

# Surfaces de la classe VII0 admettant un champ de vecteurs, II

Autor(en): **Dloussky, Georges / Oeljeklaus, Karl / Toma, Matei**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **76 (2001)**

PDF erstellt am: **26.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-57408>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Surfaces de la classe $VII_0$ admettant un champ de vecteurs, II

Georges Dloussky, Karl Oeljeklaus et Matei Toma

*Dédié à Alan T. Huckleberry, à l'occasion de son soixantième anniversaire*

**Résumé.** On termine la classification des surfaces holomorphes compactes pour lesquelles existe un champ de vecteurs holomorphe global non trivial. On démontre, sous cette hypothèse, que toute surface  $S$  de la classe  $VII_0$  avec  $b_2(S) > 0$  contient une coquille sphérique globale. C'est exactement le cas où cette classification était incomplète. Cet article est la suite de [3].

**Mathematics Subject Classification (2000).** 32J15, 32M25, 32Q57.

**Keywords.** Compact complex surface, class  $VII_0$ , holomorphic vector field, global spherical shell.

Une *surface* est une variété complexe compacte  $S$  de dimension 2. On note  $b_i(S)$  le  $i$ -ième nombre de Betti de  $S$ .

### 0. Introduction et rappels

La classe  $VII_0$  de Kodaira, qui est formée des surfaces complexes compactes minimales  $S$  à  $b_1(S) = 1$ , est complètement comprise seulement dans le cas  $b_2(S) = 0$ . Introduisons la notation  $VII_0^+$  pour désigner la sous-classe des surfaces  $S$  à  $b_2(S) > 0$ . Une surface de la classe  $VII_0^+$  ne contient qu'un nombre fini de courbes compactes, [9]. Les seuls exemples connus dans la classe  $VII_0^+$  sont ceux admettant une coquille sphérique globale (CSG). Les surfaces à CSG sont maintenant bien comprises. Nous renvoyons le lecteur à [2] et à [4] pour la définition et leurs propriétés. Rappelons ici seulement qu'une surface  $S$  de la classe  $VII_0^+$  avec CSG contient exactement  $b_2(S)$  courbes rationnelles. D'après [10] nous appellerons une surface  $S$  de la classe  $VII_0^+$  *spéciale* si elle contient  $b_2(S)$  courbes rationnelles.

Le but de cet article est d'achever la classification des surfaces complexes compactes admettant un champ de vecteurs holomorphe non trivial ou, ce qui est équivalent, une action holomorphe presque effective du groupe de Lie complexe  $(\mathbb{C}, +)$ . Cette classification était incomplète précisément dans le cas de la classe  $VII_0^+$ .

On a montré dans [3] que, si  $S$  est une surface de la classe VII<sub>0</sub><sup>+</sup> munie d'un champ de vecteurs holomorphe non trivial, alors  $S$  est une surface spéciale. Il restait le problème de savoir si, sous ces hypothèses,  $S$  contient une CSG. C'est ce problème que nous résolvons dans cet article.

**Théorème 0.1.** *Soit  $S$  une surface complexe compacte minimale munie d'un champ de vecteurs holomorphe non trivial, pour laquelle les nombres de Betti satisfont les conditions  $b_1(S) = 1$  et  $n = b_2(S) > 0$ . Alors  $S$  contient une coquille sphérique globale.*

**Remarque 0.2.** *Le champ induit une action presque effective de  $(\mathbb{C}, +)$ . Comme le nombre de courbes compactes sur  $S$  est fini, il n'y a pas d'action de tore. Seuls les deux cas suivants se produisent :*

- 1) *Le champ induit une action effective de  $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ . Alors  $S$  est une surface d'Inoue parabolique [6], et donc à CSG.*
- 2) *L'action de  $(\mathbb{C}, +)$  est effective. On a montré dans [2] que de telles surfaces à CSG existent.*

Rappelons que pour une surface spéciale  $S$ , on a  $H^1(S, \mathbb{C}^*) \simeq \mathbb{C}^*$ , [10], p. 481, ce qui permet de noter par  $L^\lambda$  le fibré plat correspondant à  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ . On désigne par  $M(S)$  la matrice d'intersection des  $b_2(S)$  courbes rationnelles. On sait que

$$k(S) := 1 + \sqrt{|\det M(S)|}$$

est un entier. Lorsque  $S$  contient une CSG et  $b_2(S) > 0$ , cet entier est égal, d'après [4], à l'entier  $k(S)$  défini dans [2].

On note  $kod(S)$  la dimension de Kodaira d'une surface  $S$ . D'après notre résultat, [2] et [5], la classification des surfaces complexes compactes avec champs de vecteurs holomorphes est terminée :

**Théorème 0.3.** *Une surface compacte complexe minimale admet un champ de vecteurs holomorphe non trivial si, et seulement si elle appartient à la liste suivante :*

- I) *Surfaces vérifiant  $kod(S) \geq 0$  :*
  - a) *Tores complexes.*
  - b) *Fibrés principaux de Seifert au dessus d'une surface de Riemann à fibre une courbe elliptique.*
- II) *Surfaces kähleriennes vérifiant  $kod(S) = -\infty$  :*
  - a) *Fibrés holomorphes à fibre  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  et à groupe structural  $\mathbb{C}^*$  au-dessus d'une surface de Riemann de genre  $g \geq 1$ ,  $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$  et surfaces de Hirzebruch  $\Sigma_n, n = 0, 2, 3, \dots$*
  - b) *Fibrés holomorphes à fibre  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  avec groupe structural connexe résoluble au-dessus d'une surface de Riemann de genre  $g \geq 1$ , tel que le fibré en droites associé ait une section holomorphe non triviale.*

III) Surfaces non kähleriennes vérifiant  $\text{kod}(S) = -\infty$  :

a) Surfaces de Hopf presque homogènes.

b) Surfaces d'Inoue de type  $S_{N,p,q,r;t}^{(+)}$ .

c) Surfaces  $S$  de la classe  $\text{VII}_0^+$  admettant une CSG et dont le fibré anticanonique est de la forme

$$K^{-1} = \mathcal{O}(D_{-K}) \otimes L^{k(S)},$$

où  $D_{-K}$  est le diviseur numériquement anticanonique. Ici  $k(S) = 1$  si et seulement si  $S$  est une surface d'Inoue parabolique.

Notons  $\theta$  un champ de vecteurs holomorphe non-trivial sur une surface  $S$  de la classe  $\text{VII}_0^+$ . Comme dans [3], on supposera dans la suite, grâce à [6], que l'action du groupe  $(\mathbb{C}, +)$  induite par  $\theta$  est effective. On note  $D_\theta$  le diviseur des zéros de  $\theta$ , et  $D$  le diviseur réduit maximal de  $S$ . On a montré dans [3], que  $D$  consiste en exactement  $b_2(S)$  courbes rationnelles, c'est-à-dire que  $S$  est spéciale.

Voici le contenu de l'article : l'idée directrice est de reconstituer à partir du feuilletage réduit  $\mathcal{F}$  associé au champ de vecteurs  $\theta$  et du diviseur maximal  $D$  de  $S$  un certain germe d'application contractante  $(\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  qui permet, grâce aux résultats de Ch. Favre [4], de retrouver la CSG.

- Dans le §1 on démontre que le feuilletage  $\mathcal{F}$  est également défini par une 1-forme méromorphe logarithmique

$$\omega \in H^0(S, \Omega^1(\text{Log}D) \otimes L^k),$$

avec pôles le long du diviseur  $D$  et tordue par un fibré plat  $L^k$ , où  $k = k(S) > 1$ , comme dans le cas des surfaces à CSG, [2].

- Dans le §2, on montre qu'il existe un voisinage ouvert  $V \cup D$  du diviseur maximal  $D$ , invariant par le feuilletage  $\mathcal{F}$ , avec  $V = V \setminus D$  tel que le revêtement universel de  $V$  est isomorphe à  $\mathbb{H}_g \times \mathbb{C}$  et  $\pi_1(V) \simeq \mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$ . Ici  $\mathbb{H}_g = \{w \in \mathbb{C} \mid \Re(w) < 0\}$ .
- Dans le §3, on calcule une forme normale des générateurs  $g_\gamma$ ,  $g$  d'un groupe  $G \simeq \mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$  agissant proprement discontinûment sur  $\mathbb{H}_g \times \mathbb{C}$ . On obtient

$$g_\gamma(w, z) = (w + 2\pi i, z)$$

$$g(w, z) = (kw, z + f_g(w))$$

où  $f_g(w) = H(e^{-w})$  et

$$H(\zeta) = A_0 + \sum_{m>0, k \nmid m} A_m \zeta^m$$

est un polynôme.

- Ceci permet de reconstituer dans le §5 un germe d'application contractante et de voir que  $V$  peut-être compactifié par des courbes rationnelles de façon à obtenir une surface avec CSG, ce qui donne le résultat. En même temps, nous voyons que l'ouvert  $V$  était en fait égal à  $S \setminus D$ .

**Remerciements.** Nous remercions vivement Alexander Borichev (CNRS, Université de Bordeaux I). Nous lui devons la démonstration du fait que la fonction  $H$  doit être un polynôme dans le cas d'une action proprement discontinue. La démonstration de la partie directe de la Proposition 3.2 lui est due. Nous tenons aussi à remercier le rapporteur, dont les remarques et les suggestions ont beaucoup amélioré la forme de cet article.

## 1. Forme logarithmique tordue et coefficient de torsion

Soit  $S$  une surface *spéciale* au sens de Nakamura, c'est-à-dire que  $S$  est minimale,  $b_1(S) = 1$ ,  $n := b_2(S) > 0$  et il existe exactement  $n$  courbes rationnelles. D'après [10], la surface  $S$  est diffeomorphe à une surface contenant une CSG, en particulier son groupe fondamental  $\pi_1(S)$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ . En utilisant le fait que  $H^1(S, \mathbb{C}) \simeq H^1(S, \mathcal{O}) \simeq \mathbb{C}$ , on voit aussitôt que les fibrés holomorphes en droites topologiquement triviaux sont exactement les fibrés en droites plats. Ces fibrés sont à leur tour canoniquement paramétrés par  $\mathbb{C}^*$  : un homomorphisme  $\rho$  de  $\pi_1(S) \simeq \mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{C}^*$  est uniquement déterminé par la valeur  $\lambda := \rho(1)$ . Nous notons par  $L^\lambda$  le fibré correspondant.

À l'exception des surfaces d'Inoue–Hirzebruch et d'Inoue paraboliques, le diviseur maximal réduit  $D$  d'une surface spéciale consiste en un cycle de courbes rationnelles auquel se rattache un système non vide d'arbres de courbes rationnelles (voir [10]). De plus, le morphisme  $\pi_1(D) \rightarrow \pi_1(S)$  est bijectif ([9]). Cela implique que dans le revêtement universel  $\tilde{S}$  de  $S$ , l'image réciproque du cycle est une chaîne infinie de courbes rationnelles.

Dorénavant  $S$  désignera une surface spéciale admettant un champ de vecteurs global non trivial  $\theta$  qui induit une action *effective* de  $(\mathbb{C}, +)$ . On montrera ici que le feuilletage  $\mathcal{F}$  induit par  $\theta$  est également défini par une 1-forme méromorphe logarithmique tordue par le fibré plat  $L^{k(S)}$ . On note  $D_\theta$  le diviseur d'annulation de  $\theta$ . D'après [3], il existe un diviseur numériquement anticanonique  $D_{-K}$ , et un fibré plat  $L^\kappa$ ,  $\kappa \in \mathbb{C}^*$  tels que

$$D_{-K} = D_\theta + D, \quad (*)$$

$$K^{-1} \otimes L^\kappa = D_{-K}. \quad (**)$$

**Lemme 1.1.** *Il existe une 1-forme méromorphe logarithmique fermée tordue*

$$\omega \in H^0(S, \Omega^1(\log D) \otimes (L^\kappa)^{-1})$$

*qui a ses pôles le long de  $D$ .*

*Démonstration.* Soit  $Z$  l'espace analytique des singularités du feuilletage holomorphe  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{J}_Z$  le faisceau d'ideaux associé. D'après [3],  $Z$  est l'espace des points d'intersections des courbes rationnelles de  $S$ . On notera aussi par  $\Theta_S$  le faisceau des germes de champs de vecteurs holomorphes. Le champ de vecteurs  $\theta$  induit,

d'après (\*) et (\*\*) une suite exacte courte de  $\mathcal{O}_S$ -modules

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(D_\theta) \rightarrow \Theta_S \rightarrow \mathcal{J}_Z \otimes (L^\kappa)^{-1} \otimes \mathcal{O}(D) \rightarrow 0.$$

En dualisant on obtient la suite exacte courte

$$0 \rightarrow L^\kappa \otimes \mathcal{O}(-D) \rightarrow \Omega_S^1 \rightarrow \mathcal{J}_Z \otimes \mathcal{O}(-D_\theta) \rightarrow 0,$$

et donc une section

$$\omega \in \Gamma(S, \Omega^1 \otimes (L^\kappa)^{-1} \otimes \mathcal{O}(D)),$$

qui vérifie  $\omega(\theta) \equiv 0$ . Autour d'un point lisse de  $D$  on choisit des coordonnées locales  $(z_1, z_2)$  telles que  $D = \{z_2 = 0\}$ . On sait que les courbes sont invariantes pour  $\mathcal{F}$  et donc  $\theta$  est tangent à  $D$  (voir [3]). On a alors

$$\theta = a(z_1, z_2) z_2^m \frac{\partial}{\partial z_1}$$

et

$$\omega = b(z_1, z_2) \frac{dz_2}{z_2},$$

avec  $a(0, 0) \neq 0$ ,  $b(0, 0) \neq 0$  et  $m \in \mathbb{N}$ , puisque le morphisme  $L^\kappa \otimes \mathcal{O}(-D) \rightarrow \Omega_S^1$  ne s'annule qu'en codimension 2.

Par conséquent, la forme  $\omega$  a des pôles logarithmiques le long de  $D$  et, en outre, elle est fermée puisque

$$d\omega \in \Gamma(S, \Omega^2 \otimes (L^\kappa)^{-1} \otimes \mathcal{O}(D)) = \Gamma(S, \mathcal{O}(-D_\theta)) = 0.$$

□

Notons  $g$  le générateur de  $\pi_1(S) = \mathbb{Z}$  qui agit sur  $\tilde{S}$  de façon que  $g^*\omega = \kappa^{-1}\omega$ .

**Lemme 1.2.**  $\kappa \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  ou  $\frac{1}{\kappa} \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ .

*Démonstration.* Le relevé de  $\omega$  sur le revêtement universel  $\tilde{S}$  de  $S$  est une 1-forme méromorphe à pôles logarithmiques le long de l'image réciproque  $\tilde{D}$  de  $D$ . Notons encore cette forme  $\omega$ . Soient  $D_0, \dots, D_{m-1}$  les courbes rationnelles du cycle de  $S$  et  $C_0, \dots, C_{m-1}$  une chaîne connexe de courbes dans  $\tilde{D}$  recouvrant  $D_{0_j}, \dots, D_{m-1}$ . On pose  $C_m := g(C_0)$ . Soit  $U$  un voisinage pseudoconvexe de  $D$  et  $\tilde{U}$  son image réciproque dans  $\tilde{S}$ . Pour un petit lacet  $\gamma_0$  dans  $\tilde{U} \setminus \tilde{D}$  autour de  $C_0$  on a

$$\int_{g \circ \gamma_0} \omega = \int_{\gamma_0} g^*\omega = \kappa^{-1} \int_{\gamma_0} \omega.$$

Soit  $\gamma_1$  un lacet autour de  $C_1$ . Nous allons comparer les intégrales  $\int_{\gamma_0} \omega$  et  $\int_{\gamma_1} \omega$ . Dans un voisinage de  $p := C_0 \cap C_1$  on prend des coordonnées locales  $(x, y)$  telles que  $C_0 = \{x = 0\}$  et  $C_1 = \{y = 0\}$ . On a vu dans [3] qu'en  $p$ ,  $\theta$  a la forme

$$\theta = f(x, y) x^a y^b \bar{\theta}$$

avec  $f(0, 0) \neq 0$ , où

$$\bar{\theta} = (\mu x + x f_1) \frac{\partial}{\partial x} - (\nu y + y f_2) \frac{\partial}{\partial y},$$

$\mu, \nu \in \mathbb{N}^*$  et  $f_1(0, 0) = f_2(0, 0) = 0$ , car les courbes sont toutes invariantes. Cette forme est d'ailleurs valable pour toute intersection de courbes de  $D$ .

Le premier jet de  $\bar{\theta}$  s'écrit

$$J_1(\bar{\theta}) = \mu x \frac{\partial}{\partial x} - \nu y \frac{\partial}{\partial y}.$$

Si on pose  $\omega = g_1 \frac{dx}{x} + g_2 \frac{dy}{y}$ , la condition

$$0 = \langle \omega, \bar{\theta} \rangle = \frac{g_1}{x} (\mu x + x f_1) - \frac{g_2}{y} (\nu y + y f_2)$$

entraîne  $g_1(\mu + f_1) = g_2(\nu + f_2)$ .

Maintenant nous avons

$$\int_{\gamma_0} \omega = 2\pi i \operatorname{Res}(\omega)|_{y=c_1} = 2\pi i g_1(0, c_1)$$

pour un  $c_1 \neq 0$  fixé. Puisque  $\omega$  est fermée, cette intégrale est indépendante de  $c_1$ . De plus,  $g_1(0, c_1) \neq 0$ , car  $\omega$  a des pôles logarithmiques le long de  $\tilde{D}$ . Par conséquent  $\int_{\gamma_0} \omega = 2\pi i g_1(0, 0) \neq 0$  et de façon analogue  $\int_{\gamma_1} \omega = 2\pi i g_2(0, 0) \neq 0$ .

Le rapport de ces deux intégrales est

$$\frac{\int_{\gamma_1} \omega}{\int_{\gamma_0} \omega} = \frac{g_2(0, 0)}{g_1(0, 0)} = \frac{\mu}{\nu} = -\operatorname{CS}(\mathcal{F}, C_1, C_0 \cap C_1)$$

et donc

$$\kappa^{-1} = \frac{\int_{g \circ \gamma_0} \omega}{\int_{\gamma_0} \omega} = \prod_{i=1}^m \frac{\int_{\gamma_i} \omega}{\int_{\gamma_{i-1}} \omega} = \prod_{i=1}^m (-\operatorname{CS}(\mathcal{F}, C_i, C_{i-1} \cap C_i)),$$

où les  $\gamma_i$  sont de petits lacets dans  $\tilde{U} \setminus \tilde{D}$  autour de  $C_i$ . On a noté  $\operatorname{CS}(\mathcal{F}, C, p)$  l'indice de Camacho–Sad du feuilletage  $\mathcal{F}$  le long de la courbe  $C$  au point  $p$ , voir [1].

En particulier  $\kappa \in \mathbb{Q}_+^*$ . On se propose maintenant de montrer que le nombre  $\kappa$  ne dépend que du graphe dual de  $D$ , c'est-à-dire de la matrice d'intersection de  $D$ .

Soit  $B_{i_1}, \dots, B_{i_{m_i}}$  l'arbre de courbes rationnelles dont la racine est  $C_i$ ,  $b_{ij} :=$

$-B_{ij}^2$  et

$$\begin{aligned}
 b_i &:= -\text{CS}(\mathcal{F}, C_i, C_i \cap B_{i1}) &= \frac{1}{-\text{CS}(\mathcal{F}, B_{i1}, C_i \cap B_{i1})} \\
 &= \frac{1}{b_{i1} - (-\text{CS}(\mathcal{F}, B_{i1}, B_{i1} \cap B_{i2}))} &= \frac{1}{b_{i1} - \frac{1}{-\text{CS}(\mathcal{F}, B_{i2}, B_{i1} \cap B_{i2})}} \\
 &= \dots \\
 &= \frac{1}{b_{i1} - \frac{1}{b_{i2} - \frac{1}{b_{i3} - \dots - \frac{1}{b_{im_i}}}}}
 \end{aligned}$$

On pose  $b_i = 0$ , s'il n'y a pas d'arbre sur  $C_i$ . Alors on a  $0 \leq b_i < 1$ , pour tout  $i$ . Soient

$$d_i := -C_i^2 - b_i > 1$$

et

$$\alpha_i := -\text{CS}(\mathcal{F}, C_i, C_{i-1} \cap C_i), \quad i = 1, \dots, m.$$

La formule de Camacho–Sad ([1]) entraîne

$$\alpha_i + \frac{1}{\alpha_{i+1}} = d_i, \quad \text{pour } 1 \leq i \leq m - 1 \tag{1}$$

et

$$\alpha_m + \frac{1}{\alpha_1} = d_m. \tag{2}$$

On démontrera dans l'annexe que les équations (1) et (2) entraînent que

$$\kappa^{-1} = \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_m$$

ne dépend que des  $d_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Plus précisément on verra que  $\kappa$  est unique à inversion près. Le lecteur pourrait aussi consulter le fameux article [7] de F. Hirzebruch qui traite le cas où tous les  $b_i$  sont nuls par une méthode différente.

D'après [10], il existe une surface  $S'$  avec *coquille sphérique globale* dont le diviseur maximal admet le même graphe dual que le diviseur maximal de  $S$ .

L'unique feuilletage holomorphe singulier de  $S'$  est induit par une forme logarithmique tordue  $\omega' \in H^0(S', \Omega^1(\text{Log } D') \otimes L^k)$  avec  $k = k(S') = k(S) \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  (voir [2]). Puisque  $\kappa$  et  $k$  se calculent à partir du graphe dual par la même équation à inversion près, d'après l'annexe, on aura  $\kappa = k$  ou  $\kappa = \frac{1}{k}$ .  $\square$

**Remarque 1.3.** *On peut choisir le générateur  $g$  de  $\pi_1(S)$  tel que  $\kappa < 1$ , ce que nous faisons par la suite et alors  $\kappa^{-1} = k(S) = k$ .*

En résumé, nous avons obtenu dans cette section la



**Proposition 1.4.** *Il existe une 1-forme méromorphe logarithmique fermée tordue*

$$\omega \in H^0(S, \Omega^1(\log D) \otimes L^{k(S)}),$$

*$k(S) \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ , qui a ses pôles le long de  $D$  et qui définit le feuilletage  $\mathcal{F}$ .*

## 2. Revêtement universel du complémentaire des courbes

Soit  $U$  un petit voisinage ouvert de  $D$ , tel que  $D$  soit une rétraction par déformation de  $U$ . On a

$$\pi_1(U) = \pi_1(D) = \pi_1(S) = \mathbb{Z}.$$

Il existe un domaine fondamental  $U_0$  pour l'action de  $\mathbb{Z}$  dans l'image réciproque  $\tilde{U}$  de  $U$  dans  $\tilde{S}$ , tel que le bord de  $U_0$  dans  $\tilde{U}$  coupe  $\tilde{D}$  sur une composante  $C_0$  et sur sa translattée  $g(C_0)$  le long d'un cercle  $S^1$ . Soit  $Y_0 := \bigcup_{\nu \geq 0} g^\nu(U_0)$ .

**Lemme 2.1.** *Il existe une normalisation de  $\omega$  de façon que la représentation*

$$\rho : \pi_1(\tilde{S} \setminus \tilde{D}) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\gamma \mapsto \int_\gamma \omega$$

*ait comme image  $2\pi i \mathbb{Z}[\frac{1}{k}] \subset \mathbb{C}$ . En plus, on peut choisir cette normalisation telle que  $\rho(\pi_1(Y_0 \setminus \tilde{D})) = 2\pi i \mathbb{Z}$ .*

*Démonstration.* Puisque  $\tilde{S}$  est simplement connexe, le groupe  $\pi_1(\tilde{S} \setminus \tilde{D})$  est engendré par les petits lacets autour des composantes irréductibles de  $\tilde{D}$ . D'après les résultats de la section précédente (démonstration du lemme 1.2) et en utilisant les mêmes notations, on voit que  $\rho(\pi_1(\tilde{S} \setminus \tilde{D}))$  est un  $\mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$ -module engendré par  $2\pi i a_0 = \int_{\gamma_0} \omega, \dots, 2\pi i a_{n-1} = \int_{\gamma_{n-1}} \omega$ , où  $\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}$  désignent les petits lacets autour des courbes  $C_0, \dots, C_{n-1}$  dans  $U_0$ .

Maintenant on peut normaliser la forme  $\omega$  de sorte que les nombres  $a_0, \dots, a_{n-1}$  soient des entiers positifs à p.g.c.d. égal à 1 ; donc le groupe  $\rho(\pi_1(\tilde{S} \setminus \tilde{D}))$  est libre de rang 1 comme  $\mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$ -module.

De manière similaire le groupe  $\rho(\pi_1(Y_0 \setminus \tilde{D}))$  sera engendré comme  $\mathbb{Z}$ -module par les petits lacets autour des courbes irréductibles de  $\tilde{D}$  qui rencontrent  $U_0$ .  $\square$

Nous supposerons dans la suite que  $\omega$  est normalisée comme dans le lemme 2.1.

Soit  $A$  un domaine fondamental pour l'action de  $\mathbb{Z}$  sur  $\tilde{S}$  et  $X_0 := \bigcup_{j \geq 0} g^j(A)$ .

En translattant par  $g$ , on peut supposer que  $\tilde{D} \cap X_0 \subset Y_0$ . Remarquons qu'après une telle translation, on a

$$\rho(\pi_1((Y_0 \cup X_0) \setminus \tilde{D})) = \rho(\pi_1(Y_0 \setminus \tilde{D})) = 2\pi i \mathbb{Z}.$$

Fixons  $z_0 \in U_0$ . Nous définissons une fonction holomorphe  $f$  sur  $(Y_0 \cup X_0) \setminus \tilde{D}$  par

$$f(z) = \exp\left(\int_{z_0}^z \omega + \frac{1}{k-1} \int_{z_0}^{g(z_0)} \omega\right).$$

On vérifie aisément que  $f$  est bien définie et que

$$f(g(z)) = f^k(z) \tag{†}$$

pour  $z \in (Y_0 \cup X_0) \setminus \tilde{D}$ .

Soit  $C$  la partie lisse dans  $\tilde{D}$  d'une composante irréductible de  $\tilde{D} \cap Y_0$ . Comme  $\omega$  est une forme logarithmique fermée, quitte à remplacer  $\omega$  par  $-\omega$ , un calcul local autour de  $C$  montre que  $f$  se prolonge en tant que fonction continue et donc aussi holomorphiquement en prenant la valeur 0 sur  $C$ . Nous prolongeons maintenant  $f$  sur l'ensemble  $\tilde{D} \cap Y_0$ , en utilisant à nouveau que les rapports des résidus de  $\omega$  sur les composantes de  $\tilde{D}$  sont des rationnels positifs.

Le noyau  $\text{Ker} \rho$  définit un revêtement  $\pi : X' := \widetilde{S \setminus D} / \text{Ker} \rho \rightarrow \tilde{S} \setminus \tilde{D}$ . On vérifie aussitôt que l'action de  $g$  sur  $\pi_1(\tilde{S} \setminus \tilde{D})$  stabilise  $\text{Ker} \rho$  et induit donc une action de  $\mathbb{Z}$  sur  $X'$ . Notons encore par  $g$  un relèvement de  $g$  sur  $X'$ . Soit  $\omega' = \pi^* \omega$  et  $\phi : X' \rightarrow \mathbb{C}$  une primitive de  $\omega'$  sur  $X'$ , telle que  $\exp(\phi)$  coïncide avec  $\pi^* f$  sur une composante connexe de l'image réciproque par  $\pi$  de  $(Y_0 \cup X_0) \setminus \tilde{D}$ .

Comme  $\phi \circ g = k\phi$ , l'image de  $\phi$  est invariante sous l'action du groupe multiplicatif  $\{k^\nu, \nu \in \mathbb{Z}\}$ ; cette image est aussi invariante sous l'action du groupe additif  $2\pi i \mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$ . Comme, d'autre part,  $f$  s'annule sur  $Y_0 \cap \tilde{D}$ ,  $\phi(X')$  contient le demi-plan gauche  $\mathbb{H}_g := \{w \in \mathbb{C} \mid \Re(w) < 0\}$ . La fonction  $\phi$  est une submersion holomorphe. Les composantes connexes de ses fibres sont isomorphes à  $\mathbb{C}$  en tant qu'orbites du flot relevé.

**Proposition 2.2.** *Les fibres de  $\phi$  au-dessus de  $\mathbb{H}_g$  sont connexes.*

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat principal de cette section. La démonstration de la Proposition 2.2 est reportée à la fin de la section.

La Proposition 2.2 implique que la restriction de  $\phi$  à l'ouvert  $V' := \phi^{-1}(\mathbb{H}_g)$  est en fait un  $\mathbb{C}$ -fibré principal au-dessus de  $\mathbb{H}_g$  et donc trivial. Soit  $\tilde{V} := \pi(V')$  et  $V$  son image dans  $S$ . Soit  $\gamma \in \pi_1(\tilde{V})$  un lacet avec  $\rho(\gamma) = 2\pi i$  et  $g_\gamma$  l'automorphisme de  $V' \simeq \mathbb{H}_g \times \mathbb{C}$  correspondant à  $\gamma$ .

Le résultat principal de cette section est la

**Proposition 2.3.** *Le revêtement universel de  $\tilde{V}$  et donc celui de  $V$  sont isomorphes au produit  $\mathbb{H}_g \times \mathbb{C}$  et  $\pi_1(V)$  est engendré par les deux automorphismes  $g$  et  $g_\gamma$  de  $\mathbb{H}_g \times \mathbb{C}$ . De plus,  $\alpha(g)(g_\gamma) := gg_\gamma g^{-1} = g_\gamma^k$  et  $\pi_1(V) \simeq \mathbb{Z} \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$ .*

*Démonstration.* Remarquons que  $V \cup D$  est un voisinage de  $D$  dans  $S$ . La variété  $V' = \mathbb{H}_g \times \mathbb{C}$  est déjà le revêtement universel de  $V$ . D'après le Lemme 2.1 et la Proposition 2.2

$$\pi_1(\tilde{V}) \simeq \mathbb{Z} \left[ \frac{1}{k} \right] \simeq \{g^n g_\gamma^l g^{-n} \mid l, n \in \mathbb{Z}\}.$$

La conclusion en découle. □

C'est à la fin de l'article seulement qu'on verra que  $V \cup D$  est compact et donc coïncide avec  $S$ . Avant d'attaquer la démonstration de la Proposition 2.2, nous démontrons le

**Lemme 2.4.** *Chaque fibre  $f^{-1}(\alpha)$  pour  $\alpha \in \Delta^* := \{\zeta \in \mathbb{C} \mid 0 < |\zeta| < 1\}$  est contenue dans une feuille du feuilletage  $\tilde{\mathcal{F}}$  induit par  $\mathcal{F}$  sur  $\tilde{S}$ .*

*Démonstration.* Remarquons d'abord qu'il suffit de montrer le lemme pour  $\alpha$  dans un voisinage arbitrairement petit de 0 dans  $\Delta := \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta| < 1\}$ . En effet, s'il était faux pour un certain  $\alpha$ , on aurait deux composantes de  $f^{-1}(\alpha)$  se trouvant dans deux feuilles différentes de  $\tilde{\mathcal{F}}$ . D'après la relation (†) les images par  $g^\nu, \nu > 0$ , des deux composantes considérées se trouveraient dans deux composantes de  $f^{-1}(\alpha^{k^\nu})$ . L'invariance du feuilletage  $\tilde{\mathcal{F}}$  par  $g$ , donnerait l'existence de deux feuilles différentes coupant  $f^{-1}(\alpha^{k^\nu})$ .

Lorsque  $\alpha$  tend vers zéro, l'ensemble  $f^{-1}(\alpha) \cap U_0$  s'accumule sur  $\tilde{D} \cap U_0$ . Plus précisément pour tout voisinage de  $\tilde{D} \cap \overline{U_0}$  et  $\alpha$  assez petit,  $f^{-1}(\alpha) \cap U_0$  se trouvera dans ce voisinage. Prenons une composante  $Z$  de  $f^{-1}(\alpha)$ . Elle se trouve dans une feuille de  $\tilde{\mathcal{F}}$ .

Notons  $(z_i, z_j)$  un système local de coordonnées analytiques autour d'un noeud  $C_i \cap C_j$ , dans lequel  $C_i = \{z_i = 0\}, C_j = \{z_j = 0\}$ . Puisque le feuilletage est localement défini par  $\omega = df/f$  ou par  $df$ , les feuilles de  $\tilde{\mathcal{F}}$  au voisinage de  $C_i \cap C_j$  sont les hypersurfaces de niveau d'une fonction  $l(z_i^{m_i} z_j^{m_j})$  (voir [8], page 498, VI.3 et la démonstration du lemme 1, page 503). On a noté par  $l$  un élément de  $Diff(\mathbb{C}, 0)$ . En particulier il s'ensuit que chaque feuille qui est suffisamment proche de l'une des courbes  $C_i$ , sera proche de toute autre courbe  $C_j$  de  $\tilde{D} \cap U_0$ . En plus, si  $p.g.c.d.(m_i, m_j) = 1$

- une composante locale d'une feuille autour du noeud  $C_i \cap C_j$  contient localement  $m_i$  composantes connexes locales autour de  $C_i$ , et  $m_j$  autour de  $C_j$  ;
- la fonction  $l(z_i^{m_i} z_j^{m_j})$  n'est pas une puissance, donc est à fibres connexes, d'après le lemme 1 de [8], page 500.

Notons par  $p_i$  le nombre des composantes locales de  $Z$  autour d'un point lisse de la courbe  $C_i$ . La fibre  $f^{-1}(\alpha)$  a  $a_i := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_i} \omega$  composantes locales autour de  $C_i$ , et  $d_{ij} := p.g.c.d.(a_i, a_j)$  composantes locales autour d'un noeud  $C_i \cap C_j \neq \emptyset$ . Remarquons que  $p_i \leq a_i$ . Avec les notations précédentes, on a

$$m_i = \frac{a_i}{d_{ij}}, \quad m_j = \frac{a_j}{d_{ij}}.$$

Il s'ensuit que le nombre de composantes locales de  $Z$  autour d'un noeud  $C_i \cap C_j \neq \emptyset$  est

$$\frac{p_i}{m_i} = \frac{p_i d_{ij}}{a_i} = \frac{p_j d_{ij}}{a_j} = \frac{p_j}{m_j}.$$

Nous obtenons la relation  $\frac{p_i}{a_i} = \frac{p_j}{a_j}$  pour chaque  $C_i \cap C_j \neq \emptyset$ . En utilisant la connexité de  $\tilde{D} \cap U_0$  et le fait que  $Z$  est contenu dans une feuille de  $\tilde{\mathcal{F}}$  on déduit l'existence d'un nombre rationnel  $s$  tel que  $s = \frac{p_i}{a_i}, i = 0, \dots, n-1$ . Maintenant  $p.g.c.d.(a_0, \dots, a_{n-1}) = 1$  entraîne  $s \in \mathbb{Z}$  et donc  $p_i = a_i$  pour tout  $i = 0, \dots, n-1$  et  $Z$  est l'unique composante connexe de  $f^{-1}(\alpha) \cap U_0$ .  $\square$

*Démonstration de la Proposition 2.2.* Soient  $L_1, L_2$  deux composantes connexes d'une fibre  $\phi^{-1}(\beta)$  avec  $\beta \in \mathbb{H}_g$ . On peut se ramener à la situation où  $\alpha := e^\beta$  est petit en utilisant l'action de  $\{g^\nu \mid \nu \in \mathbb{Z}\}$ . La même action permet de supposer que  $\pi(L_1)$  et  $\pi(L_2)$  coupent  $X_0$ , au besoin on remplace  $\alpha$  par  $\alpha^{k^\nu}$ . On peut supposer même que  $L_1$  et  $L_2$  coupent la même composante connexe de  $\pi^{-1}((X_0 \cup Y_0) \setminus \tilde{D})$ . Pour voir ceci, on prend un chemin qui relie  $L_1$  et  $L_2$ , et on considère le recouvrement  $(\pi^{-1}(g^n((X_0 \cup Y_0) \setminus \tilde{D})))_{n \in \mathbb{Z}}$ . D'après le lemme précédent  $\pi(L_1)$  et  $\pi(L_2)$  se trouvent dans la même feuille de  $\tilde{\mathcal{F}}$ , puisque  $f$  prend sur  $\pi(L_1) \cap (X_0 \cup Y_0) \neq \emptyset$  la même valeur que sur  $\pi(L_2) \cap (X_0 \cup Y_0) \neq \emptyset$ . Soit  $z \in \pi(L_1) \cap Y_0 = \pi(L_2) \cap Y_0$  et  $z_1 \in L_1, z_2 \in L_2$  des préimages par  $\pi$ . Un chemin  $\gamma$  reliant  $z_1$  à  $z_2$  dans  $X'$  se projette sur un chemin fermé dans  $\tilde{S} \setminus \tilde{D}$ . L'intégrale de  $\omega$  sur ce chemin sera nulle et donc  $\rho(\gamma) = 0$ , i.e.  $z_1 = z_2$  et  $L_1 = L_2$ .  $\square$

### 3. Actions proprement discontinues sur $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$

Le but de cette section est de montrer un théorème général concernant certains groupes d'automorphismes holomorphes agissant proprement discontinûment sur  $\mathbb{H}_g \times \mathbb{C}$ , où  $\mathbb{H}_g = \{w \in \mathbb{C} \mid \Re(w) < 0\}$ .

Notons par  $(w, z)$  les coordonnées globales de  $\mathbb{H}_g \times \mathbb{C}$ .

**Théorème 3.1.** *Soit  $k \in \mathbb{N}, k > 1$ . Soit  $G$  un sous-groupe du groupe des automorphismes holomorphes de  $\mathbb{H}_g \times \mathbb{C}$ . On suppose que*

- le groupe  $G$  est isomorphe au produit semi-direct  $\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$ , c'est-à-dire qu'il existe deux générateurs  $g, g_\gamma \in G$  de  $G$  tels que  $gg_\gamma g^{-1} = g_\gamma^k$ ,
- l'action de  $G$  sur  $\mathbb{H}_g \times \mathbb{C}$  est proprement discontinue,
- elle préserve un champ de vecteurs  $\theta$  intégrable sans zéros.

Alors, à conjugaison près,  $\theta = \partial/\partial z$  et le groupe  $G$  est engendré par les deux automorphismes

$$\begin{cases} g_\gamma(w, z) = (w + 2\pi i, z) \\ g(w, z) = (kw, z + H(e^{-w})), \end{cases}$$

où  $H(\zeta) = \sum_{m=0}^s A_m \zeta^m$  est un polynôme tel que  $A_m = 0$  pour tout  $m > 0$  avec  $k \mid m$  et  $A_s \neq 0$ . Réciproquement, l'action d'un groupe d'automorphismes de  $\mathbb{H}_g \times \mathbb{C}$  engendré par deux éléments  $g, g_\gamma$  de la forme ci-dessus est libre et proprement discontinue.

*Démonstration.* Une application évidente du théorème de Liouville montre qu'un

automorphisme de  $\mathbb{H}_g \times \mathbb{C}$  est de la forme

$$(w, z) \mapsto (Aw, f_1(w)z + f_2(w)),$$

où  $A \in \text{Aut}_{\mathcal{O}}(\mathbb{H}_g) \simeq \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ ,  $f_1 \in \mathcal{O}^*(\mathbb{H}_g)$  et  $f_2 \in \mathcal{O}(\mathbb{H}_g)$ . En particulier, la projection de  $\mathbb{H}_g \times \mathbb{C}$  sur  $\mathbb{H}_g$  induit canoniquement un homomorphisme de groupes  $\eta$  de  $G$  dans  $\text{Aut}_{\mathcal{O}}(\mathbb{H}_g)$ . L'hypothèse de la propre discontinuité de l'action montre que si  $\text{Ker}(\eta)$  était non-trivial, il serait isomorphe à  $\mathbb{Z}$  ou à  $\mathbb{Z}^2$ . Mais ce n'est pas difficile à voir que  $\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$  n'admet pas de tels sous-groupes normaux. Donc  $\eta$  est injectif, i.e.  $G \simeq \eta(G) \subset \text{Aut}_{\mathcal{O}}(\mathbb{H}_g) \simeq \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Puisque  $G$  est un groupe résoluble non-commutatif, l'adhérence de Zariski réelle de  $\eta(G)$  dans  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  l'est aussi. Cette adhérence est donc conjuguée au sous-groupe de Borel standard de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Ce fait et la structure de  $G$  impliquent maintenant que  $\eta(G)$  est conjugué dans  $\text{Aut}_{\mathcal{O}}(\mathbb{H}_g)$  au groupe engendré par  $(w \mapsto w + 2\pi i)$  et  $(w \mapsto kw)$ .

Le champ de vecteurs intégrable  $\theta$  ne s'annule pas par hypothèse. Il est donc constant sur chaque fibre de la projection de  $\mathbb{H}_g \times \mathbb{C}$  sur  $\mathbb{H}_g$ . Par conséquent ce champ est de la forme  $\alpha(w) \frac{\partial}{\partial z}$  sur  $\mathbb{H}_g \times \mathbb{C}$ , où  $\alpha \in \mathcal{O}^*(\mathbb{H}_g)$ . En conjuguant avec l'automorphisme

$$(w, z) \mapsto (w, \alpha^{-1} \cdot z),$$

on se ramène au cas  $\alpha \equiv 1$ .

Puisque  $g$  et  $g_\gamma$  préservent  $\theta = \partial/\partial z$ , on a :

$$\begin{aligned} g_\gamma(w, z) &= (w + 2\pi i, z + f_\gamma(w)) \\ g(w, z) &= (kw, z + f_g(w)). \end{aligned}$$

L'automorphisme  $g_\gamma$  engendre une action de  $\mathbb{Z}$  sur  $\mathbb{H}_g \times \mathbb{C}$ , qui induit un  $\mathbb{C}$ -fibré principal holomorphe

$$\mathbb{H}_g \times \mathbb{C}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{H}_g/\mathbb{Z} \simeq \Delta^* = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid 0 < |\zeta| < 1\}.$$

La trivialité holomorphe de ce fibré entraîne l'existence d'une fonction holomorphe  $h : \mathbb{H}_g \rightarrow \mathbb{C}$  telle que

$$h(w + 2\pi i) - h(w) = f_\gamma(w)$$

et la conjugaison par  $(w, z) \mapsto (w, z + h(w))$  nous mène à la nouvelle forme

$$g_\gamma(w, z) = (w + 2\pi i, z).$$

Par la suite nous supposons donc que  $f_\gamma \equiv 0$ .

On a par hypothèse

$$g \circ g_\gamma \circ g^{-1} = g_\gamma^k,$$

ce qui conduit à la  $2\pi i$ -périodicité de la fonction  $f_g$ .

En factorisant par  $\exp : \mathbb{H}_g \rightarrow \Delta^*$ ,  $w \mapsto e^w =: \zeta$ , on obtient un développement en série de Laurent

$$f_g(w) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m e^{mw} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m \zeta^m.$$

Une conjugaison par

$$(w, z) \mapsto (w, z + \beta(w))$$

où  $\beta$  est une fonction  $2\pi i$ -périodique sur  $\mathbb{H}_g$ , ne modifie pas la forme de  $g_\gamma$ , mais remplace  $f_g$  par

$$w \mapsto f_g(w) + \beta(kw) - \beta(w).$$

Soit

$$h(\zeta) := \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m \zeta^m, \quad h_+(\zeta) := \sum_{m > 0} a_m \zeta^m.$$

La série  $\sum_{l=0}^{\infty} h_+(\zeta^{k^l})$  converge uniformément sur tout compact de  $\Delta^*$ . Pour le voir il suffit d'écrire  $h_+(\zeta) = \zeta(\zeta^{-1}h_+(\zeta))$  et de remarquer que  $\zeta^{-1}h_+(\zeta)$  est holomorphe en 0. Soit

$$\chi(\zeta) := \sum_{l=0}^{\infty} h_+(\zeta^{k^l}).$$

On a

$$\chi(\zeta) - \chi(\zeta^k) = h_+(\zeta).$$

En posant  $\beta(w) := \chi(e^w)$ , nous obtenons

$$f_g(w) + \beta(kw) - \beta(w) = \sum_{m \leq 0} a_m e^{mw}.$$

On peut donc supposer que  $f_g(w) = h(e^w)$ , où  $h \in \mathcal{O}(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \setminus \{0\})$ .

Il nous reste la possibilité de conjuguer avec  $(w, z) \mapsto (w, z + \varphi(e^w))$ , où  $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \setminus \{0\})$ .

Pour une fonction

$$h(\zeta) = \sum_{m \leq 0} a_m \zeta^m$$

et  $l \in \mathbb{N}^*$ , on considère

$$h_l(\zeta) := \sum_{k^l | m, m < 0} a_m \zeta^m$$

et

$$h_0 := h.$$

Chaque  $h_l$  est de la forme  $h_l(\zeta) = f_l(\zeta^{k^l})$ , avec une fonction  $f_l$ . Si  $\varphi$  désigne la série formelle  $-\sum_{l \geq 1} f_l$ , on a formellement :

$$\begin{aligned} h(\zeta) + \varphi(\zeta^k) - \varphi(\zeta) &= (h(\zeta) - f_1(\zeta^k)) + (f_1(\zeta) - f_2(\zeta^k)) + (f_2(\zeta) - f_3(\zeta^k)) + \dots \\ &= \sum_{l \geq 0} (f_l(\zeta) - f_{l+1}(\zeta^k)) \end{aligned}$$

et chaque terme ne contient dans son développement en série de Laurent en  $\zeta$  que des termes  $b_m \zeta^m$  avec  $k \nmid m$ . Dans le premier terme de la somme, on peut bien sûr avoir  $b_0 \neq 0$ .

Pour  $0 < R < 1$ ,  $l \geq 1$  et  $|\zeta| \geq R$  on a :

$$|f_l(\zeta)| \leq \sum_{\substack{k^l|m \\ m < 0}} |a_m| R^{\frac{m}{k^l}} \leq \sum_{\substack{k^l|m \\ m < 0}} |a_m| R^{m+k^l-1} \leq R^{k^l-1} \sum_{m \leq 0} |a_m| R^m,$$

ce qui montre que la série qui définit  $\varphi$  est uniformément convergente sur tout compact de  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ . Il en découle une forme normale pour  $h$  :

$$h(\zeta) = a_0 + \sum_{\substack{m < 0 \\ k|m}} a_m \zeta^m.$$

Si  $h$  a cette forme normale, toute modification non triviale

$$h(\zeta) + \varphi(\zeta^k) - \varphi(\zeta)$$

de  $h(\zeta)$  par une conjugaison perdra la forme normale. Autrement dit, la fonction  $\zeta \mapsto \varphi(\zeta^k) - \varphi(\zeta)$  a la forme normale si, et seulement si elle est identiquement nulle. Pour voir ceci, on écrit les développements en série de ces fonctions :

$$\varphi(\zeta) = \sum_{m \leq 0} b_m \zeta^m, \quad -\varphi(\zeta^k) + \varphi(\zeta) = \sum_{m \leq 0} c_m \zeta^m.$$

S'il existe  $c_r \neq 0$  pour  $r \in \mathbb{Z}_-$ , alors  $k \nmid r$ ,  $b_r = c_r$ ,  $b_{kr} = c_{kr} + b_r = c_r$ ,  $b_{k^2r} = c_{k^2r} + b_{kr} = c_r, \dots$  et la série  $\sum_{m \leq 0} b_m \zeta^m$  ne serait pas convergente sur  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ . Contradiction !

Les générateurs de  $G$  s'écrivent maintenant sous la forme

$$g_\gamma(w, z) = (w + 2\pi i, z)$$

$$g(w, z) = (kw, z + f_g(w))$$

avec  $f_g(w) = h \circ \exp(w) = H \circ \exp(-w)$  où

$$H(\zeta) = A_0 + \sum_{\substack{m > 0 \\ k|m}} A_m \zeta^m,$$

$$A_0 = a_0, \quad A_m = a_{-m}.$$

Pour voir que  $H$  est un polynôme, nous utiliserons la propre discontinuité de l'action du sous-groupe  $\Gamma := \{g_{l,n} := g^{-n} \circ g_\gamma^l \circ g^n \mid n \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$ .

Nous démontrerons la

**Proposition 3.2.** *La fonction  $H$  est un polynôme de degré non-nul, si et seulement si l'action de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{H}_g \times \mathbb{C}$  est libre et proprement discontinue.*

Explicitement nous avons

$$g_{l,n}(w, z) = \left( w + \frac{2\pi il}{k^n}, z + \sum_{j=0}^{n-1} \left( f_g(k^j w) - f_g\left(k^j w + \frac{2\pi il}{k^{n-j}}\right) \right) \right).$$

Posons pour  $l = 1$ ,

$$G_{n,j}(\zeta) = H(\zeta^{k^j}) - H(\zeta^{k^j} \exp(-2\pi i k^j - n)), \quad 0 \leq j < n,$$

$$F_n(\zeta) = \sum_{0 \leq j < n} G_{n,j}(\zeta).$$

Avec ces notations et  $\zeta = \exp(-w)$ , on a

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left( f_g(k^j w) - f_g\left(k^j w + \frac{2\pi i}{k^{n-j}}\right) \right) = \sum_{j=0}^{n-1} G_{n,j}(\zeta) = F_n(\zeta),$$

et

$$g_{1,n}(w, z) = \left( w + \frac{2\pi i}{k^n}, z + F_n(\zeta) \right).$$

Fixons les notations suivantes :

$r\mathbb{T}$  (resp.  $r\mathbb{D}$ ) est le cercle (resp. le disque ouvert) de rayon  $r > 0$ . Les différents cercles  $r\mathbb{T}$  sont munis de la mesure de Lebesgue normalisée  $dm(\zeta)$ , pour laquelle  $\int_{r\mathbb{T}} dm(\zeta) = 1$ .

Si  $f$  est holomorphe sur  $3\bar{\mathbb{D}}$ ,  $wind(f)$  désigne le nombre de zéros de  $f$  dans  $3\mathbb{D}$ . Soit  $K := \{z \in \mathbb{C} \mid 3 \leq |z| \leq 3^k\}$ .

Dans la démonstration de la partie directe de la Proposition 3.2 on utilisera les lemmes suivants :

**Lemme 3.3.** *Soit  $f$  une fonction holomorphe sur le disque fermé  $3^k\bar{\mathbb{D}}$  telle que pour tout  $z \in K$ ,  $|f(z)| \geq 1$ . Alors on a les relations*

$$\int_{3\mathbb{T}} \ln |f(\zeta)\zeta^{-wind(f)}| dm(\zeta) = \int_{3^k\mathbb{T}} \ln |f(\zeta)\zeta^{-wind(f)}| dm(\zeta),$$

$$\int_{3\mathbb{T}} \ln |f(\zeta)| dm(\zeta) = \int_{3^k\mathbb{T}} \ln |f(\zeta)| dm(\zeta) - (k-1)wind(f) \ln 3.$$

*Démonstration.* La fonction  $z \mapsto \ln(f(z)z^{-wind(f)})$  est holomorphe sur  $K$ , ce qui donne la première relation d'après la formule de Cauchy. La deuxième s'en déduit facilement.  $\square$

**Lemme 3.4.** *Pour tous  $a, b \in \mathbb{C}$ , tels que  $|a| > 2$  et  $|b| < 1$ , on a*

$$\ln |a+b| \geq \ln(|a|) - |b|.$$

*Démonstration.* Comme  $|a+b| > 1$ , l'inégalité

$$\ln |a| \leq \ln |a+b| + \ln \left( 1 + \frac{|b|}{|a+b|} \right)$$

donne le résultat.  $\square$



**Lemme 3.5.** Soit  $f$  une fonction holomorphe définie au voisinage du disque fermé  $3\mathbb{D}$ . On pose

$$A = \int_{3\mathbb{T}} \ln^+ |f(\zeta)| dm(\zeta).$$

Alors il existe une constante  $C > 0$ , indépendante de  $f$ , pour laquelle

$$\ln \int_{2\mathbb{T}} |f(\zeta)| dm(\zeta) \leq CA.$$

(Ici on a noté  $\ln^+ = \max(\ln, 0)$ .)

*Démonstration.* Une estimation immédiate au moyen de la formule de Poisson donne l'existence d'une constante  $C > 0$ , telle que pour tout  $z \in 2\mathbb{T}$ , on ait

$$\ln |f(z)| \leq CA.$$

Il s'ensuit

$$\int_{2\mathbb{T}} |f(\zeta)| dm(\zeta) \leq \exp(CA);$$

l'inégalité voulue en découle.  $\square$

**Lemme 3.6.** Soit  $f = \sum_{s>0} \hat{f}(s)z^s$  une fonction holomorphe sur un voisinage du disque  $2\mathbb{D}$ . Alors, pour tout  $s \in \mathbb{N}$ ,

$$|\hat{f}(s)| = \left| \int_{2\mathbb{T}} f(\zeta)\zeta^{-s} dm(\zeta) \right| \leq 2^{-s} \int_{2\mathbb{T}} |f(\zeta)| dm(\zeta).$$

**Lemme 3.7.** Pour tout  $n \geq 0$  on a

$$F_{n+1}(\zeta) = G_{n+1,0}(\zeta) + F_n(\zeta^k).$$

*Démonstration.* Avec les notations précédentes on a

$$\begin{aligned} F_{n+1}(\zeta) &= \sum_{0 \leq j \leq n} (H(\zeta^{k^j}) - H(\zeta^{k^j} \exp(-2\pi i k^{j-n-1}))) \\ &= G_{n+1,0}(\zeta) + \sum_{1 \leq j \leq n} (H(\zeta^{k^j}) - H(\zeta^{k^j} \exp(-2\pi i k^{j-n-1}))) \\ &= G_{n+1,0}(\zeta) + \sum_{0 \leq j-1 < n} (H((\zeta^k)^{k^{j-1}}) - H((\zeta^k)^{k^{j-1}} \exp(-2\pi i k^{(j-1)-n}))) \\ &= G_{n+1,0}(\zeta) + F_n(\zeta^k). \end{aligned} \quad \square$$

**Lemme 3.8.** Pour tout  $\nu \geq 1$ ,

$$\widehat{F}_n(\nu k^{n-1}) = A_\nu(1 - \exp(-2\pi i \nu/k)).$$

En particulier,

$$|\widehat{F}_n(\nu k^{n-1})| \geq |A_\nu|/k.$$

*Démonstration.* On a pour tout  $s$ ,

$$\begin{aligned} \widehat{G_{n,n-1}}(s) &= \int_{\mathbb{T}} (H(\zeta^{k^{n-1}}) - H(\zeta^{k^{n-1}} \exp(-2\pi i k^{-1}))) \zeta^{-s} dm(\zeta) \\ &= \int_{\mathbb{T}} (\sum_{m \geq 0} A_m \zeta^{mk^{n-1}} - \sum_{m \geq 0} A_m \zeta^{mk^{n-1}} \exp(-2\pi i m/k)) \zeta^{-s} dm(\zeta). \end{aligned}$$

On voit que le seul terme non nul dans  $\widehat{G_{n,n-1}}(\nu k^{n-1})$  est celui obtenu pour  $m = \nu$ . On a donc

$$\widehat{G_{n,n-1}}(\nu k^{n-1}) = A_\nu (1 - \exp(-2\pi i \nu/k)).$$

En outre, s'il existe un indice  $j$ ,  $0 \leq j < n - 1$ , pour lequel  $\widehat{G_{n,j}}(\nu k^{n-1}) \neq 0$ , il existerait  $m \geq 1$  pour lequel  $A_m \neq 0$ ,  $mk^j = \nu k^{n-1}$ . Mais alors  $m/k = \nu k^{n-j-2} \in \mathbb{N}$ , ce qui est exclu, puisque lorsque  $k$  divise  $m$  on a  $A_m = 0$ . Pour obtenir l'inégalité on remarque que si  $A_\nu \neq 0$ ,  $\nu/k \notin \mathbb{N}$  et  $|1 - \exp(-2\pi i \nu/k)| \geq 1/k$ .  $\square$

*Démonstration de la Proposition 3.2.* 1) Nous faisons une démonstration par l'absurde. Supposons que  $H$  ne soit pas un polynôme et néanmoins que  $\Gamma$  opère proprement discontinûment. En particulier les images  $g_{1,n}(K)$  du compact  $K$  doivent tendre vers l'infini. Comme le premier membre converge, cela implique que la suite  $(|F_n|)$  converge uniformément sur  $K$  vers  $+\infty$  ce que nous supposons donc dorénavant.

Puisque  $H$  est de classe  $C^1$  sur  $K$ , il existe une constante  $c > 0$  indépendante de  $n$  pour laquelle

$$\beta_n := \sup_{\zeta \in K} |G_{n,0}(\zeta)| = \sup_{\zeta \in K} |H(\zeta) - H(\zeta \exp(-2\pi i k^{-n}))| \leq ck^{-n}.$$

Fixons un entier positif  $N$  tel que

$$\text{pour tous } \zeta \in K, n \geq N, |F_n(\zeta)| \geq 2 \tag{*}$$

et

$$\sum_{n > N} \beta_n \leq 1. \tag{**}$$

On note  $W := \text{wind}(F_N)$  et on pose  $F(\zeta) := F_N(\zeta^k)$ . En utilisant (\*), on obtient  $\text{wind}(F) = kW$ . On rappelle que  $F_{N+1}(\zeta) = F(\zeta) + G_{N+1,0}(\zeta)$ . La combinaison du théorème de Rouché appliqué à  $F$  et  $G_{N+1,0}$  avec les inégalités (\*) et (\*\*) montre que  $\text{wind}(F_{N+1}) = kW$ . Par récurrence, on montre que pour  $p \in \mathbb{N}$ ,

$$\text{wind}(F_{N+p}) = k^p W.$$

D'après les lemmes 3.3 et 3.7, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{3\mathbb{T}} \ln |F_N(\zeta)| dm(\zeta) &= \int_{3^k\mathbb{T}} \ln |F_N(\zeta)| dm(\zeta) - (k-1)W \ln 3 \\ &= \int_{3\mathbb{T}} \ln |F_N(\zeta^k)| dm(\zeta) - (k-1)W \ln 3 \\ &= \int_{3\mathbb{T}} \ln |F_{N+1}(\zeta) - G_{N+1,0}(\zeta)| dm(\zeta) - (k-1)W \ln 3. \end{aligned}$$

En appliquant le lemme 3.4 et les inégalités (\*) et (\*\*), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{3\mathbb{T}} \ln |F_N(\zeta)| dm(\zeta) &\geq \int_{3\mathbb{T}} (\ln |F_{N+1}(\zeta)| - |G_{N+1,0}(\zeta)|) dm(\zeta) - (k-1)W \ln 3 \\ &\geq \int_{3\mathbb{T}} \ln |F_{N+1}(\zeta)| dm(\zeta) - \beta_{N+1} - (k-1)W \ln 3, \end{aligned}$$

ou encore

$$\int_{3\mathbb{T}} \ln |F_{N+1}(\zeta)| dm(\zeta) \leq \int_{3\mathbb{T}} \ln |F_N(\zeta)| dm(\zeta) + \beta_{N+1} + (k-1)W \ln 3.$$

Un raisonnement par récurrence nous conduit aux inégalités

$$\begin{aligned} \int_{3\mathbb{T}} \ln |F_{N+p}(\zeta)| dm(\zeta) &\leq \int_{3\mathbb{T}} \ln |F_N(\zeta)| dm(\zeta) + \sum_{N < s \leq N+p} \beta_s \\ &\quad + (k-1)W \ln 3 \sum_{0 \leq s < p} k^s \tag{††} \\ &\leq C + Wk^p \ln 3, \end{aligned}$$

pour une certaine constante  $C > 0$  indépendante de  $p \in \mathbb{N}$ .

Le lemme 3.5 ainsi que les inégalités (\*) et (††) nous donnent l'existence d'une constante  $C_1 > 0$  indépendante de  $p$  telle que

$$\ln \int_{2\mathbb{T}} |F_{N+p}(\zeta)| dm(\zeta) \leq C_1 + C_1 k^p.$$

Puisque  $H$  n'est pas un polynôme on peut trouver un entier  $\nu$  qui vérifie

$$\nu > C_1 k^{1-N} / \ln 2, \quad \text{et} \quad A_\nu \neq 0.$$

Mais alors, d'une part le lemme 3.6 nous donne

$$\begin{aligned} \ln |\widehat{F_{N+p}}(\nu k^{N+p-1})| &\leq \ln \int_{2\mathbb{T}} |F_{N+p}(\zeta)| dm(\zeta) - \nu k^{N+p-1} \ln 2 \\ &\leq C_1 + C_1 k^p - \nu k^{N+p-1} \ln 2 \longrightarrow -\infty \quad \text{lorsque} \quad p \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

D'autre part, d'après le lemme 3.8,

$$|\widehat{F_{N+p}}(\nu k^{N+p-1})| \geq |A_\nu| / k > 0,$$

ce qui donne une contradiction. Par conséquent, si  $H$  n'est pas un polynôme, et si  $A_{sk} = 0$  pour tout  $s \in \mathbb{N}$ , les fonctions  $|F_n|$  ne peuvent pas converger vers  $+\infty$  uniformément sur  $K$ .

2) Réciproquement, supposons que  $H$  soit un polynôme, c'est-à-dire que

$$H(\zeta) = \sum_{m=1}^s A_m \zeta^m,$$

avec  $A_m = 0$  quand  $k \mid m$ ; le terme constant ne joue aucun rôle dans l'expression de  $g_{l,n}$ . Considérons, par l'absurde, l'existence d'une suite  $(g_{l_\nu, n_\nu})_{\nu \in \mathbb{N}}$  qui contredirait la propre discontinuité de l'action.

Alors, en particulier, la suite

$$\left( \frac{2\pi i l_\nu}{k^{n_\nu}} \right)_{\nu \in \mathbb{N}}$$

est bornée et donc  $(n_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  peut être supposé strictement croissante (en passant, le cas échéant, à une sous-suite).

En examinant la deuxième composante de  $g_{l_\nu, n_\nu}(w, z)$ , on voit que la suite

$$\left( \sum_{1 \leq m \leq s, 0 \leq j \leq n_\nu - 1} A_m e^{-mk^j w} \left( 1 - e^{\frac{2\pi i l_\nu m}{k^{n_\nu - j}}} \right) \right)_{\nu \in \mathbb{N}}$$

est aussi bornée (pour  $w$  fixé). Il existe un diviseur  $t \in \mathbb{N}^*$  de  $k$ , tel que la sous-suite de  $(n_\nu, l_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  satisfaisant  $t = \text{p.g.c.d.}(k, l_\nu)$  soit de longueur infinie. Nous nous restreignons à cette sous-suite et supposons qu'elle contredise la propre discontinuité. Soit

$$s_0 := \max(\{m \in \mathbb{N} \mid A_m \neq 0 \text{ et } \frac{tm}{k} \notin \mathbb{Z}\} \cup \{0\}).$$

Si  $s_0 \neq 0$ , on a

$$A_{s_0} e^{-s_0 k^{n_\nu - 1} w} \left( 1 - e^{\frac{2\pi i l_\nu s_0}{k}} \right) \neq 0$$

et, plus précisément, puisque  $(|1 - e^{\frac{2\pi i l_\nu s_0}{k}}|)_{\nu \in \mathbb{N}}$  est minoré par  $|1 - e^{\frac{2\pi i t}{k}}|$ , ce terme est dominant dans l'expression

$$\sum_{1 \leq m \leq s, 0 \leq j \leq n_\nu - 1} A_m e^{-mk^j w} \left( 1 - e^{\frac{2\pi i l_\nu m}{k^{n_\nu - j}}} \right)$$

et tend vers l'infini avec  $n_\nu$ . Donc  $s_0 = 0$ . Soit alors

$$s_1 := \max\left(\left\{m \in \mathbb{N} \mid A_m \neq 0 \text{ et } \frac{tm}{k^2} \notin \mathbb{Z}\right\} \cup \{0\}\right).$$

Si  $s_1 \neq 0$ , on aura

$$A_{s_1} e^{-s_1 k^{n_\nu - 2} w} \left( 1 - e^{\frac{2\pi i l_\nu s_1}{k^2}} \right) \neq 0$$

et c'est le terme dominant dans ce cas. Comme avant, on voit que  $s_1 = 0$ . De façon analogue, on considère  $s_2, s_3, \dots$  etc. D'une part tous ces  $s_j$  sont nuls, d'autre part cela est impossible, car il existe un  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $\frac{ts}{k^p} \notin \mathbb{Z}$ . Pour ce  $p$  on a  $s = s_p \neq 0$ .  $\square$

La démonstration du Théorème 3.1 s'achève en remarquant que l'action d'un groupe  $G$  engendré par les automorphismes

$$\begin{cases} g_\gamma(w, z) = (w + 2\pi i, z) \\ g(w, z) = (kw, z + H(e^{-w})). \end{cases}$$

de  $\mathbb{H}_g \times \mathbb{C}$  est proprement discontinue si, et seulement si l'action du sous-groupe  $\Gamma \simeq \mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$  l'est.

En effet, supposons que  $\Gamma$  agit proprement discontinûment et notons  $\alpha : G \rightarrow \mathbb{Z}$  la projection de noyau  $\Gamma$ . Il est évident que le facteur  $\mathbb{Z}$  dans  $\pi_1(V)$  agit de façon proprement discontinue sur  $\mathbb{H}_g \times \mathbb{C}$ . Donc, si une suite d'éléments de  $G$  contredisait la propre discontinuité, il existerait une sous-suite infinie ayant une image constante par  $\alpha$ . Après une multiplication de cette sous-suite avec un élément convenablement fixé, on peut supposer que l'image par  $\alpha$  est l'élément neutre de  $\mathbb{Z}$ . On obtient ainsi une suite dans  $\Gamma$  qui contredit la propre discontinuité de l'action de  $\Gamma$ .  $\square$

#### 4. Construction du germe contractant

Dans cette section nous terminons la démonstration du Théorème 0.1. D'après la Proposition 2.3 et le Théorème 3.1, l'action du groupe  $\pi_1(V)$  sur  $\mathbb{H}_g \times \mathbb{C}$  est engendrée par les deux automorphismes

$$\begin{cases} g_\gamma(w, z) = (w + 2\pi i, z) \\ g(w, z) = (kw, z + H(e^{-w})). \end{cases}$$

où  $H(\zeta) = \sum_{m=0}^s A_m \zeta^m$  est un polynôme en forme normale, c'est-à-dire  $A_m = 0$  pour tout  $m > 0$  avec  $k|m$  et  $A_s \neq 0$ .

Soit  $l := [s/k] + 1$ . Nous allons conjuguer notre groupe avec

$$\phi(w, z) = (w, z + \sum_{m=1}^{l-1} A_m e^{-mw}).$$

Ceci n'aura pas d'effet sur  $g_\gamma$ , mais

$$\phi \circ g \circ \phi^{-1}(w, z) = (kw, z + A_0 + Q(e^{-w})),$$

où  $Q(\zeta) = H(\zeta) - A_0 - \sum_{m=1}^{l-1} A_m \zeta^m + \sum_{m=1}^{l-1} A_m \zeta^{mk}$  est un polynôme de degré  $s$  avec

$$\zeta^{\min(k,l)} | Q(\zeta).$$

En itérant au besoin cette procédure, on finira avec un polynôme  $Q$  de degré  $s$  tel que  $\zeta^l | Q(\zeta)$ . Soit  $Q(\zeta) := \sum_{m=l}^s b_m \zeta^m$  et  $d := \text{p.g.c.d.}\{k, m \mid b_m \neq 0\}$ .

Conjuguons maintenant avec  $\phi(w, z) = (dw, z) :$

$$\phi \circ g_\gamma \circ \phi^{-1}(w, z) = (w + 2\pi id, z)$$

$$\phi \circ g \circ \phi^{-1}(w, z) = (kw, z + A_0 + Q(e^{-w/d})).$$

On vérifie que le groupe engendré est égal au groupe  $G'$  engendré par

$$\begin{aligned}(w, z) &\mapsto (w + 2\pi i, z) \\ (w, z) &\mapsto (kw, z + A_0 + Q(e^{-w/d})).\end{aligned}$$

Soit maintenant

$$l' := [s/kd] + 1$$

et

$$Q'(\zeta) := \sum_{m=l}^s b_m \zeta^{m/d}.$$

En utilisant l'inégalité  $d[x/d] < [x] + 1$ ,  $d \in \mathbb{N}^*$ ,  $x \in \mathbb{R}$  et le fait que les indices des coefficients non nuls de  $Q'$  sont divisibles par  $d$ , on vérifie aisément que  $\zeta^{l'} | Q'(\zeta)$ . Nous conjugurons maintenant par  $(w, z) \mapsto (w, e^{l'w} z)$  et les générateurs de  $G'$  deviennent

$$\begin{aligned}(w, z) &\mapsto (w + 2\pi i, z) \\ (w, z) &\mapsto (kw, e^{l'(k-1)w} z + A_0 e^{l'kw} + P(e^w)),\end{aligned}$$

où  $P$  est le polynôme défini par

$$P(\xi) := \xi^{l'k} Q'(\xi^{-1}).$$

Remarquons que  $\deg P \leq l'(k-1)$  et que  $P(0) = 0$ . Soit

$$P(\xi) = \sum_{m=1}^{l'(k-1)} c_m \xi^m.$$

On a  $\text{p.g.c.d.}\{k, m \mid c_m \neq 0\} = 1$ .

Cette relation implique que le germe contractant

$$\begin{aligned}f : \Delta^* \times \mathbb{C} &\rightarrow \Delta^* \times \mathbb{C}, \\ f(\xi, z) &:= (\xi^k, \xi^{l'(k-1)} z + A_0 \xi^{l'k} + P(\xi))\end{aligned}$$

est localement injectif autour de  $(0, 0)$ . En effet, si  $f(\xi_1, z_1) = f(\xi_0, z_0)$ , alors  $\xi_0^k = \xi_1^k$  et  $\xi_0^{l'(k-1)} z_0 + P(\xi_0) = \xi_1^{l'(k-1)} z_1 + P(\xi_1)$ . Posons  $\epsilon := \xi_1/\xi_0$ . On a  $\epsilon^k = 1$  et

$$z_1 = \epsilon^{l'} \left[ z_0 + \xi_0^{-l'(k-1)} \sum_{m=1}^{l'(k-1)} c_m \xi_0^m (1 - \epsilon^m) \right].$$

Si  $\epsilon = 1$ , on a  $z_1 = z_0$ . Sinon, prenons  $m_0$  le plus petit indice tel que  $c_{m_0} \neq 0$  et  $\epsilon^{m_0} \neq 1$ . L'existence d'un tel indice est garantie par la relation  $\text{p.g.c.d.}\{k, m \mid c_m \neq 0\} = 1$ . On écrit maintenant

$$z_1 = \epsilon^{l'} \left[ z_0 + \xi_0^{-l'(k-1)+m_0} \left( c_{m_0} (1 - \epsilon^{m_0}) + \sum_{m=m_0+1}^{l'(k-1)} c_m \xi_0^{m-m_0} (1 - \epsilon^m) \right) \right]$$

et on voit que pour  $z_0$  et  $\xi_0$  assez petits,  $z_1$  reste loin de 0. L'injectivité locale en résulte.

Par la Proposition 1.2.8 de [4], il s'ensuit que  $f$  est un germe définissant une surface à CSG minimale  $S'$  dont on note  $D'$  le diviseur maximal.

On peut aussi vérifier que le quotient de  $\mathbb{H}_g \times \mathbb{C}$  par l'action de  $G'$  est le même que celui de  $\Delta^* \times \mathbb{C}$  par la relation d'équivalence  $u_1 \sim u_2$  : il existe  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  tels que  $f^{\circ n_1}(u_1) = f^{\circ n_2}(u_2)$ .

Il s'ensuit de la construction que  $V$  et  $S' \setminus D'$  sont isomorphes. Comme les matrices d'intersection de  $D$  et de  $D'$  sont définies négatives et ni  $D$  ni  $D'$  ne contiennent des courbes exceptionnelles de première espèce, cet isomorphisme se prolonge en un isomorphisme de  $V \cup D$  sur  $S'$ . En particulier  $V \cup D$  est compacte et coïncide avec  $S$ , ce qui démontre le théorème.  $\square$

## 5. Annexe

On considère la suite de polynômes  $P_0, P_1, \dots, P_i, \dots$  de variables  $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots$  définis par récurrence par

$$P_0 := 1, P_1 := X_1, P_i := X_i P_{i-1} - P_{i-2}, \quad i \geq 2.$$

Le but de cette annexe est de démontrer la proposition suivante.

**Proposition 5.1.** *Soit  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  une solution du système*

$$\alpha_i + \frac{1}{\alpha_{i+1}} = d_i, \quad \text{pour } 1 \leq i \leq m-1 \quad (1)$$

$$\alpha_m + \frac{1}{\alpha_1} = d_m. \quad (2)$$

pour des nombres fixés  $d_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  et soit  $\kappa^{-1} := \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_m$ . Alors

$$\kappa + \frac{1}{\kappa} = P_m(d_1, \dots, d_m) - P_{m-2}(d_2, \dots, d_{m-1}).$$

Nous commençons avec un lemme préparatoire.

**Lemme 5.2.** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a*

$$P_n(X_1, X_2, \dots, X_n) = P_n(X_n, X_{n-1}, \dots, X_1).$$

*Démonstration.* Nous allons montrer par récurrence la relation :

$$P_i(X_1, \dots, X_i) = X_1 P_{i-1}(X_i, \dots, X_2) - P_{i-2}(X_i, \dots, X_3), \quad (3)$$

pour  $i \geq 2$ . L'assertion du lemme en est une conséquence directe. Les cas  $i = 2, 3$

sont clairs. Supposons que (3) soit vraie pour  $i - 1$  et pour  $i$ . Alors

$$\begin{aligned}
 P_{i+1}(X_1, \dots, X_{i+1}) &= X_{i+1}P_i(X_1, \dots, X_i) - P_{i-1}(X_1, \dots, X_{i-1}) \\
 &= X_{i+1}(X_1P_{i-1}(X_i, \dots, X_2) - P_{i-2}(X_i, \dots, X_3)) \\
 &\quad - (X_1P_{i-2}(X_{i-1}, \dots, X_2) - P_{i-3}(X_{i-1}, \dots, X_3)) \\
 &= X_1(X_{i+1}P_{i-1}(X_i, \dots, X_2) - P_{i-2}(X_{i-1}, \dots, X_2)) \\
 &\quad - (X_{i+1}P_{i-2}(X_i, \dots, X_3) - P_{i-3}(X_{i-1}, \dots, X_3)) \\
 &= X_1P_i(X_{i+1}, \dots, X_2) - P_{i-1}(X_{i+1}, \dots, X_3)
 \end{aligned}$$

ce qui démontre (3). □

*Démonstration de la Proposition 5.1.* Le système (1) est équivalent à

$$\prod_{j=i}^m \alpha_j = d_i \prod_{j=i+1}^m \alpha_j - \prod_{j=i+2}^m \alpha_j \text{ pour } 1 \leq i \leq m-1.$$

Il en découle

$$\begin{aligned}
 \kappa^{-1} &= \alpha_1 \dots \alpha_m \\
 &= d_1 \alpha_2 \dots \alpha_m - \alpha_3 \dots \alpha_m \\
 &= P_1(d_1) \alpha_2 \dots \alpha_m - P_0 \alpha_3 \dots \alpha_m \\
 &= d_2 (P_1(d_1) - 1) \alpha_3 \dots \alpha_m - P_1(d_1) \alpha_4 \dots \alpha_m \\
 &= P_2(d_1, d_2) \alpha_3 \dots \alpha_m - P_1(d_1) \alpha_4 \dots \alpha_m \\
 &\dots \dots \\
 &= P_{m-1}(d_1, \dots, d_{m-1}) \alpha_m - P_{m-2}(d_1, \dots, d_{m-2}).
 \end{aligned}$$

De façon analogue, en partant de



$$\begin{aligned}
(\alpha_1 \dots \alpha_m)^{-1} &= d_{m-1}(\alpha_1 \dots \alpha_{m-1})^{-1} - (\alpha_1 \dots \alpha_{m-2})^{-1} \\
(\alpha_1 \dots \alpha_{m-1})^{-1} &= d_{m-2}(\alpha_1 \dots \alpha_{m-2})^{-1} - (\alpha_1 \dots \alpha_{m-3})^{-1} \\
&\dots \dots \dots \\
\alpha_1 \alpha_2 &= d_1(\alpha_1)^{-1} - 1
\end{aligned}$$

on en déduit

$$\begin{aligned}
\kappa &= (\alpha_1 \dots \alpha_m)^{-1} \\
&= P_{m-1}(d_{m-1}, \dots, d_1) \alpha_1^{-1} - P_{m-2}(d_{m-1}, \dots, d_2)
\end{aligned}$$

et encore, d'après le lemme et (2)

$$\begin{aligned}
\kappa + \frac{1}{\kappa} &= P_{m-1}(d_1, \dots, d_{m-1}) \left( \alpha_m + \frac{1}{\alpha_1} \right) - P_{m-2}(d_1, \dots, d_{m-2}) \\
&\quad - P_{m-2}(d_{m-1}, \dots, d_2) \\
&= P_{m-1}(d_1, \dots, d_{m-1}) d_m - P_{m-2}(d_1, \dots, d_{m-2}) - P_{m-2}(d_{m-1}, \dots, d_2) \\
&= P_m(d_1, \dots, d_m) - P_{m-2}(d_{m-1}, \dots, d_2).
\end{aligned}$$

□

## Références

- [1] C. Camacho et P. Sad, Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields. *Annals of Math.* **115** (1982), 579–595.
- [2] G. Dloussky et K. Oeljeklaus, Vector fields and foliations on surfaces of class VII<sub>0</sub>. *Ann. Inst. Fourier* **49** (1999), 1503–1545.
- [3] G. Dloussky et K. Oeljeklaus, M. Toma, Surfaces de la classe VII<sub>0</sub> admettant un champ de vecteurs. *Comm. Math. Helv.* **75** (2000), 255–270.
- [4] Ch. Favre, Dynamique des applications rationnelles. *Thèse*, Orsay, 2000.
- [5] C. Gellhaus et P. Heinzner, Komplexe Flächen mit holomorphen Vektorfeldern. *Abh. Math. Sem. Hamburg* **60** (1990), 37–46.
- [6] J. Hausen, Zur Klassifikation glatter kompakter  $\mathbb{C}^*$ -Flächen. *Math. Ann.* **301** (1995), 763–769.
- [7] F. Hirzebruch, Hilbert Modular Surfaces. *Ens. Math.* **19** (1973), 183–281.
- [8] J.-F. Mattei et R. Moussu, Holonomie et intégrales premières. *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. 4. série*, t. **13** (1980), 499–523.
- [9] I. Nakamura, On surfaces of class VII<sub>0</sub> with curves. *Invent. Math.* **78** (1984), 393–443.

- [10] I. Nakamura, On surfaces of class  $VII_0$  with curves II. *Tohoku Math. Jour.* **42** (1990), 475–516.

G. Dloussky  
LATP (UMR-CNRS 6632)  
CMI – Université d’Aix Marseille I  
39, rue Joliot-Curie  
F–13453 Marseille Cedex 13  
France  
e-mail : dloussky@cmi.univ-mrs.fr

K. Oeljeklaus  
LATP (UMR-CNRS 6632)  
CMI – Université d’Aix Marseille I  
39, rue Joliot-Curie  
F–13453 Marseille Cedex 13  
France  
e-mail : karloelj@cmi.univ-mrs.fr

M. Toma  
Universität Osnabrück  
Fachbereich Mathematik-Informatik  
D–49069 Osnabrück  
Germany  
e-mail : Matei.Toma@mathematik.Uni-Osnabrueck.de

(Received: July 7, 2000)