \alpha_{\ell}(f_m)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_{r+1}}{\partial X_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_{r+1}}{\partial X_m}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial f_m}{\partial X_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial X_m}\end{bmatrix}\big(\alpha_\ell(\vec{X})\big)\begin{bmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix}. \qquad (\ddagger)$$

C'est maintenant que le fait que $\boldsymbol{A}$ est intersection complète lisse intervient de manière cruciale. En effet, dans ce cas nous savons d'après le lemme 1.1.2 (b) que les classes des différentielles $df_{r+1},\dots,df_m$ dans $\boldsymbol{A}\otimes\Omega_{\boldsymbol{R}[X_1,\dots,X_m]/\boldsymbol{R}}$ sont linéairement indépendantes et que le sous-$\boldsymbol{A}$-module qu'elles engendrent : $\boldsymbol{A}\cdot df_{r+1}\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{A}\cdot df_m \equiv \boldsymbol{A}^{m-r}$ est un facteur direct dans $\boldsymbol{A}\otimes\Omega_{\boldsymbol{R}[X_1,\dots,X_m]/\boldsymbol{R}}$ $\equiv \boldsymbol{A}^m$. Il existe alors une matrice $[\,a_{j,k}\,]\in M^{m\times(m-r)}(\boldsymbol{A})$ qui inverse à droite la matrice de $M^{(m-r)\times m}(\boldsymbol{A})$ définie par $[\,\partial f_k/\partial X_j\,](\vec{X})$. Pour chaque couple (j,k), soit $P_{j,k}$ un relèvement dans $\boldsymbol{R}[X_1,\dots,X_m]$ de $a_{j,k}$; on a alors l'égalité modulo l'idéal $(f_{r+1},\dots,f_m)$:

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_{r+1}}{\partial X_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_{r+1}}{\partial X_m}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial f_m}{\partial X_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial X_m}\end{bmatrix}(\vec{X})\begin{bmatrix}P_{1,r+1} & \cdots & P_{1,m}\\ \vdots & & \vdots\\ P_{m,r+1} & \cdots & P_{m,m}\end{bmatrix} \simeq \mathbb{1}_{m-r\times m-r}\,, \qquad (\ddagger\ddagger)$$

à laquelle on applique α_ℓ pour obtenir l'égalité modulo $\big((\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{B})\cap\boldsymbol{K}\big)^{\ell}$:

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_{r+1}}{\partial X_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_{r+1}}{\partial X_m}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial f_m}{\partial X_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial X_m}\end{bmatrix}\big(\alpha_\ell(\vec{X})\big)\begin{bmatrix}Q_{1,r+1} & \cdots & Q_{1,m}\\ \vdots & & \vdots\\ Q_{m,r+1} & \cdots & Q_{m,m}\end{bmatrix} \simeq \mathbb{1}_{m-r\times m-r}\,, \qquad (\diamond)$$

où l'on a noté $Q_{j,k} := \alpha_\ell(P_{j,k})\in\boldsymbol{B}$. On pose alors :

$$\begin{bmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix} := -\begin{bmatrix}Q_{1,r+1} & \cdots & Q_{1,m}\\ \vdots & & \vdots\\ Q_{m,r+1} & \cdots & Q_{m,m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_\ell(f_{r+1})\\ \vdots\\ \alpha_\ell(f_m)\end{bmatrix},$$

de sorte que les éléments b_j appartiennent bien à $\big((\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{B})\cap\boldsymbol{K}\big)^{\ell}$ conformément à notre choix initial $(\star)$. Il s'ensuit que l'on a, pour tout $k=r+1,\dots,m$:

$$\alpha_{\ell+1}(f_k)\in\big((\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{B})\cap\boldsymbol{K}\big)^{2\ell},$$

grâce aux égalités $(\ddagger)$ et $(\diamond)$, ce qui termine la démonstration de l'assertion (a) lorsque $\boldsymbol{A}$ est intersection complète lisse.

b) *I. Réduction au cas où l'idéal $\boldsymbol{K}$ est principal*

On commence par observer qu'un homomorphisme α_n de la question (a) induit un homomorphisme $h_n : \boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}$ lorsque $\alpha_n(f_k)=0$, pour tout $k=$

$r+1,\dots,m$. Lorsque c'est le cas, on peut prendre $\boldsymbol{B}_\varepsilon := \boldsymbol{B}$ et $h_\varepsilon := h_n$ et l'assertion (b) est vérifiée. Dans le cas contraire, on applique (a) pour $n=1$ et l'on considère l'idéal $\boldsymbol{K}' := (b_1,\dots,b_{m-r}) \subseteq \boldsymbol{K}$ de $\boldsymbol{B}$ engendré par les éléments $b_i := \alpha_1(f_{r+i})$. Pour chaque $\ell = 1,\dots,m-r$, notons $\boldsymbol{B}_\ell := \boldsymbol{B}/(b_1,\dots,b_\ell)$. On a la suite finie de surjections canoniques de $\boldsymbol{B}$-algèbres :

$$\boldsymbol{B} =: \boldsymbol{B}_0 \xrightarrow{\nu_{0,1}} \!\!\!\!\rightarrow \boldsymbol{B}_1 \xrightarrow{\nu_{1,2}} \!\!\!\!\rightarrow \boldsymbol{B}_2 \xrightarrow{\nu_{2,3}} \!\!\!\!\rightarrow \cdots\cdots\cdots \xrightarrow{\nu_{m-r-1,m-r}} \!\!\!\!\rightarrow \boldsymbol{B}_{m-r}\ ,$$

où $\boldsymbol{B}_\ell = \boldsymbol{B}_{\ell-1}/(b_\ell)$. Notons aussi, pour chaque ℓ :

- $\nu_\ell : \boldsymbol{B} \twoheadrightarrow \boldsymbol{B}_\ell$ la surjection canonique (on a $\nu_{\ell,\ell+1} \circ \nu_\ell = \nu_{\ell+1}$),
- $p_\ell : \boldsymbol{B}_\ell \twoheadrightarrow \boldsymbol{C}$ la surjection induite par p, de noyau $\boldsymbol{K}_\ell := \nu_\ell(\boldsymbol{K})$ (on a $p_\ell \circ \nu_\ell = p$),
- $\overline{h}_\ell : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}_\ell$ l'homomorphisme $\overline{\nu}_\ell \circ \overline{h}$.

On remarquera que pour chaque $\ell = 0,1,\dots,m-r$, la paire de morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\boldsymbol{A} \xrightarrow{\varphi} \boldsymbol{C} \overset{p_\ell}{\twoheadleftarrow} \boldsymbol{B}_\ell$ et le morphisme de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres $\overline{h}_\ell : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}_\ell$ sont des données conformes aux hypothèses du théorème.
Lorsque $\ell = m-r$, l'homomorphisme $\nu_{m-r} \circ \alpha_1$ s'annule sur $(f_{r+1},\dots,f_m)$ et induit, par conséquent, un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $h_{m-r,\varepsilon} : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}_{m-r} =: \boldsymbol{B}_{m-r,\varepsilon}$ vérifiant (b) par construction. Supposons maintenant que pour un certain "*niveau*" $\ell \in \{1,\dots,m-r\}$ l'assertion (b) est vérifiée ; autrement dit, supposons qu'il existe un voisinage étale $\varepsilon_\ell : \boldsymbol{B}_\ell \to \boldsymbol{B}_{\ell,\varepsilon}$ de $\boldsymbol{I}{\cdot}\boldsymbol{K}$ intersection complète sur $\boldsymbol{B}_\ell$ et un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $h_{\ell,\varepsilon} : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}_{\ell,\varepsilon}$ vérifiant $\overline{h}_{\ell,\varepsilon} = \overline{\varepsilon}_\ell \circ \overline{h}_\ell$, tels que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
& \boldsymbol{B}_{\ell-1,\varepsilon'} \arrow[d, two heads, "\nu'_{\ell-1,\ell}"'] & \boldsymbol{B}_{\ell-1} \arrow[l, "\varepsilon'_{\ell-1}"'] \arrow[d, two heads, "\nu_{\ell-1,\ell}"] \\
\boldsymbol{A} \arrow[rru, dotted, bend left=50, "\overline{h}_{\ell-1}"] \arrow[rr, dotted, bend left=40, "\overline{h}_\ell"] \arrow[r, "h_{\ell,\varepsilon}"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \boldsymbol{B}_{\ell,\varepsilon} \arrow[d, two heads, "p_{\ell,\varepsilon}"] & \boldsymbol{B}_\ell \arrow[l, "\varepsilon_\ell"'] \arrow[dl, two heads, "p_\ell"] \\
& \boldsymbol{C} &
\end{tikzcd}$$

où $\varepsilon'_{\ell-1} : \boldsymbol{B}_{\ell-1} \to \boldsymbol{B}_{\ell-1,\varepsilon'}$ est un voisinage étale de $\boldsymbol{I}{\cdot}\boldsymbol{K}$, intersection complète sur $\boldsymbol{B}_{\ell-1}$, qui relève ε_ℓ et où $\nu'_{\ell-1,\ell}$ est la surjection induite (2.1.1).

La paire de morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\boldsymbol{A} \xrightarrow{h_{\ell,\varepsilon}} \boldsymbol{B}_{\ell,\varepsilon} \overset{\nu'_{\ell-1,\ell}}{\twoheadleftarrow} \boldsymbol{B}_{\ell-1,\varepsilon'}$ et le morphisme de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres $\overline{\varepsilon}'_{\ell-1} \circ \overline{h}_{\ell-1} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}_{\ell-1,\varepsilon'}$ sont à nouveau conformes aux hypothèses du théorème, mais cette fois le noyau de $\nu'_{\ell-1,\ell}$ est l'idéal *principal* de $\boldsymbol{B}_{\ell-1,\varepsilon'}$ engendré par b_ℓ (2.1.1). Il s'ensuit que *si* (b) *est vérifiée pour toute $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{B}$ et tout idéal $\boldsymbol{K} \subseteq \boldsymbol{B}$ principal*, il existe un morphisme de $\boldsymbol{B}$-algèbres $\varepsilon''_{\ell-1} : \boldsymbol{B}_{\ell-1,\varepsilon'} \to \boldsymbol{B}_{\ell-1,\varepsilon}$, tel que $\boldsymbol{B}_{\ell-1,\varepsilon}$ est intersection complète sur $\boldsymbol{B}_{\ell-1,\varepsilon'}$ et voisinage étale de $\boldsymbol{I}{\cdot}b_\ell$, donc de $\boldsymbol{I}{\cdot}\boldsymbol{K}$, et un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $h_{\ell-1,\varepsilon} : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}_{\ell-1,\varepsilon}$, tels que le diagramme précédent se complète en un nouveau diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
& \boldsymbol{B}_{\ell-1,\varepsilon} \arrow[dr, "\nu''_{\ell-1,\ell}"] & \boldsymbol{B}_{\ell-1,\varepsilon'} \arrow[l, "\varepsilon''_{\ell-1}"'] \arrow[d, two heads, "\nu'_{\ell-1,\ell}"] & \boldsymbol{B}_{\ell-1} \arrow[l, "\varepsilon'_{\ell-1}"'] \arrow[d, two heads, "\nu_{\ell-1,\ell}"] \\
\boldsymbol{A} \arrow[ur, "h_{\ell-1,\varepsilon}"] \arrow[rr, "h_{\ell,\varepsilon}"] \arrow[drr, "\varphi"'] \arrow[urr, dotted, bend left=60, "\bar{\varepsilon}'_{\ell-1}\circ\bar{h}_{\ell-1}"] & & \boldsymbol{B}_{\ell,\varepsilon} \arrow[d, two heads, "p_{\ell,\varepsilon}"] & \boldsymbol{B}_{\ell} \arrow[l, "\varepsilon_{\ell}"'] \arrow[dl, "p_{\ell}"] \\
& & \boldsymbol{C} &
\end{tikzcd}$$

où $\nu''_{\ell-1,\ell}$ est induite par $\varepsilon''_{\ell-1}$ à partir de $\nu'_{\ell-1,\ell}$, et où $\bar{\varepsilon}''_{\ell-1}\circ\bar{\varepsilon}'_{\ell-1}\circ\bar{h}_{\ell-1} = \bar{h}_{\ell-1,\varepsilon}$. La composée $\varepsilon_{\ell-1} := \varepsilon''_{\ell-1}\circ\varepsilon'_{\ell-1} : \boldsymbol{B}_{\ell-1} \to \boldsymbol{B}_{\ell-1,\varepsilon}$ est alors un voisinage étale de $\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{K}$, intersection complète sur $\boldsymbol{B}_{\ell-1}$, et (b) est vérifiée au niveau $\ell-1$.

Un argument par induction montre alors que (b) est vérifiée pour $\ell = 0$.

II. Cas où l'idéal $\boldsymbol{K}$ est principal.

Nous vérifions dans cette partie l'assertion (b) lorsque $\boldsymbol{K}$ est un idéal principal de $\boldsymbol{B}$ de générateur noté $b_{\boldsymbol{K}}$.

– Cas où l'idéal $\boldsymbol{I} \subseteq \boldsymbol{R}$ est principal de générateur π.

Il existe, d'après (a), un morphisme $\alpha_2 : \boldsymbol{R}[X_1,\dots,X_m] \to \boldsymbol{B}$ de $\boldsymbol{R}$-algèbres tel que les diagrammes $(\mathcal{D})$ sont commutatifs et tel que l'on a, pour tout $k = r+1,\dots,m$:

$$\alpha_2(f_k) \in \big((\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{B}) \cap \boldsymbol{K}\big)^2 \subseteq (\pi\cdot b_{\boldsymbol{K}}),$$

autrement dit, $\alpha_2(f_k) = \pi\cdot b_{\boldsymbol{K}}\cdot S_k$ pour un certain $S_k \in \boldsymbol{B}$.

Nous procédons maintenant de manière analogue à la démonstration de (a) dont nous reprenons la notation vectorielle, en particulier $\vec{X} := (X_1,\dots,X_m)$. Pour chaque $k = r+1,\dots,m$, soit $\vec{P}_k := (P_{1,k},\dots,P_{m,k})$ le m-uplet d'éléments de $\boldsymbol{R}[X_1,\dots,X_m]$ de l'égalité (‡‡) de la preuve de (a). Posons $Q_{j,k} := \alpha_2(P_{j,k})$, $\vec{Q}_k := (Q_{1,k},\dots,Q_{m,k})$, et considérons le morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres :

$$\boldsymbol{R}[X_1,\dots,X_m] \xrightarrow{\ \beta\ } \boldsymbol{B}[Z_{r+1},\dots,Z_m]$$

déterminé par l'égalité $\beta(\vec{X}) = \alpha_2(\vec{X}) + \sum_{k=r+1}^{m} \pi\cdot b_{\boldsymbol{K}}\cdot\vec{Q}_k\, Z_k$.

On a le développement en série de puissances par rapport aux variables Z_k :

$$\begin{aligned}
\beta\big(f_k(\vec{X})\big) &= f_k\Big(\alpha_2(\vec{X}) + \textstyle\sum_{k=r+1}^{m} \pi\cdot b_{\boldsymbol{K}}\cdot\vec{Q}_k\, Z_k\Big) \\
&= \pi\cdot b_{\boldsymbol{K}}\cdot S_k + \pi\cdot b_{\boldsymbol{K}} \left[\frac{\partial f_k}{\partial X_1},\dots,\frac{\partial f_k}{\partial X_m}\right] \big(\alpha_2(\vec{X})\big) \begin{bmatrix} Q_{1,r+1} & \cdots & Q_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ Q_{m,r+1} & \cdots & Q_{m,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{r+1} \\ \vdots \\ Z_m \end{bmatrix} + \\
&\qquad + \pi^2\cdot b_{\boldsymbol{K}}^2 \cdots
\end{aligned}$$

et l'on introduit les éléments :

$$R_k := \frac{\beta\big(f_k(\vec{X})\big)}{\pi\cdot b_{\boldsymbol{K}}} \in \boldsymbol{B}[Z_{r+1},\dots,Z_m]$$

(on diminue d'une unité les exposants de $\pi\cdot b_{\boldsymbol{K}}$ dans les développements en série précédents). Nous avons ainsi l'égalité dans $\big(\boldsymbol{B}[Z_{r+1},\dots,Z_m]\big)^{m-r}$ modulo $\pi\cdot b_{\boldsymbol{K}}$:

$$\begin{bmatrix} R_{r+1} \\ \vdots \\ R_m \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} S_{r+1} \\ \vdots \\ S_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_{r+1}}{\partial X_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_{r+1}}{\partial X_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial X_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial X_m} \end{bmatrix} \big(\alpha_2(\vec{X})\big) \begin{bmatrix} Q_{1,r+1} & \cdots & Q_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ Q_{m,r+1} & \cdots & Q_{m,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{r+1} \\ \vdots \\ Z_m \end{bmatrix} \tag{$\diamond\diamond$}$$

et la composition de β avec la surjection canonique $\nu_{\boldsymbol{B}}$:

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{R}[X_1,\dots,X_m] \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\nu"'] & \boldsymbol{B}[Z_{r+1},\dots,Z_m] \arrow[r, two heads, "\nu_{\boldsymbol{B}}"] & \dfrac{\boldsymbol{B}[Z_{r+1},\dots,Z_m]}{(R_{r+1},\dots,R_m)} =: \boldsymbol{B}' \\ \boldsymbol{A} = \dfrac{\boldsymbol{R}[X_1,\dots,X_m]}{(f_{r+1},\dots,f_m)} \arrow[urr, "\gamma"'] & & \end{tikzcd}$$

s'annule, par construction, sur l'idéal $(f_{r+1},\dots,f_m)$ et induit un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres noté $\gamma : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}'$.

On remarque alors que le déterminant de la matrice jacobienne $[\partial R_k/\partial Z_j]$ modulo $\pi\cdot b_{\boldsymbol{K}}$ est égal à :

$$\det\left[\frac{\partial R_k}{\partial Z_j}\right] \simeq \det\left(\begin{bmatrix} \frac{\partial f_{r+1}}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial f_{r+1}}{\partial X_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial X_m} \end{bmatrix} \big(\alpha_2(\vec{X})\big) \begin{bmatrix} Q_{1,r+1} & \cdots & Q_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ Q_{m,r+1} & \cdots & Q_{m,m} \end{bmatrix}\right)$$

$$\simeq \alpha_2\left(\det\left(\begin{bmatrix} \frac{\partial f_{r+1}}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial f_{r+1}}{\partial X_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial X_m} \end{bmatrix} (\vec{X}) \begin{bmatrix} P_{1,r+1} & \cdots & P_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ P_{m,r+1} & \cdots & P_{m,m} \end{bmatrix}\right)\right) = 1$$

d'après l'égalité ($\ddagger\ddagger$) de la preuve de (a). La localisation $\boldsymbol{B}_\varepsilon := \boldsymbol{B}'_{\det[\partial R_k/\partial Z_j]}$ est, par conséquent, une $\boldsymbol{B}$-algèbre intersection complète étale.

Notons $h : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}_\varepsilon$ la composée de γ et du morphisme structural $\boldsymbol{B}' \to \boldsymbol{B}_\varepsilon$. La réduction modulo $\pi\cdot b_{\boldsymbol{K}}$ identifie $\boldsymbol{B}'$ et $\boldsymbol{B}_\varepsilon$. Notons $\widetilde{\boldsymbol{B}} := \boldsymbol{B}/(\pi\cdot b_{\boldsymbol{K}})$. La $\widetilde{\boldsymbol{B}}$-algèbre $\widetilde{\boldsymbol{B}} \otimes_{\boldsymbol{B}} \boldsymbol{B}'$ apparaît alors, d'après ($\diamond\diamond$), comme le quotient :

$$\frac{\widetilde{\boldsymbol{B}}[Z_{r+1},\dots,Z_m]}{(Z_{r+1}+\widetilde{S}_{r+1},\dots,Z_m+\widetilde{S}_m)},$$

qui est clairement isomorphe à $\widetilde{\boldsymbol{B}}$. Par conséquent, $\boldsymbol{B}_\varepsilon$ est bien un voisinage étale de $(\pi\cdot b_{\boldsymbol{K}})$ dans $\boldsymbol{B}$, et la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ de h s'identifie à $\overline{h}$.

L'assertion (b) est ainsi vérifiée à chaque fois que $\boldsymbol{A}$ est intersection complète lisse et que $\boldsymbol{I}$ est principal, et ceci, quel que soit l'idéal $\boldsymbol{K} \subseteq \boldsymbol{B}$ d'après la partie (I) de cette preuve.

– *Cas où l'idéal $\boldsymbol{I} \subseteq \boldsymbol{R}$ est quelconque*

Nous montrons que le cas général se ramène au cas où $\boldsymbol{I}$ est principal essentiellement de la même manière que dans la partie (I).

Soit $\alpha_2 : \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_m] \to \boldsymbol{B}$ un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres tel que les diagrammes $(\mathcal{D})$ sont commutatifs et tel que, pour chaque $k = r+1, \ldots, m$, on ait $\alpha_2(f_k) \in \boldsymbol{I}\cdot b_{\boldsymbol{K}}\cdot\boldsymbol{B}$, *i.e.* $\alpha_2(f_k) = \sum_i \pi_{k,i}\cdot b_{\boldsymbol{K}}\cdot b_{k,i}$, avec $\pi_{k,i} \in \boldsymbol{I}$ et $b_{k,i} \in \boldsymbol{B}$. L'ensemble de ces égalités fait apparaître l'ensemble fini $\{\pi_{k,i}\} = \{\pi_1, \ldots, \pi_t\}$ d'éléments de $\boldsymbol{I}$ dont on note $\boldsymbol{I}' = (\pi_1, \ldots, \pi_t)$ l'idéal dans $\boldsymbol{R}$ qu'il engendre. Notons pour $\ell \in \{1, \ldots, t\}$: $\boldsymbol{R}_\ell$, $\boldsymbol{A}_\ell$, $\boldsymbol{B}_\ell$, $\boldsymbol{C}_\ell$, φ_ℓ, p_ℓ, les réductions modulo l'idéal $(\pi_1, \ldots, \pi_\ell)$ des objets correspondants ; on appellera le nombre ℓ le "*degré de réduction*". L'idéal $\boldsymbol{I}'$ rend compte de l'obstruction au relèvement de $\overline{h}$ vérifiant (b) avec $\boldsymbol{B}_\varepsilon = \boldsymbol{B}$, en particulier (b) est vérifiée avec $\boldsymbol{B}_\varepsilon = \boldsymbol{B}$ au degré de réduction t. Notons h_t un tel relèvement ; on a les diagrammes analogues à $(\mathcal{D})$:

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{R} & & \boldsymbol{B} \arrow[d, "p"] \\
\boldsymbol{A} \arrow[rr, "\varphi"] & & \boldsymbol{C}
\end{tikzcd}
\qquad\Bigg|\qquad
\begin{tikzcd}
\boldsymbol{R}_t & & \boldsymbol{B}_t \arrow[d, "p_t"] \\
\boldsymbol{A}_t \arrow[rr, "\varphi_t"] \arrow[urr, "h_t"] & & \boldsymbol{C}_t
\end{tikzcd}
\qquad (\mathcal{D}_t)$$

où celui de droite correspond à la réduction modulo l'idéal $(\pi_1, \ldots, \pi_t) \subseteq \boldsymbol{R}$.

L'assertion (b) peut être vérifiée maintenant par récurrence sur le nombre t ; le cas $t = 0$ est trivial et le cas $t = 1$ a déjà été traité. Dans le cas général, l'assertion (b) est vérifiée par hypothèse inductive pour les données $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{C}_1$, etc ; il existe donc une intersection complète lisse $\varepsilon_1 : \boldsymbol{B}_1 \to \boldsymbol{B}_{1,\varepsilon}$, voisinage étale de $\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{K}$, et un morphisme de $\boldsymbol{R}_1$-algèbres $h_{1,\varepsilon} : \boldsymbol{A}_1 \to \boldsymbol{B}_{1,\varepsilon}$ tel que $\bar{\varepsilon}_1 \circ \overline{h} = \overline{h}_{1,\varepsilon}$, et tels que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & \boldsymbol{B}_{\varepsilon'} \arrow[d, "\nu_1'"'] & \boldsymbol{B} \arrow[l, "\varepsilon'"'] \arrow[d, "\nu_1"] \\
\boldsymbol{A}_1 \arrow[r, "h_{1,\varepsilon}"] \arrow[dr, "\varphi_1"'] \arrow[rr, bend left=40, dotted, "\overline{h}"] & \boldsymbol{B}_{1,\varepsilon} \arrow[d, "p_{1,\varepsilon}"] & \boldsymbol{B}_1 \arrow[l, "\varepsilon_1"'] \arrow[dl, "p_1"] \\
 & \boldsymbol{C}_1 &
\end{tikzcd}$$

où ν_1 est la surjection canonique, $\varepsilon' : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}_{\varepsilon'}$ est un voisinage étale de $\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{K}$ intersection complète qui relève ε_1, et ν_1' est la surjection induite par ε' à partir de ν_1 (2.1.1). En particulier, $\boldsymbol{B}_{1,\varepsilon'}$ s'identifie à la réduction modulo π_1 de $\boldsymbol{B}_{\varepsilon'}$. Notons $p_{\varepsilon'} : \boldsymbol{B}_{\varepsilon'} \twoheadrightarrow \boldsymbol{C}$ la surjection induite par ε' à partir de p ; on a $p = p_{\varepsilon'} \circ \varepsilon'$ et p_1 s'identifie à la réduction modulo π_1 de $p_{\varepsilon'}$. On a ainsi les données suivantes :

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{R} & & \boldsymbol{B}_{\varepsilon'} \arrow[d, two heads, "p_{\varepsilon'}"] \\
& \boldsymbol{A} \arrow[r, "\varphi"] & \boldsymbol{C}
\end{tikzcd}
\qquad\Bigg|\qquad
\begin{tikzcd}
\boldsymbol{R}_1 & & \boldsymbol{B}_{1,\varepsilon} \arrow[d, two heads, "p_1"] \\
& \boldsymbol{A}_1 \arrow[ur, "h_{1,\varepsilon}"] \arrow[r, "\varphi_1"'] & \boldsymbol{C}_1
\end{tikzcd}$$

et comme le passage de $\boldsymbol{R}$ à $\boldsymbol{R}_1$ se fait par réduction modulo l'idéal principal (π_1), l'assertion (b) est vérifiée pour ces données. On a donc une $\boldsymbol{B}_{\varepsilon'}$-algèbre intersection complète lisse $\varepsilon'' : \boldsymbol{B}_{\varepsilon'} \to \boldsymbol{B}_{\varepsilon}$, voisinage étale de $\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{K}$, et un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $h_\varepsilon : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}_\varepsilon$ tel que $p_{\varepsilon'} \circ h_\varepsilon = \varphi$ et tel que, par réduction modulo π_1, h_ε coïncide avec $h_{1,\varepsilon} \circ \varepsilon''$. Enfin, la composée $\varepsilon := \varepsilon'' \circ \varepsilon' : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}_\varepsilon$ fait de $\boldsymbol{B}_\varepsilon$ une $\boldsymbol{B}$-algèbre intersection complète voisinage étale de $\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{K}$ et l'assertion (b) est vérifiée pour les données d'origine : $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, φ, p, $\overline{h}$.
Le théorème est donc prouvé lorsque $\boldsymbol{A}$ est intersection complète lisse sur $\boldsymbol{R}$.

• *Cas où $\boldsymbol{A}$ est lisse mais pas nécessairement intersection complète*
Par la proposition 1.1.6-(b), il existe un $\boldsymbol{A}$-module projectif $\boldsymbol{N}$ tel que l'algèbre symétrique $\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{N})$ est une intersection complète lisse sur $\boldsymbol{R}$. Notons $\imath : \boldsymbol{A} \hookrightarrow \mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{N})$ le morphisme structural et $\pi : \mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{N}) \twoheadrightarrow \boldsymbol{A}$ le morphisme de $\boldsymbol{A}$-algèbres nul sur $\boldsymbol{N}$. Tout morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\phi : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}'$ se factorise alors canoniquement en :

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{A} \arrow[r, hook, "\imath"] \arrow[rr, bend right, "\phi"'] & \mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{N}) \arrow[r, "(\phi\circ\pi)"] & \boldsymbol{A}'
\end{tikzcd}$$

En particulier, on a pour les données φ, p et $\overline{h}$ du théorème, les factorisations :

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{A} \arrow[r, hook, "\imath"] \arrow[drr, "\varphi"'] & \mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{N}) \arrow[dr, "(\varphi\circ\pi)"] & \boldsymbol{B} \arrow[d, two heads, "p"] \\
& & \boldsymbol{C}
\end{tikzcd}
\quad + \quad
\begin{tikzcd}
\overline{\boldsymbol{A}} \arrow[r, hook, "\bar\imath"] \arrow[drr, "\bar\varphi"'] & \mathsf{S}^*_{\overline{\boldsymbol{A}}}(\overline{\boldsymbol{N}}) \arrow[r, "(\bar h\circ\bar\pi)"] \arrow[dr, "\overline{(\varphi\circ\pi)}"] & \overline{\boldsymbol{B}} \arrow[d, two heads, "\bar p"] \\
& & \overline{\boldsymbol{C}}
\end{tikzcd}$$

où $\bar p \circ (\bar h \circ \bar\pi) = \overline{(\varphi \circ \pi)}$. Les énoncés (a) et (b) pour $\boldsymbol{A}$ résultent alors immédiatement des mêmes énoncés pour $\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{N})$. □

2.1.3. Corollaire. *Étant donnés un morphisme de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres $\overline{h} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}$ et des relèvements $p_{\boldsymbol{A}} : \boldsymbol{A} \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{A}}$ et $p_{\boldsymbol{B}} : \boldsymbol{B} \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{B}}$, où $\boldsymbol{A}$ est lisse, il existe une $\boldsymbol{B}$-algèbre $\boldsymbol{B}_\varepsilon$, intersection complète et voisinage étale de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{B}$, et un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $h : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}_\varepsilon$ qui relève $\overline{h}$. Soit, en termes de diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{A} \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[d, two heads, "p_{\boldsymbol{A}}"'] & \boldsymbol{B}_\varepsilon \arrow[dr, two heads, "p_{\boldsymbol{B}_\varepsilon}"'] & \boldsymbol{B} \arrow[l, "\varepsilon"'] \arrow[d, two heads, "p_{\boldsymbol{B}}"] \\
\overline{\boldsymbol{A}} \arrow[rr, "\overline{h}"] & & \overline{\boldsymbol{B}}
\end{tikzcd}$$

où $\varepsilon : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}_\varepsilon$ désigne l'homomorphisme structural et où $p_{\boldsymbol{B}_\varepsilon}$ est l'homomorphisme induit par ε à partir de $p_{\boldsymbol{B}}$.

Démonstration. Cas particulier du théorème 2.1.2 avec $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{B}$. □

2.2. Homotopies des relèvements à source lisse de morphismes homotopes

Dans cette partie, qui est un complément naturel au théorème 2.1.3, nous allons étudier le lien qui relie deux relèvements d'un même homomorphisme modulo $\boldsymbol{I}$. Nous montrerons que deux tels relèvements sont toujours "*homotopes au voisinage étale de $\boldsymbol{I}$ près*".

2.2.1. Définition. Soit $\boldsymbol{I}$ un idéal dans $\boldsymbol{R}$. Deux morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $u_0, u_1 : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ seront dits "*homotopes au voisinage étale de $\boldsymbol{I}$ près*" lorsqu'il existe :

- un voisinage étale $\boldsymbol{B}[T]_\varepsilon$ de $\boldsymbol{I}$, de (T) et de $(1-T)$ dans $\boldsymbol{B}[T]$ dont on note $\varepsilon : \boldsymbol{B}[T] \to \boldsymbol{B}[T]_\varepsilon$ l'homomorphisme structural et $p_{0,\varepsilon}, p_{1,\varepsilon} : \boldsymbol{B}[T]_\varepsilon \to \boldsymbol{B}$ les morphismes de $\boldsymbol{B}[T]$-algèbres induits par ε à partir de p_0 et p_1 respectivement.
- un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $h : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}[T]_\varepsilon$ vérifiant $p_{i,\varepsilon} \circ h = u_i$.

En d'autres termes, on a un diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & \boldsymbol{B}[T]_\varepsilon \arrow[dr, shift left, two heads, "p_{0,\varepsilon}"] \arrow[dr, shift right, two heads, "p_{1,\varepsilon}"'] & \boldsymbol{B}[T] \arrow[l, "\varepsilon"'] \arrow[d, shift right, two heads, "p_0"'] \arrow[d, shift left, two heads, "p_1"] & T \arrow[d, mapsto, "p_0"'] & T \arrow[d, mapsto, "p_1"] \\
\boldsymbol{A} \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[rr, shift left, "u_0"] \arrow[rr, shift right, "u_1"'] & & \boldsymbol{B} & 0 & 1
\end{tikzcd}$$

Lorsque, en plus, $\boldsymbol{B}[T]_\varepsilon$ est intersection complète sur $\boldsymbol{B}[T]$, on dira que u_0 et u_1 sont "*homotopes au voisinage étale de $\boldsymbol{I}$ intersection complète près*".

Dans le cas où l'homomorphisme ε est un isomorphisme, ce qui se produit par exemple lorsque $\boldsymbol{B} \in \mathrm{Alg}(\overline{\boldsymbol{R}})$, on parlera simplement d'"*homotopie*". Plus généralement : deux morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $u_0, u_1 : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ sont dits "*homotopes*" lorsqu'il existe un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $h : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}[T]$ tel que $p_i \circ h = u_i$, où $p_i : \boldsymbol{B}[T] \to \boldsymbol{B}$ est la surjection de $\boldsymbol{B}$-algèbres qui fait correspondre $p_i : T \mapsto i$. En d'autres termes, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & \boldsymbol{B}[T] \arrow[d, shift right, two heads, "p_0"'] \arrow[d, shift left, two heads, "p_1"] & T \arrow[d, mapsto, "p_0"'] & T \arrow[d, mapsto, "p_1"] \\
\boldsymbol{A} \arrow[ur, "h"] \arrow[r, shift left, "u_0"] \arrow[r, shift right, "u_1"'] & \boldsymbol{B} & 0 & 1
\end{tikzcd}$$

2.2.2. Théorème. *Soit $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse. Deux morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $u_0, u_1 : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$, dont les réductions modulo $\boldsymbol{I}$ sont homotopes (par exemple égales), sont homotopes au voisinage étale de $\boldsymbol{I}$ intersection complète près.*

Démonstration. Considérons les morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $p : \boldsymbol{B}[T] \to \boldsymbol{B} \oplus \boldsymbol{B}$ et $\varphi : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B} \oplus \boldsymbol{B}$ définis respectivement par $p(P(T)) := (P(0), P(1))$ et $\varphi(a) := (u_0(a), u_1(a))$. L'homomorphisme p est *surjectif* de noyau $\boldsymbol{K} = (T(1-T))$ et l'on a $\overline{p} \circ \overline{h} = \overline{\varphi}$ pour toute homotopie $\overline{h} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}[T]$ entre $\overline{u}_0$ et $\overline{u}_1$. Le théorème apparaît alors comme cas particulier du théorème 2.1.2 appliqué à $\boldsymbol{A} \xrightarrow{\varphi} \boldsymbol{B} \oplus \boldsymbol{B} \xleftarrow{p} \boldsymbol{B}[T]$ et à $\overline{h} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}[T]$. □

3. Relèvements et complétion $\boldsymbol{I}$-adique

Dans cette dernière section, l'anneau $\boldsymbol{R}$ est supposé **nœthérien**.

3.1. Complétion $\boldsymbol{I}$-adique

On munit $\boldsymbol{R}$ de la topologie $\boldsymbol{I}$-adique et l'on note $\widehat{\boldsymbol{R}}$ le complété séparé $\boldsymbol{I}$-adique de $\boldsymbol{R}$. Une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$ est considérée munie de la topologie $\boldsymbol{I}$-adique et $\widehat{\boldsymbol{A}}$ désigne le complété séparé de $\boldsymbol{A}$ pour cette topologie. Notons, pour chaque $m \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{A}_m := \boldsymbol{A}/\boldsymbol{I}^m{\cdot}\boldsymbol{A}$. L'algèbre $\widehat{\boldsymbol{A}}$ est isomorphe à la limite du système projectif défini par les surjections canoniques $\nu_{m+1}(\boldsymbol{A}) : \boldsymbol{A}_{m+1} \twoheadrightarrow \boldsymbol{A}_m$. On a $\overline{\boldsymbol{A}} := \boldsymbol{A}/(\boldsymbol{I}{\cdot}\boldsymbol{A}) \equiv \boldsymbol{A}_m/(\boldsymbol{I}{\cdot}\boldsymbol{A}_m) \equiv \widehat{\boldsymbol{A}}/(\boldsymbol{I}{\cdot}\widehat{\boldsymbol{A}})$. Pour tout morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\alpha : \boldsymbol{A}_1 \to \boldsymbol{A}_2$, on note $\widehat{\alpha} : \widehat{\boldsymbol{A}}_1 \to \widehat{\boldsymbol{A}}_2$ le morphisme induit.

Les correspondances $\boldsymbol{A} \rightsquigarrow \widehat{\boldsymbol{A}}$ et $\alpha \rightsquigarrow \widehat{\alpha}$ définissent un foncteur de "*complétion*" de $\mathrm{Alg}(\boldsymbol{R})$ vers la sous-catégorie pleine $\mathrm{Alg}_{\mathrm{cs}}(\boldsymbol{R})$ des $\boldsymbol{R}$-algèbres $\boldsymbol{I}$-adiquement complètes et séparées.

3.2. Complétion $\boldsymbol{I}$-adique faible

Pour toute $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$, Monsky et Washnitzer définissent dans [MW] l'algèbre $\boldsymbol{A}^\dagger$ des éléments $z \in \widehat{\boldsymbol{A}}$ admettant une représentation comme somme infinie :

$$z = \sum\nolimits_{j \geq 0} p_j(x_1, \ldots, x_n) \qquad (*)$$

(l'entier n et les éléments $x_1, \ldots, x_n$ sont fixes et indépendants de j, ils dépendent uniquement de z) dans laquelle :

$$\begin{cases} \bullet \; x_1, \ldots, x_n \in \boldsymbol{A}\,; \\ \bullet \; p_j \in \boldsymbol{I}^j{\cdot}\boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_n], \text{ pour tout } j \in \mathbb{N}\,; \\ \bullet \; \text{l'ensemble } \{\frac{\deg p_j}{j+1}\}_{j \in \mathbb{N}} \text{ est borné.} \end{cases}$$

3.2.1. Définition ([MW]). Une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$ est dite "*faiblement complète*" lorsque l'application canonique $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}^\dagger$ est bijective. Une $\boldsymbol{R}$-algèbre faiblement complète $\boldsymbol{A}$ est dite de "*type fini*" lorsqu'il existe un sous-ensemble fini $S \subseteq \boldsymbol{A}$ tel que $\boldsymbol{A}$ est l'unique sous-algèbre faiblement complète de $\boldsymbol{A}$ qui contient $\boldsymbol{S}$.

On notera $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R})$ (resp. $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R})$) la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Alg}(\boldsymbol{R})$ dont les objets sont les algèbres faiblement complètes (resp. de type fini).

3.2.2. Théorème ([MW]). *Pour toute $\boldsymbol{R}$-algèbre (de type fini) $\boldsymbol{A}$, l'algèbre $\boldsymbol{A}^\dagger$ est faiblement complète (de type fini).*

3.2.3. Théorème ([MW]). *Pour toute $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$ et tout entier positif m, l'application canonique $\boldsymbol{A}/(\boldsymbol{I}^m{\cdot}\boldsymbol{A}) \to \boldsymbol{A}^\dagger/(\boldsymbol{I}^m{\cdot}\boldsymbol{A}^\dagger)$ est un isomorphisme.*

3.2.4. Théorème ([MW]). *Pour tout morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\alpha : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$, il existe un et un unique morphisme $\alpha^\dagger : \boldsymbol{A}^\dagger \to \boldsymbol{B}^\dagger$ compatible à α. Le morphisme $\alpha^\dagger$ est la restriction de $\widehat{\alpha} : \widehat{\boldsymbol{A}} \to \widehat{\boldsymbol{B}}$.*

Les correspondances $\boldsymbol{A} \rightsquigarrow \boldsymbol{A}^\dagger$ et $\alpha \rightsquigarrow \alpha^\dagger$ déterminent donc un foncteur de "*complétion faible*" qui factorise le foncteur de réduction modulo $\boldsymbol{I}$ (et même $\boldsymbol{I}^m$, pour tout m), et qui factorise également le foncteur de complétion.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Alg}(\boldsymbol{R}) \arrow[r, rightsquigarrow, "(\dagger)"] \arrow[dr, rightsquigarrow, "(\overline{\ })"'] & \mathrm{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R}) \arrow[r, rightsquigarrow, "(\widehat{\ })"] \arrow[d, rightsquigarrow, "(\overline{\ })"] & \mathrm{Alg}_{\mathrm{cs}}(\boldsymbol{R}) \arrow[dl, rightsquigarrow, "(\overline{\ })"] \\
& \mathrm{Alg}(\overline{\boldsymbol{R}}) &
\end{tikzcd}$$

Les problèmes de relèvements que nous avons étudiés dans les sections précédentes se posent maintenant pour la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ de $\mathrm{Alg}_{\mathrm{cs}}(\boldsymbol{R})$ (resp. de $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R})$) vers $\mathrm{Alg}(\overline{\boldsymbol{R}})$.

Rappelons que pour toute $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre lisse $\overline{\boldsymbol{A}}$, la catégorie $\mathrm{Alg}_{\mathrm{cs}}(\boldsymbol{R})$ contient les relèvements formels $\boldsymbol{A}^\infty$ de [SGA$_1$] (cf. rem. 1.4.2). Lorsque en plus $\boldsymbol{A}$ est une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse qui relève $\overline{\boldsymbol{A}}$, sa complétion $\widehat{\boldsymbol{A}}$ (resp. $\boldsymbol{A}^\dagger$) appartient à $\mathrm{Alg}_{\mathrm{cs}}(\boldsymbol{R})$ (resp. $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R})$) et relève également $\overline{\boldsymbol{A}}$ (3.2.3). Tous ces relèvements sont $\boldsymbol{I}$-formellement lisses.

3.2.5. Proposition. *L'anneau $\boldsymbol{R}$ étant nœthérien, soit : $\varphi : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ un morphisme* **plat** *(par exemple lisse) de $\boldsymbol{R}$-algèbres dont la réduction $\overline{\varphi} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}$ est un isomorphisme. Alors :*

a) *Le morphisme $\widehat{\varphi} : \widehat{\boldsymbol{A}} \to \widehat{\boldsymbol{B}}$ est bijectif.*

b) *Si $\boldsymbol{B}^\dagger$ est faiblement complète de type fini, $\varphi^\dagger : \boldsymbol{A}^\dagger \to \boldsymbol{B}^\dagger$ est bijectif.*

Démonstration. Les applications induites par φ :

$$\frac{\boldsymbol{I}^m\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{I}^{m+1}\boldsymbol{A}} \xrightarrow[\equiv]{(\varphi)} \frac{\boldsymbol{I}^m\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{I}^{m+1}\boldsymbol{B}}$$

sont des isomorphismes pour tout m puisque l'on a :

$$\frac{\boldsymbol{I}^m\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{I}^{m+1}\boldsymbol{A}} \equiv \frac{\boldsymbol{I}^m\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{I}^{m+1}\boldsymbol{A}} \otimes_{\overline{\boldsymbol{A}}} \overline{\boldsymbol{B}} \equiv \frac{\boldsymbol{I}^m\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{I}^{m+1}\boldsymbol{A}} \otimes_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{B} \equiv \frac{\boldsymbol{I}^m\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{I}^{m+1}\boldsymbol{B}}$$

grâce à la platitude de $\boldsymbol{B}$ sur $\boldsymbol{A}$. On en déduit, par un argument inductif sur m, que les applications :

$$\varphi_m : \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{I}^m\boldsymbol{A}} \xrightarrow[\equiv]{} \frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{I}^m\boldsymbol{B}}$$

sont bijectives pour tout m et (a) est démontrée.

Dans (b), l'injectivité de $\varphi^\dagger$ résulte de celle de $\widehat{\varphi}$ (3.2.4) et sa surjectivité est conséquence du théorème 3.1 de [MW] qui affirme que sur une algèbre faiblement complète de type fini, un système de générateurs modulo $\boldsymbol{I}$ est générateur. $\square$

3.3. Relèvements très lisses

La propriété d'algèbres suivante a été introduite par Monsky et Washnitzer dans [MW]. Notons $\mathrm{Alg}_*(\boldsymbol{R})$ l'une des catégories $\mathrm{Alg}_{\mathrm{cs}}(\boldsymbol{R})$, $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R})$, $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R})$.

3.3.1. Définition. Une algèbre $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Alg}_*(\boldsymbol{R})$ est dite "*très lisse dans* $\mathrm{Alg}_*(\boldsymbol{R})$" lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- L'algèbre $\overline{\boldsymbol{A}}$ est lisse sur $\overline{\boldsymbol{R}}$.
- Pour toute paire de morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\boldsymbol{B} \xrightarrow{p} \boldsymbol{C} \xleftarrow{\varphi} \boldsymbol{A}$, où $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in \mathrm{Alg}_*(\boldsymbol{R})$ et p est surjectif (de noyau arbitraire), et pour chaque morphisme de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres $\bar{h} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}$ vérifiant $\overline{\varphi} = \overline{p} \circ \bar{h}$, il existe un relèvement $h : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ de $\bar{h}$, tel que $\varphi = p \circ h$.

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{A} \arrow[dr, "\varphi"'] & \boldsymbol{B} \arrow[d, two heads, "p"] \\ & \boldsymbol{C} \end{tikzcd} \quad + \quad \begin{tikzcd} \overline{\boldsymbol{A}} \arrow[r, "\bar{h}"] \arrow[dr, "\bar{\varphi}"'] & \overline{\boldsymbol{B}} \arrow[d, two heads, "\bar{p}"] \\ & \overline{\boldsymbol{C}} \end{tikzcd} \quad \Longrightarrow \quad \begin{tikzcd} \boldsymbol{A} \arrow[r, dashed, "\exists h"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \boldsymbol{B} \arrow[d, two heads, "p"] \\ & \boldsymbol{C} \end{tikzcd}$$

Le théorème 2.1.2-(b) affirme que toute $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse vérifie l'analogue algébrique (modulo des voisinages étales) de la propriété ci-dessus. Ce théorème permet de répondre à la question de Monsky et Washnitzer qui demandaient dans [MW] si une $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre lisse admettait des relèvements très lisses dans $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R})$.

3.3.2. Théorème. *Soit* $\boldsymbol{R}$ *un anneau nœthérien.*

a) *Toute algèbre dans* $\mathrm{Alg}_{\mathrm{cs}}(\boldsymbol{R})$ *qui est* $\boldsymbol{I}$*-formellement lisse est très lisse dans* $\mathrm{Alg}_{\mathrm{cs}}(\boldsymbol{R})$. *Une* $\overline{\boldsymbol{R}}$*-algèbre lisse admet des relèvements très lisses dans* $\mathrm{Alg}_{\mathrm{cs}}(\boldsymbol{R})$. *Deux relèvements très lisses dans* $\mathrm{Alg}_{\mathrm{cs}}(\boldsymbol{R})$ *d'une même* $\overline{\boldsymbol{R}}$*-algèbre lisse sont isomorphes.*

b) *Soit $\overline{\boldsymbol{A}}$ une $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre lisse. Pour tout relèvement $\boldsymbol{A}$ de $\overline{\boldsymbol{A}}$, lisse sur $\boldsymbol{R}$, l'algèbre $\boldsymbol{A}^\dagger$ est un relèvement très lisse de $\overline{\boldsymbol{A}}$ dans $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R})$. Pour tout autre relèvement $\boldsymbol{A}'$ de $\overline{\boldsymbol{A}}$, lisse sur $\boldsymbol{R}$, les algèbres $\boldsymbol{A}^\dagger$ et $\boldsymbol{A}'^\dagger$ sont isomorphes.*

Démonstration.

a) Soit $\boldsymbol{A}$ un relèvement $\boldsymbol{R}$-lisse de $\overline{\boldsymbol{A}}$. Par complétion du théorème 2.1.2-(b) appliqué à $\boldsymbol{A}$ et à $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in \mathrm{Alg}_{\mathrm{cs}}(\boldsymbol{R})$, l'algèbre $\widehat{\boldsymbol{A}}$ est très lisse moyennant le fait que la complétion du voisinage étale $\varepsilon : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}_\varepsilon$ est un isomorphisme (3.2.5). Deux tels relèvements sont isomorphes puisque $\boldsymbol{I}$-formellement lisses complets et séparés (1.4.2).

b) En raisonnant comme dans (a), on montre par complétion faible de 2.1.2-(b) que $\boldsymbol{A}^\dagger$ est très lisse dans $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R})$ (donc dans $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R})$). Le reste de l'assertion est le th. 3.3 de [MW]. □

Nous énonçons, pour terminer, les analogues des théorèmes 2.1.3 et 2.2.2 pour les relèvements très lisses (les démonstrations en sont identiques). On note $\mathrm{Alg}_*(\boldsymbol{R})$ l'une des catégories $\mathrm{Alg}_{\mathrm{cs}}(\boldsymbol{R})$, $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R})$.

3.3.3. Définition. Soit $\boldsymbol{B} \in \mathrm{Alg}_*(\boldsymbol{R})$. Notons $\boldsymbol{B}\langle T\rangle$ la complétion de l'algèbre des polynômes $\boldsymbol{B}[T]$ dans la catégorie $\mathrm{Alg}_*(\boldsymbol{R})$ et soient $p_0, p_1 : \boldsymbol{B}\langle T\rangle \to \boldsymbol{B}$ les morphismes de $\boldsymbol{B}$-algèbres déterminés respectivement par les égalités $p_0(T) = 0$ et $p_1(T) = 1$. Soit $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Alg}_*(\boldsymbol{R})$ et $u_0, u_1 : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ deux morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres. On appelle "*homotopie de u vers v dans* $\mathrm{Alg}_*(\boldsymbol{R})$" la donnée d'un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $h : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}\langle T\rangle$ tel que $u = p_0 \circ h$ et $v = p_1 \circ h$.

3.3.4. Théorème. *Soit $\boldsymbol{R}$ un anneau nœthérien et soient $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathrm{Alg}_*(\boldsymbol{R})$, où $\boldsymbol{A}$ est très lisse. Alors :*

a) *Tout morphisme $\overline{u} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}$ admet un relèvement $u : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$.*

b) *Pour toute paire de morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $u_0, u_1 : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$, dont les réductions modulo $\boldsymbol{I}$, $\overline{u}_0, \overline{u}_1 : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}$, sont homotopes, les morphismes u_0 et u_1 sont homotopes dans $\mathrm{Alg}_*(\boldsymbol{R})$.*

3.4. La cohomologie de Monsky–Washnitzer

Dans cette partie le couple $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{I})$ est constitué d'un anneau de valuation discrète de caractéristique nulle $\boldsymbol{R}$ et de son idéal maximal $\boldsymbol{I} := (\pi)$. On note $k := \boldsymbol{R}/\boldsymbol{I}$ le corps résiduel et $\boldsymbol{K}$ le corps de fractions de $\widehat{\boldsymbol{R}}$.

En 1968, dans l'article [MW], Monsky et Washnitzer posent les fondements pour une théorie cohomologique à la de Rham à coefficients dans le corps $\boldsymbol{K}$ pour les schémas lisses sur k. L'une des premières difficultés que rencontre la théorie est celle du relèvement **plat** sur $\boldsymbol{R}$ d'une algèbre lisse sur k. Inspirés par les travaux de Grothendieck de [G] (1959), les auteurs sont emmenés à considérer les relèvements formels $\boldsymbol{A}^\infty$ d'une k-algèbre lisse $\overline{\boldsymbol{A}}$ donnée. Ce sont des $\boldsymbol{R}$-algèbres complètes et séparées qui relèvent $\overline{\boldsymbol{A}}$ et qui sont deux à deux isomorphes (1.4.2).

Lorsque $\boldsymbol{A}$ est un relèvement lisse sur $\boldsymbol{R}$ de $\overline{\boldsymbol{A}}$, le complété séparé $\widehat{\boldsymbol{A}} := \varprojlim_m \boldsymbol{A}/(\pi^m)$ est π-formellement lisse et l'on a $\boldsymbol{A}^\infty \simeq \widehat{\boldsymbol{A}}$. Monsky et Washnitzer considèrent alors la sous-algèbre $\boldsymbol{A}^\dagger \subseteq \widehat{\boldsymbol{A}}$ (3.1), posent :

$$\widehat{\Omega}(\boldsymbol{A}^\dagger;\boldsymbol{K}) := \frac{\Omega_{\boldsymbol{A}^\dagger/\widehat{\boldsymbol{R}}}}{\overline{0}} \otimes_{\widehat{\boldsymbol{R}}} \boldsymbol{K}$$

où $\overline{0}$ désigne l'adhérence de 0 pour la topologie π-adique, et introduisent le "complexe de de Rham" :

$$\widehat{\Omega}^*(\boldsymbol{A}^\dagger;\boldsymbol{K}) := \textstyle\bigwedge_{\boldsymbol{K}}^* \widehat{\Omega}(\boldsymbol{A}^\dagger;\boldsymbol{K}) \tag{$*$}$$

de différentielle induite par celle du complexe de de Rham $\Omega^*(\widehat{\boldsymbol{A}};\widehat{\boldsymbol{R}})$ et dont l'homologie est le candidat proposé par les auteurs pour la "*cohomologie* (*de de Rham*) $\boldsymbol{I}$*-adique de* $\overline{\boldsymbol{A}}$".

Mais pour que cette définition ait un sens intrinsèque par rapport à la donnée de $\overline{\boldsymbol{A}}$, on est amené à vérifier que les morphismes entre deux $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres lisses $\overline{\boldsymbol{A}}$ et $\overline{\boldsymbol{B}}$ se relèvent en des morphismes entre $\boldsymbol{A}^\dagger$ et $\boldsymbol{B}^\dagger$ et que deux tels relèvements définissent *un même* morphisme entre les homologies des complexes $(*)$ associés. Monsky et Washnitzer avaient remarqué que ces propriétés découlaient de "*l'existence des relèvements très lisses dans la catégorie* $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R})$" (cf. 3.3.4). C'est un point que l'article [MW] n'avait pas réglé en dehors du cas, pour l'essentiel, où $\overline{\boldsymbol{A}}$ est une k-algèbre intersection complète lisse, ce qui suffisait pour les applications que les auteurs avaient en vue.

Dans l'article [E], paru en 1973 et qui concerne les algèbres sur un couple $(\boldsymbol{R},\boldsymbol{I})$ nœthérien hensélien, Elkik prouve qu'il existe des relèvements lisses sur $\boldsymbol{R}$ pour toute $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre lisse, mais n'aborde pas le problème des relèvements des morphismes (et de leurs homotopies) dont l'existence sera établie ultérieurement à l'aide du théorème d'approximation d'Artin ([A, B]) (cf. [vdP]). En effet, bien que pour tout morphisme de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres $\overline{h} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}$ et tous relèvements $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$, lisses sur $\boldsymbol{R}$, de $\overline{\boldsymbol{A}}$ et $\overline{\boldsymbol{B}}$ respectivement, la restriction d'un relèvement *formel* $h^\infty : \widehat{\boldsymbol{A}} \to \widehat{\boldsymbol{B}}$ à la sous-algèbre $\boldsymbol{A}^\dagger$ ne soit pas nécessairement à valeurs dans $\boldsymbol{B}^\dagger$, le théorème d'Artin affirme qu'il existe une approximation $h^\dagger : \boldsymbol{A}^\dagger \to \boldsymbol{B}^\dagger$ de h^∞ modulo $\boldsymbol{I}$. Dans cette approche, qui est l'approche habituelle aujourd'hui, les propriétés des relèvements très lisses dans $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R})$ sont établies par approximation des *relèvements formels*. Une des motivations de ce travail a été de supprimer à la fois ce type de relèvement et l'utilisation du théorème d'Artin.

Rappelons pour terminer que même si l'on sait que le relèvement $\boldsymbol{A}^\dagger$ est très lisse, pour qu'une correspondance de la forme :

$$\overline{\boldsymbol{A}} \rightsquigarrow H^*_{\mathrm{DR}}(\overline{\boldsymbol{A}};\boldsymbol{K}) := h^*\Big(0 \to \widehat{\Omega}^0(\boldsymbol{A}^\dagger;\boldsymbol{K}) \to \widehat{\Omega}^1(\boldsymbol{A}^\dagger;\boldsymbol{K}) \to \cdots \to\Big) \tag{$\diamond$}$$

constitue un foncteur défini sur la catégorie des k-algèbres lisses, il est encore nécessaire de prouver que deux morphismes homotopes entre deux algèbres très lisses dans la catégorie $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R})$ induisent un même et unique morphisme entre les homologies des complexes ($\diamond$) associés. C'est ce qu'affirme le théorème d'homotopie de Monsky–Washnitzer (th. 5.5 [MW]) sous l'hypothèse que le couple $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{I})$ est un anneau de valuation discrète de caractéristique nulle.

Références

[A] M. Artin, On the solutions of analytique equations, *Invent. Math.* **5** (1968), 277–291.

[B] S. Bosch, A rigid analytic version of M. Artin's theorem on analytic equations, *Math. Ann.* **255** (1981), n$^{\mathrm{ro}}$ 3, 395–404.

[BLR] S. Bosch, W. Lütkebohmert and M. Raynaud, *Néron Models*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **3**. Folge-Band **21**, 1980.

[E] R. Elkik, Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien, *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, quatrième série, tome 6 (1973), 553–604.

[EGA_4] A. Grothendieck, *Éléments de géométrie algébrique-IV*, Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. Première partie. Publications mathématiques de l'I.H.E.S. **20**, 1964.

[G] A. Grothendieck, Géométrie formelle et géométrie algébrique, Sém. Bourbaki, exposé **182** (Mai 1959).

[M] Z. Mebkhout, Sur le théorème de finitude de la cohomologie p-adique d'une variété affine non singulière, *Amer. J. Math.* **119** (1997), no. 5, 1027–1081.

[MW] P. Monsky and G. Washnitzer, Formal cohomology : I, *Ann. of Math.* (2) **88** (1968), 181–217.

[S] J.-P. Serre, Exemples de variétés projectives en caractéristique p non relevables en caractéristique zéro, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **47** (1961), 108–109.

[SGA_1] *Revêtements Étales et Groupe Fondamental (SGA 1)*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1960/61. Lecture Notes in Mathematics **224**, Springer-Verlag, 1971.

[vdP] M. van der Put, The cohomology of Monsky and Washnitzer, *Société Mathématique de France*, Deuxième série, Mémoire n$^{\mathrm{ro}}$ **23** (1986), 33–60.

Alberto Arabia
Institut de Mathématiques de Jussieu (UMR 7586)
CNRS & UFR de Mathématiques de l'Université Paris 7
Laboratoire de Théorie des Groupes Représentations et Applications
175 rue du Chevaleret
bureau 9D11
F–75013 Paris
France
e-mail : arabia@math.jussieu.fr

(Received: April 19, 2000)