

# Asymptotique des nombres de Betti, invariants $I^2$ et laminations

Autor(en): **Bergeron, N. / Gaboriau, D.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **79 (2004)**

PDF erstellt am: **16.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-59513>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Asymptotique des nombres de Betti, invariants $l^2$ et laminations

N. Bergeron et D. Gaboriau

**Abstract.** Let  $K$  be a finite simplicial complex. We are interested in the asymptotic behavior of the Betti numbers of a sequence of finite sheeted covers of  $K$ , when normalized by the index of the covers. W. Lück, has proved that for regular coverings, these sequences of numbers converge to the  $l^2$  Betti numbers of the associated (in general infinite) limit regular cover of  $K$ .

In this article we investigate the non regular case. We show that the sequences of normalized Betti numbers still converge. But this time the “good” limit object is no longer the associated limit cover of  $K$ , but a lamination by simplicial complexes. We prove that the limits of sequences of normalized Betti numbers are equal to the  $l^2$  Betti numbers of this lamination.

Even if the associated limit cover of  $K$  is contractible, its  $l^2$  Betti numbers are in general different from those of the lamination. We construct such examples. We also give a dynamical condition for these numbers to be equal. It turns out that this condition is equivalent to a former criterion due to M. Farber. We hope that our results clarify its meaning and show to which extent it is optimal.

In a second part of this paper we study non free measure-preserving ergodic actions of a countable group  $\Gamma$  on a standard Borel probability space. Extending group-theoretic similar results of the second author, we obtain relations between the  $l^2$  Betti numbers of  $\Gamma$  and those of the generic stabilizers. For example, if  $b_1^{(2)}(\Gamma) \neq 0$ , then either almost each stabilizer is finite or almost each stabilizer has an infinite first  $l^2$  Betti number.

**Mathematics Subject Classification (2000).** 55NXX (58J22), 37A15 (57R30)

**Mots clés.** Betti numbers, finite covers, laminations,  $l^2$ -Betti numbers, measure preserving actions.

### Introduction

#### 0.1. Asymptotique des nombres de Betti

Un complexe simplicial compact  $K$  possède des invariants topologiques numériques : ses nombres de Betti (usuels)  $b_n(K)$ , qui sont les dimensions des espaces vectoriels  $H_n(K, \mathbb{R})$  d’homologie en dimension  $n$ .

On considère dans tout cet article une **action libre cocompacte**  $(L, \Gamma)$  d’un groupe dénombrable discret  $\Gamma$  sur un complexe simplicial  $L$ .

Ses nombres de Betti  $l^2$  notés  $b_n^{(2)}(L, \Gamma)$  sont les dimensions généralisées (au sens de von Neumann) des espaces hilbertiens  $\overline{H}_n^{(2)}(L, \Gamma)$  d'homologie  $l^2$  réduite en dimension  $n$ . Les nombres de Betti  $l^2$ , introduits par M. Atiyah dans un contexte analytique [Ati76], ont connu un vaste développement, notamment dans le cadre des feuilletages mesurés (par A. Connes [Co79]), dans le cadre général des actions topologiques quelconques de groupes dénombrables (J. Cheeger et M. Gromov [CG86]), ou suivant l'approche de W. Lück qui fait rentrer cette théorie dans un cadre homologique classique par une extension de la notion de dimension généralisée [Lüc98a, Lüc98b]. L'article de B. Eckmann<sup>1</sup> [Eck00] constitue une excellente introduction aux nombres de Betti  $l^2$ . Une question récurrente dans le domaine consiste à établir leurs liens avec les nombres de Betti usuels.

Lorsque  $\Gamma$  est un groupe fini, la dimension généralisée au sens de von Neumann n'est autre que la dimension usuelle divisée par le cardinal  $|\Gamma|$  de  $\Gamma$ . Dès lors, si le complexe simplicial  $L$  ci-dessus est lui-même compact (et donc  $\Gamma$  fini), alors

$$b_n^{(2)}(L, \Gamma) = \frac{b_n(L)}{|\Gamma|}.$$

D'où il résulte, si  $\Lambda$  est un sous-groupe **normal** d'indice fini de  $\Gamma$ , que les nombres de Betti  $l^2$  de l'action du groupe fini  $\Lambda \backslash \Gamma$  sur le complexe compact  $\Lambda \backslash L$  coïncident avec les nombres de Betti usuels normalisés de  $\Lambda \backslash L$  :

$$b_n^{(2)}(\Lambda \backslash L, \Lambda \backslash \Gamma) = \frac{b_n(\Lambda \backslash L)}{[\Gamma : \Lambda]}. \quad (1)$$

On appellera **tour de sous-groupes d'indices finis** de  $\Gamma$  toute suite décroissante  $(\Gamma_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de sous-groupes d'indices finis de  $\Gamma$  telle que  $\Gamma_0 = \Gamma$ . Il lui correspond

- la tour de revêtements  $L \rightarrow \cdots \Gamma_{i+1} \backslash L \rightarrow \Gamma_i \backslash L \rightarrow \Gamma_{i-1} \backslash L \rightarrow \cdots \rightarrow \Gamma_0 \backslash L$
- en chaque dimension  $n$ , la suite des nombres de Betti usuels  $(b_n(\Gamma_i \backslash L))_{i \in \mathbb{N}}$ .

Si les sous-groupes  $\Gamma_i$  sont de plus d'intersection triviale ( $\bigcap_{i \geq 0} \Gamma_i = \{e\}$ ), alors la tour de revêtements  $(\Gamma_i \backslash L)_i$  "semble converger" vers le revêtement  $L$ , et on cherche à comprendre le comportement asymptotique de la suite des nombres de Betti usuels, ou plus précisément au vu de la formule (1), de ces nombres normalisés :  $(\frac{b_n(\Gamma_i \backslash L)}{[\Gamma : \Gamma_i]})_{i \in \mathbb{N}}$ . Un argument fort en faveur de cette normalisation est que la caractéristique d'Euler, ainsi normalisée est constante dans une tour de revêtements.

D. Kazhdan, dans une étude sur les variétés arithmétiques [Kaz75] a essentiellement obtenu la comparaison suivante, lorsque les sous-groupes d'indices finis  $\Gamma_i$  sont de plus **normaux** et d'intersection triviale :

<sup>1</sup> C'est d'ailleurs B. Eckmann qui le premier a introduit une structure euclidienne sur l'espace des chaînes d'un complexe, pour obtenir une décomposition de Hodge (voir [Eck45]). Il est également remarquable que l'une des premières applications (voir [Eck49]) de cette décomposition de Hodge simpliciale concerne la théorie des revêtements, application dont la preuve contient en germes les idées de M. Atiyah conduisant aux nombres de Betti  $l^2$  dans le cas d'un revêtement galoisien fini.

**Inégalité de Kazhdan.**

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{b_n(\Gamma_i \backslash L)}{[\Gamma : \Gamma_i]} \leq b_n^{(2)}(L, \Gamma). \quad (2)$$

M. Gromov [Gro91, p. 13, p. 153] est ensuite amené à poser la question : l'inégalité ci-dessus est-elle une égalité? En 1994, W. Lück, dans un article remarqué démontre ce résultat.

**Théorème** (Lück [Lüc94]). *Soit  $(\Gamma_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une tour de sous-groupes d'indices finis de  $\Gamma$ . Si les sous-groupes  $\Gamma_i$  sont de plus normaux dans  $\Gamma$  et d'intersection triviale, alors*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{b_n(\Gamma_i \backslash L)}{[\Gamma : \Gamma_i]} = b_n^{(2)}(L, \Gamma). \quad (3)$$

Observons que dans l'énoncé original de l'article [Lüc94], le complexe simplicial  $L$  est supposé simplement connexe, mais que cette hypothèse est superflue. Du coup, on peut aussi supprimer l'hypothèse de trivialité de l'intersection des  $\Gamma_i$ , à condition de remplacer alors dans la conclusion, et seulement dans le terme de droite, le groupe  $\Gamma$  par le quotient  $\bar{\Gamma} := \Gamma / \cap_{i \in \mathbb{N}} \Gamma_i$  et par  $\bar{L} := \cap_{i \in \mathbb{N}} \Gamma_i \backslash L$ .

Alors que le membre de gauche de (1) repose sur l'existence d'une action de  $\Lambda \backslash \Gamma$  et donc sur le fait que  $\Lambda$  est distingué dans  $\Gamma$ , le membre de droite a un sens même lorsque  $\Lambda$  n'est pas distingué dans  $\Gamma$ . Cette question est discutée dans la section introductive 2.1.

Une généralisation du théorème de W. Lück à des revêtements non galoisiens a néanmoins été proposée par M. Farber, qui est amené à introduire une hypothèse d'apparence technique.

**Critère de Farber.** *Soit  $n_i$  le nombre de sous-groupes distincts de  $\Gamma$  qui sont conjugués à  $\Gamma_i$  et, pour chaque  $g \in \Gamma$ , soit  $n_i(g)$  le nombre de ceux-là qui contiennent  $g$ .*

$$\forall g \in \Gamma \setminus \{e\}, \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{n_i(g)}{n_i} = 0. \quad (4)$$

**Théorème** (Farber [Far98]). *Soit  $(\Gamma_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une tour de sous-groupes d'indices finis de  $\Gamma$  d'intersection triviale. Si le critère (4) est vérifié, alors*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{b_n(\Gamma_i \backslash L)}{[\Gamma : \Gamma_i]} = b_n^{(2)}(L, \Gamma).$$

Observons que ce critère entraîne que  $\Gamma$  est résiduellement fini.



Dans la partie 4, on présente des exemples où ce critère n'est pas satisfait et où la conclusion est mise en défaut, et où même l'inégalité de Kazhdan (2) se trouve violée. Voici par exemple une spécialisation du théorème 4.1.

Soit  $A$  un complexe simplicial compact de groupe fondamental infini et résiduellement fini. Soient  $K$  un complexe obtenu en lui attachant un cercle par un point,  $\Gamma \simeq \pi_1(A) * \mathbb{Z}$  le groupe fondamental et  $L = \tilde{K}$  le revêtement universel de  $K$ .

**Théorème 0.1.** *Pour tout  $\mu_0 \in [0, 1[$ , il existe une tour  $(\Gamma_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de sous-groupes d'indices finis de  $\Gamma$ , d'intersection triviale, telle que,  $\Gamma_{i+1}$  est normal dans  $\Gamma_i$*

$$\text{et pour } n \geq 2, \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{b_n(\Gamma_i \setminus L)}{[\Gamma : \Gamma_i]} = \mu_0 b_n(\Gamma \setminus L) + (1 - \mu_0) b_n^{(2)}(L, \Gamma),$$

$$\text{et pour } n = 1, \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{b_1(\Gamma_i \setminus L)}{[\Gamma : \Gamma_i]} = \mu_0 b_1(\Gamma \setminus L) + (1 - \mu_0) b_1^{(2)}(L, \Gamma) - \mu_0.$$

Rappelons que  $b_1(\Gamma \setminus L) = 1 + b_1(A)$  et  $b_1^{(2)}(L, \Gamma) = 1 + b_1^{(2)}(\tilde{A}, \pi_1(A))$ , et que  $b_n(\Gamma \setminus L) = b_n(A)$  et  $b_n^{(2)}(L, \Gamma) = b_n^{(2)}(\tilde{A}, \pi_1(A))$ , pour  $n \geq 2$ . Du coup, tout complexe  $A$  pour lequel  $b_n(A) \neq b_n^{(2)}(\tilde{A}, \pi_1(A))$  ( $n \geq 2$ ) conduit à un contre-exemple.

Par exemple, pour construire des exemples qui ne vérifient pas l'inégalité de Kazhdan, on prend pour  $A$  le tore  $\mathbb{T}^p$  de dimension  $p$ , alors  $L$  est contractile,  $\Gamma \simeq \mathbb{Z}^p * \mathbb{Z}$ ,  $b_1(\Gamma \setminus L) = p + 1$ ,  $b_1^{(2)}(L, \Gamma) = 1$  et, pour  $n \geq 2$ ,  $b_n(\Gamma \setminus L) = C_p^n$  tandis que tous les  $b_n^{(2)}(L, \Gamma)$  sont nuls.

Cet énoncé permet également de produire des exemples où cette fois l'inégalité de Kazhdan se trouve fortement vérifiée (avec une inégalité stricte). Prenons  $A$  homéomorphe à une variété  $M$  de dimension 4 compacte acyclique à  $b_1(M) = 0$  et groupe fondamental résiduellement fini (on peut penser à un *faux*  $\mathbb{C}P^2$  ou  $\mathbb{C}P^2$  d'homologie [Mum79];  $\pi_1(M)$  est alors un réseau de  $SU(2, 1)$ ). On a alors :  $b_2^{(2)}(L, \Gamma) > b_2(\Gamma \setminus L)$ . En effet, par dualité de Poincaré,  $b_4 = b_0 = 1$ ,  $b_1 = b_3 = 0 = b_4^{(2)} = b_0^{(2)}$  et  $b_1^{(2)} = b_3^{(2)}$  et donc  $b_2(A) + 2 = \chi(A) = \chi^{(2)}(\tilde{A}, \pi_1(A)) = b_2^{(2)}(\tilde{A}, \pi_1(A)) - 2b_1^{(2)}(\tilde{A}, \pi_1(A))$ .

Si l'on se contente d'un exemple avec  $n = 1$ , une égalité  $b_1(A) = b_1^{(2)}(\tilde{A}, \pi_1(A))$  suffit, qu'on peut obtenir avec une sphère d'homologie  $A$  ( $b_1 = 0$ ) de dimension 3 et hyperbolique ( $b_1^{(2)} = 0$ ). C'est encore plus simple si l'on se satisfait d'exemples non acycliques ou avec de la torsion.

Après ces préliminaires, voici le premier résultat général que nous obtenons avec des sous-groupes non nécessairement normaux. On ne connaît pas d'autre preuve de cet énoncé. La suite considérée n'est, en général, ni monotone, ni sous-additive.

**Théorème 0.2.** *Soit  $(\Gamma_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une tour de sous-groupes d'indices finis de  $\Gamma$ . Pour tout entier  $n$ , la suite des nombres de Betti usuels normalisés  $\left(\frac{b_n(\Gamma_i \setminus L)}{[\Gamma : \Gamma_i]}\right)_{i \in \mathbb{N}}$  est convergente.*

Plus précisément, nous donnons une interprétation "dynamico-géométrique" de cette limite et nous montrons en quel sens le critère Farber (4) est optimal, ce qui, on l'espère, clarifie sa signification. Pour cela, nous considérons une construction

associée à la donnée de la tour de sous-groupes d'indices finis  $(\Gamma_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de  $\Gamma$  et de l'action  $(L, \Gamma)$  :

Pour tout entier positif  $i$ , on introduit l'espace de probabilité  $(X_i, \mu_i)$  égal à l'ensemble (fini) des classes (à droite)  $\Gamma/\Gamma_i$  de  $\Gamma$  modulo  $\Gamma_i$ , que l'on munit de la mesure de comptage normalisée. Les applications de réductions successives  $X_{i+1} = \Gamma/\Gamma_{i+1} \rightarrow X_i = \Gamma/\Gamma_i$  permettent de considérer l'espace de probabilité *limite projective*

$$(X, \mu) := \limproj_{i \geq 0} (X_i, \mu_i).$$

C'est un espace borélien standard. On peut le voir comme le bord (à l'infini) d'un arbre enraciné. C'est aussi un espace topologique homéomorphe à un espace de Cantor (si la suite des indices  $[\Gamma : \Gamma_i]$  tend vers l'infini). L'action naturelle de  $\Gamma$  sur les  $X_i$  fournit une action de  $\Gamma$  sur  $(X, \mu)$ , préservant la mesure  $\mu$ . Cela ne dépend que de la tour.

L'action diagonale de  $\Gamma$  sur  $X \times L$  donne par passage au quotient une lamination transversalement mesurée qu'on appellera une  $(L, \Gamma)$ -lamination :

$$\mathcal{L}(X, L, \Gamma) := \Gamma \backslash (X \times L).$$

Ses feuilles en sont les composantes connexes par arcs (lorsque  $L$  est connexe). Chacune est isomorphe au quotient de  $L$  par le stabilisateur d'un point de l'action  $(X, \Gamma)$ .

Les nombres de Betti  $l^2$  d'une telle lamination (pour la mesure transverse provenant de  $\mu$ ) ont été considérés par le second auteur [Gab01]. Nous les noterons

$$\beta_n(X, L, \Gamma).$$

Les définitions seront rappelées en section 2. On peut les voir comme une version simpliciale des nombres de Betti des feuilletages de A. Connes.

On est alors capable de donner un sens, en termes de laminations, au membre de gauche " $b_n^{(2)}(\Lambda \backslash L, \Lambda \backslash \Gamma)$ " de l'égalité (1) même lorsque  $\Lambda$  n'est pas normal :  $\beta_n(\Gamma/\Lambda, L, \Gamma)$ . Et cette égalité reste valide (voir section 2.1). Plus généralement, nous obtenons le résultat suivant, qui est central dans cet article :

**Théorème 3.1.** *Soit  $(\Gamma_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une tour de sous-groupes d'indices finis de  $\Gamma$ . Pour tout entier  $n$ ,*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{b_n(\Gamma_i \backslash L)}{[\Gamma : \Gamma_i]} = \beta_n(X, L, \Gamma).$$

où  $\beta_n(X, L, \Gamma)$  est comme ci-dessus.

On dit que l'action  $(X, \mu, \Gamma)$  est *libre* si l'élément neutre est le seul élément de  $\Gamma$  à avoir un ensemble de points fixes de mesure non nulle. On a alors :

**Théorème** [Gab01, Th. 3.11]. *Si l'action  $(X, \mu, \Gamma)$  est libre, alors*

$$\beta_n(X, L, \Gamma) = b_n^{(2)}(L, \Gamma).$$

Si les  $\Gamma_i$  sont normaux dans  $\Gamma$  et d'intersection triviale, alors  $X$  hérite d'une structure de groupe (profini),  $\Gamma$  est un sous-groupe et son action est par multiplication à gauche dans  $X$ . Elle est alors libre et le théorème 3.1 se spécialise en le théorème de W. Lück. Quant au critère de Farber (4), il signifie précisément que l'action est libre. En effet,

**Proposition 2.6.** *Dans  $(X, \mu, \Gamma)$ , l'ensemble des points fixes de  $g \in \Gamma$  est de mesure exactement  $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{n_i(g)}{n_i}$ .*

On doit observer que ni le théorème de Farber, ni notre théorème 3.1 ne fournissent une *nouvelle* preuve du théorème de Lück, puisque dans un cas comme dans l'autre, il s'agit d'adapter les arguments de [Lüc94].

## 0.2. Actions boréliennes non libres

Le théorème 3.1 décrit les limites possibles des nombres de Betti normalisés dans les tours des revêtements finis. Un contrôle sur la combinatoire des tours de revêtements finis est donc imposé par l'action  $(X, \Gamma)$  et la  $(L, \Gamma)$ -lamination associée. Il est naturel de chercher à comprendre ces actions et plus précisément à trouver des restrictions sur les stabilisateurs des points pour des actions non libres  $(X, \mu, \Gamma)$ , préservant la mesure, d'un groupe dénombrable  $\Gamma$  sur un borélien standard de probabilité.

Les nombres de Betti  $l^2$  de  $(L, \Gamma)$  sont des invariants homotopiques, si bien que lorsque  $L$  est  $p$ -connexe, les nombres de Betti  $l^2$  de l'action  $b_n^{(2)}(L, \Gamma)$ , pour  $n \leq p$  deviennent des invariants du groupe  $\Gamma$  lui-même. On les appelle alors les nombres de Betti  $l^2$  de  $\Gamma$  et on les note  $b_n^{(2)}(\Gamma)$ . Plus généralement, J. Cheeger et M. Gromov [CG86] ont introduit les nombres de Betti  $l^2$  pour tous les groupes dénombrables discrets, même ceux ne possédant pas de  $K(\Gamma, 1)$  à  $p$ -squelette fini.

Dans la section 5, nous démontrons :

**Théorème 5.4.** *Soit  $(X, \mu, \Gamma)$  une action ergodique, préservant la mesure, d'un groupe dénombrable  $\Gamma$  sur un borélien standard de probabilité sans atome. Si  $b_1^{(2)}(\Gamma)$  est non nul, alors*

- ou bien  $\Gamma(x)$ , le stabilisateur de  $x$  dans  $\Gamma$ , est un groupe fini pour  $\mu$ -presque tout  $x \in X$  ;
- ou bien le premier nombre de Betti  $l^2$ ,  $b_1^{(2)}(\Gamma(x))$ , est infini pour  $\mu$ -presque tout  $x \in X$ .

Si de plus, la relation induite par l'action de  $\Gamma$  sur  $X$  est moyennable, seul le deuxième cas est possible. Tandis que dans le premier cas, pour  $\mu$ -presque tout  $x$ , les sous-groupes  $\Gamma(x)$  sont conjugués deux à deux et il sont *presque normaux*, au sens où chacun n'a qu'un nombre fini de conjugués distincts dans  $\Gamma$ .

Il est intéressant de rappeler deux énoncés en lesquels ce théorème se spécialise, chacun d'eux étant une généralisation dans une direction différente d'un théorème de O. Schreier :

**Théorème** (O. Schreier [Sch27, p. 162]). *Un sous-groupe normal non trivial et de type fini d'un groupe libre est d'indice fini.*

D'un côté, les stabilisateurs des points dans l'action  $(X, \mu, \Gamma)$  peuvent être considérés d'une certaine façon comme des généralisations de sous-groupes normaux (penser par exemple à une action où tous les points ont le même stabilisateur : c'est alors un sous-groupe normal). La remarque de D. Sullivan selon laquelle "there is no measurable way to pick a point in a leaf" impose des conditions fortes sur certaines  $(L, \Gamma)$ -laminations. Rappelons que dans [Ghy95], É. Ghys a montré comment déduire de cette remarque une classification topologique des feuilles génériques des laminations usuelles de dimension 2. Sous-jacent à ses idées, on peut trouver l'énoncé suivant :

**Théorème 5.2.** *Soit  $\Gamma$  un groupe libre et  $(X, \mu, \Gamma)$  une action libre ergodique préservant la mesure de probabilité  $\mu$  sans atome sur le borélien standard  $X$ . Alors, pour  $\mu$ -presque tout point  $x \in X$ , le stabilisateur de  $x$  est soit trivial soit de type infini.*

D'un autre côté, un groupe libre non cyclique est un exemple de groupe à premier nombre de Betti  $l^2$  non nul, et le second auteur a étendu le théorème de O. Schreier à tous les groupes du même genre (consulter [Gab01] pour références à des résultats antérieurs notamment de J. Cheeger, M. Gromov et W. Lück) :

**Théorème** [Gab01, Th. 6.8]. *Soit  $\Gamma$  un groupe dont le premier nombre de Betti  $l^2$ ,  $b_1^{(2)}(\Gamma)$ , est non nul. Si  $N$  est un sous-groupe normal de  $\Gamma$  qui a un premier nombre de Betti  $l^2$  fini (par exemple si  $N$  est de type fini) alors  $N$  est ou bien fini ou bien d'indice fini.*

La preuve dans cette généralité fait d'ailleurs appel à une action libre du groupe  $\Gamma$  sur  $(X, \mu)$  et à la notion de nombres de Betti  $l^2$  des laminations.

Pour démontrer le théorème 5.4 (ainsi que 5.6 ci-dessous), nous serons conduits à prouver le résultat suivant, intéressant en lui-même, bien que pas franchement surprenant puisque les nombres de Betti  $l^2$  des stabilisateurs sont définis explicitement sans recours à l'axiome du choix.

**Théorème 5.7.** *Soit  $(X, \mu, \Gamma)$  une action préservant la mesure d'un groupe dénombrable  $\Gamma$  sur un borélien standard de probabilité sans atome. Alors, la fonction  $X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ ,  $x \mapsto b_n^{(2)}(\Gamma(x))$ , qui associe à  $x$  le  $n$ -ème nombre de Betti  $l^2$  de son stabilisateur, est mesurable. En particulier, si l'action de  $\Gamma$  est ergodique,*

alors cette fonction est presque sûrement constante.

Concernant les nombres de Betti  $l^2$  de dimension supérieure, nous obtenons une généralisation du théorème 6.6 de [Gab01]. Rappelons qu'une action mesurable est *hyperfinie* si la relation d'équivalence engendrée est réunion croissante de relation d'équivalence mesurables à classes finies. Par le théorème de Connes–Feldman–Weiss [CFW81], cela équivaut à la moyennabilité de la relation au sens de R. Zimmer.

**Théorème 5.6.** *Soit  $(X, \mu, \Gamma)$  une action ergodique hyperfinie, préservant la mesure, d'un groupe dénombrable  $\Gamma$  sur un borélien standard de probabilité sans atome. Si pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ , le  $n$ -ème nombre de Betti  $l^2$  de presque tout stabilisateur est fini ( $b_n^{(2)}(\Gamma(x)) < \infty$   $\mu$ -p.s), alors  $b_n^{(2)}(\Gamma) = 0$ .*

Pour l'ensemble de cette section, on se permettra de supposer une certaine familiarité avec le contexte de l'article [Gab01].

Bruno Sévenec a lu attentivement une version préliminaire de cet article et nous a signalé quelques corrections. Nous l'en remercions.

## 1. Rappels sur les nombres de Betti $l^2$ d'une action de groupe

Soit  $(L, \Gamma)$  une action simpliciale libre et cocompacte et  $q : L \rightarrow K := \Gamma \backslash L$  le revêtement associé. Quitte à prendre des subdivisions barycentriques, on peut supposer que l'espace  $K$  a une structure de complexe simplicial. On confondra un complexe simplicial et sa réalisation géométrique. On se donne une orientation sur les simplexes de  $K$  (et donc aussi sur ceux de  $L$ ) et on appelle  $K^n$  (resp.  $L^n$ ) l'ensemble des simplexes de dimension  $n$  de  $K$  (resp. de  $L$ ). L'ensemble  $L^n$  est muni d'une action libre de  $\Gamma$  qui est simplement transitive sur l'image inverse  $q^{-1}(\sigma)$  de chaque simplexe  $\sigma$  de  $K^n$ .

On note  $C_n^{(2)}(L)$  l'espace des  $n$ -chaînes  $l^2$  de  $L$  : c'est l'espace de Hilbert dont une base hilbertienne est  $L^n$ . Il vient avec une représentation  $\pi_n$  de  $\Gamma$ . Les applications bord s'étendent par continuité en des opérateurs bornés  $\partial_n : C_n^{(2)}(L) \rightarrow C_{n-1}^{(2)}(L)$ . Ils vérifient  $\partial_n \partial_{n+1} = 0$  et  $\forall \gamma \in \Gamma, \pi_{n-1}(\gamma) \partial_n = \partial_n \pi_n(\gamma)$ .

Soit  $\Theta_n$  un domaine fondamental (partie qui rencontre une fois et une seule chaque orbite) pour l'action de  $\Gamma$  sur  $L^n$ . La liberté de l'action permet alors d'identifier  $L^n$  avec  $\theta_n := |\Theta_n|$  copies de  $\Gamma : L^n = \cup_{s \in \Theta_n} \Gamma s$ . Cette identification induit un isomorphisme

$$C_n^{(2)}(L) = \bigoplus_{s \in \Theta_n} l^2(\Gamma s) \simeq \bigoplus_{s \in \Theta_n} l^2(\Gamma) \quad (5)$$

qui donne à  $C_n^{(2)}(L)$  une structure de  $N(\Gamma)$ -module de Hilbert, où  $N(\Gamma)$  est l'algèbre de von Neumann de  $\Gamma$ .

On dispose alors d'un complexe de  $N(\Gamma)$ -modules hilbertiens :

$$0 \longleftarrow C_0^{(2)}(L) \xleftarrow{\partial_1} C_1^{(2)}(L) \xleftarrow{\partial_2} \dots \xleftarrow{\partial_n} C_n^{(2)}(L) \xleftarrow{\partial_{n+1}} \dots$$

On appelle *homologie  $\ell^2$  réduite* de  $L$  la suite d'espaces

$$\overline{H}_n^{(2)}(L) := \text{Ker } \partial_n / \overline{\text{Im } \partial_{n+1}},$$

où  $\overline{H}$  est l'adhérence de  $H$ . Ces espaces ont une structure de  $N(\Gamma)$ -module de Hilbert et se plongent naturellement dans  $C_n^{(2)}(L)$  comme supplémentaire orthogonal de  $\overline{\text{Im } \partial_{n+1}}$  dans  $\text{Ker } (\partial_n)$ . L'image de ce plongement est par définition l'espace, noté  $\mathcal{H}_n(L)$ , des  *$n$ -chaînes harmoniques  $\ell^2$*  de  $L$ . Un calcul immédiat montre qu'il est par ailleurs égal au noyau de l'opérateur laplacien  $\Delta_n := \partial_n^* \partial_n + \partial_{n+1} \partial_{n+1}^*$ .

On cherche à "estimer la taille" de cet espace de Hilbert  $\mathcal{H}_n(L)$ . En dimension finie, la dimension d'un sous-espace est donnée par la trace d'un projecteur sur ce sous-espace.

Ici, la trace<sup>2</sup> (de von Neumann) d'un opérateur  $a$  de  $\ell^2(\Gamma)$  qui commute avec  $N(\Gamma)$  est donnée par le produit scalaire

$$\text{Tr}_{N(\Gamma)}(a) := \langle a \delta_e | \delta_e \rangle,$$

où  $\delta_e$  est la fonction caractéristique de l'identité de  $\Gamma$ . De même, grâce à l'isomorphisme ci-dessus (5), la trace d'un opérateur  $a$  de  $C_n^{(2)}(L)$  commutant avec  $N(\Gamma)$  est donnée par

$$\text{Tr}_{N(\Gamma)}(a) = \sum_{s \in \Theta_n} \langle a(s) | s \rangle.$$

La  $N(\Gamma)$ -dimension  $\dim_{N(\Gamma)}(H)$  d'un sous-espace fermé  $N(\Gamma)$ -invariant  $H$  de  $C_n^{(2)}(L)$  est alors donnée par la trace du projecteur orthogonal sur ce sous-espace.

**Définition 1.1.** Les *nombre de Betti  $\ell^2$  de l'action*  $(L, \Gamma)$  sont les  $N(\Gamma)$ -dimensions des  $N(\Gamma)$ -modules  $\mathcal{H}_n(L)$  :

$$b_n^{(2)}(L, \Gamma) := \dim_{N(\Gamma)}(\mathcal{H}_n(L)) = \text{Tr}_{N(\Gamma)}(p_n) = \sum_{s \in \Theta_n} \langle p_n(s) | s \rangle. \quad (6)$$

où  $p_n$  est le projecteur orthogonal de  $C_n^{(2)}(L)$  sur  $\mathcal{H}_n(L)$ .

Si  $L$  est le revêtement universel de  $K$ , on appelle aussi parfois ces nombres les *nombre de Betti  $\ell^2$  de  $K$* .

Ces nombres sont des invariants d'équivalence homotopique, si bien que lorsque  $L$  est  $p$ -connexe, les  $p$  premiers nombre de Betti  $\ell^2$  de  $(L, \Gamma)$  deviennent des invariants du groupe : les *nombre de Betti  $\ell^2$  de  $\Gamma$* , notés  $b_n^{(2)}(\Gamma)$ , pour  $n = 0, 1, \dots, p$ .

<sup>2</sup> Il peut être éclairant de penser à  $a$  comme une matrice (infinie) par rapport à la base privilégiée  $(\delta_g)_{g \in \Gamma} : a = (a_{g,h}) = (\langle a(\delta_g) | \delta_h \rangle)$  pour remarquer que les termes diagonaux  $\langle a(\delta_g) | \delta_g \rangle$  sont constants, vu la commutation de  $a$  avec  $N(\Gamma)$ . La trace est alors l'un quelconque de ces termes diagonaux.

## 2. Nombres de Betti $l^2$ d'une $(L, \Gamma)$ -lamination

On rappelle dans cette section la notion de nombres de Betti  $l^2$  d'une lamination dans l'esprit de [Gab01, sect. 3].

Soit  $(X, \mu, \Gamma)$  une action mesurable du groupe  $\Gamma$  sur le borélien standard  $X$ , préservant la mesure de probabilité  $\mu$ . On note  $\Gamma(x)$  le stabilisateur du point  $x \in X$ . Soit d'autre part  $(L, \Gamma)$  une action **libre cocompacte** de  $\Gamma$  sur le complexe simplicial connexe  $L$ .

On regarde l'espace  $X \times L$ , avec la lamination par feuilles  $\{x\} \times L$ . L'action diagonale de  $\Gamma$  préserve cette lamination et définit par passage au quotient ce qu'on appelle une  $(L, \Gamma)$ -lamination transversalement mesurée

$$\mathcal{L}(X, L, \Gamma) := \Gamma \backslash (X \times L).$$

Nous allons rappeler la définition des nombres de Betti de la lamination sous l'hypothèse que  $\Gamma \backslash L$  est un complexe simplicial fini, dans ce cas chaque  $\Theta_n$  est fini.

L'image de la feuille  $\{x\} \times L$  est isomorphe à  $\Gamma(x) \backslash L$ . Sur  $X$ , on dispose du champ mesurable de sous-groupes  $x \mapsto \Gamma(x)$ . Cela permet de définir le champ mesurable  $\overline{\mathcal{L}}$  de complexes simpliciaux

$$x \mapsto \overline{\mathcal{L}}_x = \Gamma(x) \backslash L$$

sur lequel le groupe  $\Gamma$  agit encore :  $\gamma.(x, \Gamma(x)\tau) = (\gamma x, \gamma\Gamma(x)\tau) = (\gamma x, \Gamma(\gamma x)\gamma\tau)$  puisque  $\Gamma(\gamma x) = \gamma\Gamma(x)\gamma^{-1}$ . C'est un complexe simplicial (hautement non connexe) équipé d'une application ("fibration") sur  $X$ , dont les fibres sont les feuilles (au-dessus de  $x \in X$ , la feuille  $\overline{\mathcal{L}}_x$ ). Ses simplexes seront notés  $(x, \Gamma(x)s)$ , où  $x \in X$  et  $s \in L$ . Pour chaque dimension  $n$ , l'espace de ses  $n$ -simplexes forme un espace borélien standard  $\overline{\mathcal{L}}^n$ . On dispose aussi d'une application mesurable

$$Q : X \times L \rightarrow \overline{\mathcal{L}} \tag{7}$$

qui est un revêtement fibre à fibre

$$q_x : \{x\} \times L \rightarrow \overline{\mathcal{L}}_x = \Gamma(x) \backslash L.$$

À l'action de  $\Gamma$  sur  $X$  est associée la **relation d'équivalence**

$$\mathcal{R} := \{(x, y) : \Gamma x = \Gamma y\}, \tag{8}$$

où les points  $x$  et  $y$  de  $X$  sont dans la même classe s'il existe un élément  $\gamma$  dans  $\Gamma$  tel que  $y = \gamma x$ .

La relation  $\mathcal{R}$  possède une **action** sur le champ de complexes simpliciaux  $\overline{\mathcal{L}}$  :  $(x, y) \in \mathcal{R}$  définit un isomorphisme  $\overline{\mathcal{L}}_y \rightarrow \overline{\mathcal{L}}_x$  donné par l'isomorphisme naturel

$$\left( \begin{array}{ccc} \Gamma(y) \backslash L & \rightarrow & \Gamma(x) \backslash L \\ \Gamma(y)s & \mapsto & (x, y) \cdot \Gamma(y)s = \Gamma(x)\gamma s \end{array} \right) \tag{9}$$

où  $s \in L$  et  $\gamma \in \Gamma$  vérifie  $x = \gamma y$ , *i.e.*  $\Gamma(x) = \gamma\Gamma(y)\gamma^{-1}$ . Bien entendu, si  $\gamma' \in \Gamma$  est un autre tel élément, alors  $\Gamma(x)\gamma' = \Gamma(x)\gamma$ . De plus,  $(x, x)$  induit l'identité.

**Remarque 2.1.** Si  $L$  est muni d'un point base  $\bar{*}$ , alors les espaces  $\bar{\mathcal{L}}_x$  héritent d'un pointage  $*_x = q_x(\bar{*})$  qui n'est pas préservé par l'isomorphisme ci-dessus. De plus, l'image dans la lamination  $\mathcal{L}(X, L, \Gamma)$  de ce champ de pointages permet de retrouver l'espace  $X$  comme transversale et fixe donc un choix de mesure transverse invariante (et non à un multiple près).

Cette action possède un **domaine fondamental** mesurable en chaque dimension  $n$ ,

$$\bigcup_{s \in \Theta_n} Q(X \times \{s\}) = \bigcup_{s \in \Theta_n} \{(x, \Gamma(x)s) : x \in X\} \tag{10}$$

où  $\Theta_n$  est toujours un domaine fondamental pour l'action de  $\Gamma$  sur  $L^n$ . Soit en effet  $(x, \Gamma(x)s') = Q((x, s'))$  un simplexe de  $\bar{\mathcal{L}}$ . Il existe  $s \in \Theta_n$  et  $\gamma \in \Gamma$  tels que  $s' = \gamma s$ . Alors  $(x, \Gamma(x)s') = (x, \Gamma(x)\gamma s) = (x, \gamma\Gamma(\gamma^{-1}x)s) = (x, \gamma^{-1}x) \cdot (\gamma^{-1}x, \Gamma(\gamma^{-1}x)s)$ . Ainsi, l'ensemble  $\bar{\mathcal{L}}^n$  des simplexes de dimension  $n$  de  $\bar{\mathcal{L}}$  peut s'identifier avec  $\theta_n := |\Theta_n|$  copies de  $\mathcal{R}$ .

On considère le **champ d'espaces de Hilbert**

$$x \mapsto C_n^{(2)}(\bar{\mathcal{L}}_x) = C_n^{(2)}(\Gamma(x)\backslash L).$$

Chaque simplexe  $s \in L^n$  y fournit un champ de vecteurs, que nous noterons  $\bar{s} : x \mapsto \bar{s}_x$ , (donné par le champ de simplexes  $x \mapsto (x, \Gamma(x)s)$ ). Le champ de familles génératrices  $(\bar{s})_{s \in L^n}$  lui donne sa structure mesurable.

On dispose aussi du champ mesurable d'opérateurs bord  $\partial_n^x : C_n^{(2)}(\bar{\mathcal{L}}_x) \rightarrow C_{n-1}^{(2)}(\bar{\mathcal{L}}_x)$ . On définit  $C_n^{(2)}(\bar{\mathcal{L}})$  et  $D_n$  comme intégrales :

$$C_n^{(2)}(\bar{\mathcal{L}}) := \int_X^{\oplus} C_n^{(2)}(\bar{\mathcal{L}}_x) d\mu(x) \text{ et } D_n := \int_X^{\oplus} \partial_n^x d\mu(x).$$

Rappelons simplement qu'un vecteur  $u$  de  $C_n^{(2)}(\bar{\mathcal{L}})$  est un champ de vecteurs  $x \mapsto u_x$  mesurable et de carré intégrable, au sens où les fonctions  $x \mapsto \langle u_x | \bar{s}_x \rangle$  sont mesurables pour chacun des champs  $\bar{s}$  donnés par les simplexes  $s \in L$ , et  $\int_X \|u_x\|^2 d\mu(x) < \infty$ .

On dispose alors du complexe :

$$0 \longleftarrow C_0^{(2)}(\bar{\mathcal{L}}) \xleftarrow{D_1} C_1^{(2)}(\bar{\mathcal{L}}) \xleftarrow{D_2} \dots \xleftarrow{D_n} C_n^{(2)}(\bar{\mathcal{L}}) \xleftarrow{D_{n+1}} \dots \tag{11}$$

Le  $n$ -ème groupe d'homologie  $l^2$  réduite  $\bar{H}_n^{(2)}(\bar{\mathcal{L}}) = \text{Ker } D_n / \overline{\text{Im } D_{n+1}}$ . Il est isomorphe à l'espace des  $n$ -chaînes harmoniques  $l^2$  de  $\bar{\mathcal{L}}$  : le supplémentaire orthogonal

$$\mathcal{H}_n^{(2)}(\bar{\mathcal{L}}) = \text{Ker } D_n \ominus \overline{\text{Im } D_{n+1}}.$$

**Définition 2.2.** Les *nombre de Betti*  $l^2$  du  $\mathcal{R}$ -complexe simplicial  $\bar{\mathcal{L}}$  ou de la  $(L, \Gamma)$ -lamination  $\mathcal{L}(X, L, \Gamma)$  sont définis par :

$$\beta_n(\bar{\mathcal{L}}) = \beta_n(X, L, \Gamma) := \sum_{s \in \Theta_n} \langle P_n \bar{s} | \bar{s} \rangle, \tag{12}$$



où  $P_n$  est le projecteur orthogonal de  $C_n^{(2)}(\bar{\mathcal{L}})$  sur  $\mathcal{H}_n^{(2)}(\bar{\mathcal{L}})$ , qu'on évalue sur les *champs de représentants*  $\bar{s}$  pour  $s \in \Theta_n$ .

L'identification  $\mathcal{R}$ -équivariante de  $\bar{\mathcal{L}}^n$  avec  $\theta_n$  copies de  $\mathcal{R}$  construite à l'aide du domaine fondamental (10) induit un isomorphisme qui donne à  $C_n^{(2)}(\bar{\mathcal{L}})$  une structure de  $\mathcal{M}$ -modules de Hilbert :

$$C_n^{(2)}(\bar{\mathcal{L}}) = \bigoplus_{s \in \Theta_n} C_n^{(2)}(\mathcal{R} \cdot Q(X \times \{s\})) \simeq \bigoplus_{s \in \Theta_n} L^2(\mathcal{R}, \nu), \tag{13}$$

où  $\mathcal{M}$  est l'algèbre de von Neumann de la relation  $\mathcal{R}$ . On rappelle [FM77, Gab01] que l'espace  $\mathcal{R} \subset X \times X$  est un borélien standard pour la tribu induite  $(\mathcal{B} \times \mathcal{B}) \cap \mathcal{R}$ , où  $\mathcal{B}$  est la tribu de  $X$ , et pour tout  $C \in (\mathcal{B} \times \mathcal{B}) \cap \mathcal{R}$ , la mesure  $\nu$  est définie par

$$\nu(C) = \int_X |\pi_1^{-1}(x) \cap C| d\mu(x)$$

avec  $\pi_1 : \mathcal{R} \rightarrow X$  projection sur la première coordonnée. Si on désigne par  $R_\gamma$  et  $R_\phi$  les opérateurs de  $L^2(\mathcal{R}, \nu)$  donnés pour  $\gamma \in \Gamma$  et  $\phi \in L^\infty(X, \mu)$  par  $R_\gamma f(x, y) = f(x, \gamma^{-1}y)$  et  $R_\phi f(x, y) = \phi(y)f(x, y)$ , alors  $\mathcal{M}$  est l'algèbre des opérateurs de  $L^2(\mathcal{R}, \nu)$  qui commutent avec tous les  $R_\gamma$  et  $R_\phi$ . Le complexe (11) est alors un complexe de  $\mathcal{M}$ -modules hilbertiens et l'isomorphisme entre le  $n$ -ème groupe d'homologie  $l^2$  réduite et l'espace des chaînes harmoniques  $l^2$  de  $\bar{\mathcal{L}}$  est un isomorphisme de  $\mathcal{M}$ -modules.

La trace d'un opérateur  $A$  de  $L^2(\mathcal{R}, \nu)$  qui commute avec  $\mathcal{M}$  est donnée par la formule

$$\text{Tr}_{\mathcal{M}}(A) := \langle P\varphi_0 | \varphi_0 \rangle,$$

où  $\varphi_0$  est la fonction caractéristique de la diagonale de  $X \times X$ . De même, grâce à l'isomorphisme (13), la trace d'un opérateur  $A$  de  $C_n^{(2)}(\bar{\mathcal{L}})$  qui commute avec  $\mathcal{M}$  est donnée par

$$\text{Tr}_{\mathcal{M}}(A) := \sum_{s \in \Theta_n} \langle P_n \bar{s} | \bar{s} \rangle. \tag{14}$$

La  $\mathcal{M}$ -dimension d'un sous-espace fermé  $\mathcal{M}$ -invariant  $H$  de  $C_n^{(2)}(\bar{\mathcal{L}})$  est alors donnée par la trace du projecteur orthogonal sur ce sous-espace. Les *nombres de Betti*  $l^2$  du  $\mathcal{R}$ -complexe simplicial  $\bar{\mathcal{L}}$  ou de la  $(L, \Gamma)$ -lamination  $\mathcal{L}(X, L, \Gamma)$  sont donc les  $\mathcal{M}$ -dimensions des  $\mathcal{M}$ -modules  $\mathcal{H}_n^{(2)}(\bar{\mathcal{L}})$  :

$$\beta_n(\bar{\mathcal{L}}) = \beta_n(X, L, \Gamma) = \dim_{\mathcal{M}} \mathcal{H}_n^{(2)}(\bar{\mathcal{L}}) = \text{Tr}_{\mathcal{M}}(P_n)$$

où  $P_n$  est le projecteur orthogonal de  $C_n^{(2)}(\bar{\mathcal{L}})$  sur  $\mathcal{H}_n^{(2)}(\bar{\mathcal{L}})$ .

Comme rappelé dans l'introduction, lorsque l'action de  $\Gamma$  sur  $X$  est libre (au sens de la mesure), on peut montrer, [Gab01, th. 3.11], que pour tout entier  $n$ ,  $\beta_n(\bar{\mathcal{L}}) = b_n^{(2)}(L, \Gamma)$ .

Rappelons qu'inspiré par l'approche de Cheeger et Gromov [CG86], on peut définir (voir [Gab01]) la notion générale de nombres de Betti  $l^2$  d'un  $\mathcal{R}$ -complexe

simplicial général sur une relation d'équivalence donnée  $\mathcal{R}$ . Dans [Gab01], une invariance homotopique de ces nombres de Betti  $l^2$  est démontrée. Cela permet de définir les nombres de Betti  $l^2$  de la relation  $\mathcal{R}$ .

### 2.1. Exemple : revêtements finis

Dans l'introduction on a rappelé la remarque (1) selon laquelle si  $\Lambda$  est un sous-groupe **distingué d'indice fini** dans un groupe  $\Gamma$  agissant librement et cocompactement sur un complexe simplicial  $L$ , alors (le groupe  $\Lambda \backslash \Gamma$  agit librement sur  $\Lambda \backslash L$  et) pour tout entier  $n$ ,

$$b_n^{(2)}(\Lambda \backslash L, \Lambda \backslash \Gamma) = \frac{b_n(\Lambda \backslash L)}{[\Gamma : \Lambda]}. \quad (15)$$

Dans cette égalité (15), le membre de droite conserve un sens même lorsque le revêtement n'est pas galoisien autrement dit même lorsque le sous-groupe  $\Lambda$  n'est pas distingué dans  $\Gamma$ . Le membre de gauche quant à lui n'a plus de sens, néanmoins considérons sa définition "concrète", donnée par la formule (6)

$$b_n^{(2)}(\Lambda \backslash L, \Lambda \backslash \Gamma) := \sum_{s \in \Omega_n} \langle p_n(s) | s \rangle,$$

où  $\Omega_n$  est l'image d'un domaine fondamental  $\Theta_n$  pour l'action de  $\Gamma$  sur  $L^n$  (et donc un domaine fondamental pour l'action  $(\Lambda \backslash L^n, \Lambda \backslash \Gamma)$ ). Elle conserve toujours un sens mais sa valeur dépend du choix du domaine fondamental  $\Theta_n$  *i.e.* du choix d'un *point de vue*. Une solution consiste à faire la moyenne de tous ces points de vue. On va détailler cela avec comme double but d'illustrer la construction de la section 2 et de préparer à la section 2.2.

Soit  $\Gamma$  un groupe agissant librement et cocompactement sur un complexe simplicial  $L$ . Soit  $\Lambda$  un sous-groupe d'indice fini de  $\Gamma$ ,  $\kappa := [\Gamma : \Lambda]$  et  $q : L \rightarrow \Lambda \backslash L$  le revêtement correspondant.

Soit  $X$  l'ensemble fini  $\Gamma/\Lambda$  muni de la mesure de comptage normalisée :  $\mu(\{x\}) = \frac{1}{\kappa}$ . L'action de  $\Gamma$  sur  $X$  est transitive, donc la relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  est celle où tous les points sont équivalents. La mesure  $\nu$  est la mesure qui donne à chaque point de  $\mathcal{R} = X \times X$  le poids  $\frac{1}{\kappa}$ . L'espace de Hilbert  $L^2(\mathcal{R}, \nu)$  est l'espace vectoriel dont les points de  $X \times X$  forment une base, sont de norme  $\frac{1}{\kappa}$  et deux à deux orthogonaux.

La  $(L, \Gamma)$ -lamination  $\mathcal{L}(X, L, \Gamma) := \Gamma \backslash (X \times L)$  n'est constituée que d'une seule feuille isomorphe à  $\Lambda \backslash L$ . Le champ de complexes simpliciaux  $\overline{\mathcal{L}}$  est formé de  $\kappa$  complexes simpliciaux  $\overline{\mathcal{L}}_x := \Gamma(x) \backslash L$ , indexés par  $x \in \Gamma/\Lambda$ , où  $\Gamma(\gamma\Lambda) = \gamma\Lambda\gamma^{-1}$ , isomorphes deux à deux par la formule (9).

Les espaces de chaînes  $l^2$  sont alors

$$C_n^{(2)}(\overline{\mathcal{L}}) := \int_X^{\oplus} C_n^{(2)}(\overline{\mathcal{L}}_x) d\mu(x) = \bigoplus_{x \in X} C_n^{(2)}(\Gamma(x) \backslash L),$$

avec comme produit scalaire  $\langle u|v \rangle = \sum_{x \in X} \frac{1}{\kappa} \langle u_x|v_x \rangle$ .

Les nombres de Betti  $l^2$  de cette lamination sont alors obtenus à l'aide de la formule (12) :

$$\beta_n(\bar{\mathcal{L}}) = \sum_{s \in \Theta_n} \langle P_n \bar{s} | \bar{s} \rangle,$$

où  $P_n$  est le projecteur orthogonal de  $C_n^{(2)}(\bar{\mathcal{L}})$  sur  $\mathcal{H}_n^{(2)}(\bar{\mathcal{L}})$ , qu'on évalue sur les champs de représentants  $\bar{s}$  pour  $s \in \Theta_n$ .

Remarquons que l'algèbre de von Neumann  $\mathcal{M}$  de  $\mathcal{R}$  est isomorphe à l'algèbre  $M_\kappa$  des matrices  $\kappa \times \kappa$ . Son action sur  $L^2(\mathcal{R}, \nu)$  identifié avec les matrices  $A = (A_{x,y})_{x,y \in X}$  se fait alors par multiplication à gauche. La trace  $\text{Tr}_{M_\kappa}$  est alors la trace usuelle des applications linéaires, divisée par  $\kappa$ .

Par définition de l'opérateur "bord"  $D_n$ , pour  $c_n \in C_n^{(2)}(\bar{\mathcal{L}})$ , on a  $c_{n-1} = D_n c_n$  si et seulement si  $c_{n-1}(x) = \partial_n^x c_n(x)$  pour  $\mu$  presque tout  $x$  dans  $X$ . On en déduit que  $P_n$  est un opérateur décomposable  $P_n = \bigoplus_{x \in X} p_n^x$ , où  $x \mapsto p_n^x$  est le champ (mesurable) d'opérateurs projections orthogonales  $p_n^x : C_n^{(2)}(\Gamma(x) \setminus L) \rightarrow \mathcal{H}_n^{(2)}(\Gamma(x) \setminus L)$ .

$$\begin{aligned} \beta_n(\bar{\mathcal{L}}) &= \sum_{s \in \Theta_n} \sum_{x \in X} \frac{1}{\kappa} \langle p_n^x \bar{s}_x | \bar{s}_x \rangle \\ &= \frac{1}{\kappa} \sum_{s \in \Theta_n} \sum_{x \in X} \langle p_n^x \Gamma(x)s | \Gamma(x)s \rangle \end{aligned}$$

où  $\Gamma(x)s$  est vu comme une  $n$ -chaîne dans  $C_n^{(2)}(\Gamma(x) \setminus L)$ .

Mais l'isomorphisme de la formule (9) entre  $\Gamma(y) \setminus L$  et  $\Gamma(x) \setminus L$  induit une isométrie entre les espaces  $C_n^{(2)}(\Gamma(y) \setminus L)$  et  $C_n^{(2)}(\Gamma(x) \setminus L)$  qui entrelace les projections  $p_n^y$  et  $p_n^x$ . Ainsi,  $p_n^{x_0}(\Gamma(x_0)\gamma s) = p_n^{\gamma^{-1}x_0}(\Gamma(\gamma^{-1}x_0)s)$  et avec  $x_0 = \Lambda \in \Gamma/\Lambda$  et  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_\kappa$  des représentants des classes à gauche de  $\Lambda \setminus \Gamma$ ,

$$\beta_n(\bar{\mathcal{L}}) = \frac{1}{\kappa} \sum_{i=1}^{\kappa} \sum_{s \in \Theta_n} \langle p_n(\Lambda \gamma_i s) | \Lambda \gamma_i s \rangle.$$

Par ailleurs,  $\cup_{i=1}^{\kappa} \gamma_i \Theta_n$  constitue un domaine fondamental pour l'action de  $\Lambda$  sur  $L^n$ . C'est-à-dire,  $\cup_{i=1}^{\kappa} \Lambda \gamma_i \Theta_n = \Lambda \setminus L^n$ , dont les éléments constituent une base de l'espace vectoriel de dimension finie  $C_n^{(2)}(\Lambda \setminus L)$ . Si bien que, avec  $\text{tr}(p_n)$  la trace usuelle de l'opérateur  $p_n$ ,

$$\begin{aligned} \beta_n(X, L, \Gamma) &:= \frac{1}{\kappa} \sum_{i=1}^{\kappa} \sum_{s \in \Theta_n} \langle p_n(\Lambda \gamma_i s) | \Lambda \gamma_i s \rangle \\ &= \frac{1}{\kappa} \text{tr}(p_n) = \frac{1}{\kappa} \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_n^{(2)}(\Gamma(x) \setminus L)) \\ &= \frac{1}{[\Gamma : \Lambda]} b_n(\Lambda \setminus L). \end{aligned}$$

Les “changements de point de vue” évoqués plus haut consistent donc à remplacer le domaine fondamental  $\Theta_n$  par ses divers translatés  $\gamma_i\Theta_n$ . Une autre manière de dire consiste à “oublier le groupe  $\Lambda$ ” : considérons un revêtement fini d’indice  $\kappa$ , non nécessairement galoisien,  $\bar{L} \rightarrow K$ . Choisissons un point base  $\tilde{*}$  dans  $L$ , son image  $*$  dans  $K$  puis ses  $\kappa$  relevés  $\tilde{*}_1, \tilde{*}_2, \dots, \tilde{*}_\kappa$  dans  $\bar{L}$ . Chacun des revêtements pointés  $(L, \tilde{*}) \rightarrow (\bar{L}, \tilde{*}_i)$  nous fournit un sous-groupe  $\Lambda_i$  de  $\Gamma$ . Ils sont deux à deux conjugués. Passer de l’un à l’autre constitue un changement de point de vue.

Nous avons donc démontré :

**Proposition 2.3.** *Si  $(L, \Gamma)$  est une action libre cocompacte sur un complexe simplicial, si  $\Lambda$  est un sous-groupe d’indice fini, et  $X = \Gamma/\Lambda$  est muni de la mesure de comptage normalisée, alors les nombres de Betti  $l^2$  de la lamination  $\mathcal{L}(X, L, \Gamma) = \Gamma \backslash (X \times L)$  coïncident avec les nombres de Betti normalisés :*

$$\beta_n(X, L, \Gamma) = \frac{b_n(\Lambda \backslash L)}{[\Gamma : \Lambda]}.$$

La  $(L, \Gamma)$ -lamination  $\mathcal{L}(X, L, \Gamma)$  n’est constituée que d’une seule feuille isomorphe à  $\Lambda \backslash L$  qui est recouverte par les projections des  $\gamma\Theta_n$  où  $\Theta_n$  est un domaine fondamental pour la  $\Gamma$ -action dans  $L^n$  et  $\gamma$  décrit un système de représentants quelconque des classes à gauche de  $\Gamma$  modulo  $\Lambda$ . De plus, ces nombres de Betti  $l^2$  peuvent se voir comme une moyenne selon les points de vue :

$$\beta_n(X, L, \Gamma) = \frac{1}{[\Gamma : \Lambda]} \sum_{\gamma \in \Lambda \backslash \Gamma} \sum_{s \in \Theta_n} \langle p_n(\Lambda\gamma s) | \Lambda\gamma s \rangle.$$

**Remarque 2.4.** À ce stade, une petite précision s’impose. Si l’on considère un sous-groupe strict  $\Gamma'$  tel que  $\Lambda < \Gamma' < \Gamma$  et l’action restreinte  $(L, \Gamma')$ , alors les nombres de Betti usuels normalisés  $\frac{b_n(\Lambda \backslash L)}{[\Gamma' : \Lambda]}$  ne sont plus les mêmes, tandis que la lamination  $\mathcal{L}(X, L, \Gamma') \simeq \Lambda \backslash L$  est la même en tant qu’espace laminé ! L’explication tient au fait que la suite des nombres de Betti  $l^2$  d’une lamination transversalement mesurée n’est bien définie qu’à une constante multiplicative près qui dépend du choix d’une normalisation de la mesure transverse invariante. Dans notre situation, ce choix est précisé lorsqu’on décide que l’espace  $(X, \mu)$  est un espace de probabilité (voir remarque 2.1).

**2.2.  $(L, \Gamma)$ -lamination associée à une tour de revêtements finis**

On appelle **tour de sous-groupes d’indices finis** de  $\Gamma$  toute suite décroissante  $\Gamma = \Gamma_0 \supset \Gamma_1 \supset \dots \supset \Gamma_m \supset \dots$  de sous-groupes d’indices finis de  $\Gamma$ . Il lui correspond la *tour de revêtements finis* au-dessus de  $\Gamma \backslash L$  :

$$L \rightarrow \dots \rightarrow \Gamma_{i+1} \backslash L \rightarrow \Gamma_i \backslash L \rightarrow \Gamma_{i-1} \backslash L \rightarrow \dots \rightarrow \Gamma_0 \backslash L.$$

Pour tout entier positif  $i$ , on introduit l’espace de probabilité  $(X_i, \mu_i)$  égal à l’ensemble (fini) des classes (à droite)  $\Gamma/\Gamma_i$  de  $\Gamma$  modulo  $\Gamma_i$ , que l’on munit

de la mesure de comptage normalisée. Les applications de réductions successives  $\rho_i : X_i = \Gamma/\Gamma_i \rightarrow X_{i-1} = \Gamma/\Gamma_{i-1}$  permettent de considérer l'espace de probabilité *limite projective*

$$(X, \mu) := \limproj_{i \geq 0} (X_i, \mu_i).$$

C'est un espace borélien standard. On peut le voir comme le bord (à l'infini) d'un arbre enraciné, où les sommets sont les éléments des  $X_i$  et les arêtes données par les applications  $X_{i+1} \rightarrow X_i$ . C'est aussi un espace topologique (homéomorphe à un espace de Cantor, si la suite des indices  $[\Gamma : \Gamma_i]$  tend vers l'infini). L'action naturelle de  $\Gamma$  sur les  $X_i$  fournit une action de  $\Gamma$  sur  $(X, \mu)$ , préservant la mesure  $\mu$ . Cela ne dépend que de la tour.

**Définition 2.5.** L'action diagonale de  $\Gamma$  sur  $X \times L$  donne par passage au quotient la  $(L, \Gamma)$ -lamination associée à la tour  $(\Gamma_i)_{i \in \mathbb{N}}$  :

$$\mathcal{L}(X, L, \Gamma) := \Gamma \backslash (X \times L).$$

Au vu du théorème 3.1, il est important, pour comprendre l'asymptotique des nombres de Betti normalisés d'une tour de revêtements finis, de comprendre l'action de  $\Gamma$  sur l'espace de probabilité  $X$ . On en isole quelques propriétés élémentaires dans la proposition suivante :

**Proposition 2.6.** 1. *Un point  $x \in X$  est une suite  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de classes  $x_i \in \Gamma/\Gamma_i$  telles que  $\rho_i(x_i) = x_{i-1}$ . Si  $\gamma_i$  est un représentant de  $x_i$  dans  $\Gamma$ , alors on obtient pour stabilisateurs  $\Gamma(x_i) = \gamma_i \Gamma_i \gamma_i^{-1}$  et  $\Gamma(x) = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \gamma_i \Gamma_i \gamma_i^{-1}$ .*

2. *Pour tout point  $x \in X$  et pour tout sous-complexe compact  $C$  de  $L$ , il existe un entier  $i_0 \geq 0$  tel que pour tout  $i \geq i_0$ , et tout représentant  $\gamma_i$  de  $x_i$  dans  $\Gamma$  le projeté de  $\gamma_i^{-1} \cdot C$  dans  $\Gamma_i \backslash L$  soit simplicialement équivalent aux projetés de  $C$  dans  $\Gamma(x) \backslash L$  et  $\gamma_i \Gamma_i \gamma_i^{-1} \backslash L$ .*

3. *L'action de  $\Gamma$  étant transitive sur chaque  $X_i$ , on en déduit que l'action de  $\Gamma$  sur  $X$  est ergodique : tout ensemble borélien invariant est de mesure 0 ou 1. En particulier, l'ensemble des points de  $X$  à stabilisateur trivial est de mesure 0 ou 1.*

4. *Pour tout élément  $g$  dans  $\Gamma$ , la mesure dans  $X$  de l'ensemble des points fixes de  $g$  dans  $X$  vaut :*

$$\mu(\text{Fix}_X(g)) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{n_i(g)}{n_i},$$

où  $n_i$  désigne le nombre de sous-groupes de  $\Gamma$  conjugués à  $\Gamma_i$  et  $n_i(g)$  le nombre de sous-groupes de  $\Gamma$  conjugués à  $\Gamma_i$  et contenant  $g$ .

*Démonstration.* Seuls les points 2 et 4 demandent une explication.

Preuve du point 2 : Il n'existe qu'un nombre fini  $g_1, g_2, \dots, g_k$  d'éléments de  $\Gamma$  qui envoient un simplexe de  $C$  dans  $C$ . Pour  $i_0$  assez grand et pour tout  $j = 1, \dots, k$ , on a  $g_j \in \Gamma(x)$  si et seulement si  $g_j \in \Gamma(x_i)$ . Pour tout  $i \geq i_0$ , les projetés de  $C$  dans  $\Gamma(x) \backslash L$  et  $\Gamma(x_i) \backslash L$  sont simplicialement équivalents. L'isomorphisme (9) entre  $\Gamma_i \backslash L$  et  $\Gamma(x_i) \backslash L$  qui envoie  $\Gamma_i \gamma_i^{-1} C$  sur  $\Gamma(x_i) C$  permet de conclure.

Preuve du point 4 : Soit  $f_i(g)$  le nombre de points fixes de l'action de  $g$  sur  $X_i$ . Alors :

$$\frac{f_i(g)}{[\Gamma : \Gamma_i]} = \frac{n_i(g)}{n_i}. \tag{16}$$

En effet, le groupe  $\Gamma$  agit sur  $X_i$  et par conjugaison sur l'ensemble des conjugués de  $\Gamma_i$  dans  $\Gamma$ . L'application

$$p : \begin{cases} X_i \rightarrow \{\text{conjugués de } \Gamma_i \text{ dans } \Gamma\} \\ x \mapsto \text{Fix}_\Gamma(x) \end{cases}$$

est  $\Gamma$ -équivariante pour ces deux actions. Chaque fibre de  $p$  est donc de cardinal

$$a_i = |\{x \in X_i : \text{Fix}_\Gamma(x) = \Gamma_i\}|,$$

égal à l'indice de  $\Gamma_i$  dans son normalisateur  $N_\Gamma(\Gamma_i)$ . Ainsi, avec les notations de la proposition,  $[\Gamma : \Gamma_i] = n_i \times a_i$  et le nombre de points fixes de l'action d'un élément quelconque  $g \in \Gamma$  sur  $X_i$  est égal à  $n_i(g) \times a_i$ . D'où l'on conclut à l'égalité (16).

En passant alors à la limite (la suite  $\frac{f_i(g)}{[\Gamma : \Gamma_i]}$  est décroissante, puisque  $f_{i+1}(g) \leq [\Gamma_i : \Gamma_{i+1}]f_i(g)$ ), on obtient par définition de  $\mu$ , l'égalité annoncée du point 4.

### 3. Asymptotique des nombres de Betti

On peut maintenant énoncer et démontrer le théorème principal de cet article.

Soient  $L$  un complexe simplicial et  $\Gamma$  un groupe agissant librement et cocompactement sur  $L$ . Soit  $(\Gamma_i)_{i \geq 0}$  une tour de sous-groupes d'indices finis dans  $\Gamma$ . Soit  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X, L, \Gamma) := \Gamma \backslash (X \times L)$  la  $(L, \Gamma)$ -lamination associée (déf. 2.5).

**Théorème 3.1.** *Pour chaque entier  $n$ , la suite des nombres de Betti normalisés  $(\frac{b_n(\Gamma_i \backslash L)}{[\Gamma : \Gamma_i]})_{i \in \mathbb{N}}$  converge et sa limite est égale au  $n$ -ème nombre de Betti  $l^2$  de la  $(L, \Gamma)$ -lamination associée :  $\beta_n(X, L, \Gamma)$ .*

*Démonstration.* Fixons un entier  $n$  positif. Soit  $C_n(L)$  l'espace des  $n$ -chaînes entières de  $L$ . C'est un  $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -module finiment engendré, dont la famille  $\Theta_n$  introduite section 1 fournit une base. Soit  $\tilde{\mathbf{u}}$  une application positive autoadjointe des  $n$ -chaînes de  $L$  dans elles-mêmes (on peut penser au laplacien) donnée par une matrice à coefficients dans  $\mathbb{Z}[\Gamma]$  (dont l'action se fait par multiplication à droite). Autrement dit, avec  $\theta_n = |\Theta_n|$  :

$$\tilde{\mathbf{u}} : C_n(L) \rightarrow C_n(L), \quad \tilde{\mathbf{u}} \in \mathbb{Z}[\Gamma] \otimes \text{Mat}(\theta_n \times \theta_n, \mathbb{Z}).$$

Pour que  $\tilde{\mathbf{u}}$  commute avec  $N(\Gamma)$ , il faut y penser comme une matrice agissant par multiplication à droite sur  $\bigoplus_{i=1}^{\theta_n} l^2(\Gamma)$ .

Observons que si  $\Lambda$  est un sous-groupe de  $\Gamma$ , alors  $\tilde{\mathbf{u}}$  induit par passage au quotient un opérateur sur les  $n$ -chaînes entières de  $\Lambda \backslash L$  qui s'étend en un opérateur borné sur les chaînes  $l^2$ .

Pour chaque  $i \geq 0$ , considérons  $X_i = \Gamma/\Gamma_i$  muni de sa mesure de comptage normalisée  $\mu_i$ . Pour chaque  $i \geq 0$  et pour chaque point  $x_i \in X_i$ , l'application  $\tilde{\mathbf{u}}$  induit une application  $\mathbb{C}$ -linéaire  $\mathbf{u}_i^{x_i}$  sur  $C_n(\bar{\mathcal{L}}_{x_i}^i) = C_n^{(2)}(\bar{\mathcal{L}}_{x_i}^i)$ , l'espace des  $n$ -chaînes de la feuille simpliciale  $\bar{\mathcal{L}}_{x_i}^i = \Gamma(x_i)\backslash L$  au-dessus de  $x_i$  dans la  $(L, \Gamma)$ -lamination  $\mathcal{L}^i = \Gamma\backslash(X_i \times L)$  (dans ce cas la lamination  $\mathcal{L}^i$  n'a en fait qu'une feuille). Par intégration contre la mesure  $\mu_i$  on obtient un opérateur  $\mathbf{u}_i$  de  $C_n^{(2)}(\bar{\mathcal{L}}^i)$  dans lui-même.

De même, pour chaque point  $x \in X$ , l'application  $\tilde{\mathbf{u}}$  induit une application  $\mathbb{C}$ -linéaire  $\mathbf{u}^x$  sur  $C_n(\bar{\mathcal{L}}_x)$  qui s'étend en un opérateur borné, encore noté  $\mathbf{u}^x$ , sur  $C_n^{(2)}(\bar{\mathcal{L}}_x)$ , l'espace des  $n$ -chaînes  $l^2$  de la feuille simpliciale  $\bar{\mathcal{L}}_x = \Gamma(x)\backslash L$  au-dessus de  $x$  dans la  $(L, \Gamma)$ -lamination  $\mathcal{L}$ . Par intégration contre la mesure  $\mu$  on obtient un opérateur  $\mathbf{u}$  de  $C_n^{(2)}(\bar{\mathcal{L}})$  dans lui-même.

Soit  $\mathbf{Q}(z)$  un polynôme à coefficients réels. Pour tout  $x \in X, x_i \in X_i$ , on a  $\mathbf{Q}(\mathbf{u})^x = \mathbf{Q}(\mathbf{u}^x)$  et  $\mathbf{Q}(\mathbf{u}_i)^{x_i} = \mathbf{Q}(\mathbf{u}_i^{x_i})$ .

Rappelons que si  $s$  est un simplexe dans  $\Theta_n$  il induit un champ de vecteurs  $\bar{s}$  (resp.  $\bar{s}_i$ ) dans la (resp. les)  $(L, \Gamma)$ -lamination(s)  $\bar{\mathcal{L}}$  (resp.  $\bar{\mathcal{L}}^i$ ) donné par :  $(x \mapsto (x, s))$ .

**Fait 1.** Soit  $x = (x_i)_i$  un point de  $X$ . Pour  $i$  suffisamment grand et  $s \in \Theta_n$ ,

$$\langle \mathbf{Q}(\mathbf{u})^x(\bar{s}(x)) | \bar{s}(x) \rangle = \langle \mathbf{Q}(\mathbf{u}_i)^{x_i}(\bar{s}_i(x_i)) | \bar{s}_i(x_i) \rangle.$$

Les champs mesurables d'opérateurs  $x \mapsto \mathbf{Q}(\mathbf{u})^x$  sur  $\bar{\mathcal{L}}$  (resp.  $x_i \mapsto \mathbf{Q}(\mathbf{u}_i)^{x_i}$  sur  $\bar{\mathcal{L}}^i$ ) ne sont autres que  $x \mapsto \mathbf{Q}(\mathbf{u}^x)$  (resp.  $x_i \mapsto \mathbf{Q}(\mathbf{u}_i^{x_i})$ ). Le fait 1 découle alors simplement des définitions et de la proposition 2.6 (point 2).

La norme d'opérateur de  $\mathbf{u}_i$  est bornée uniformément par rapport à  $i$  par une constante  $N$  (on peut prendre comme valeur pour  $N$  le produit de  $\theta_n$  par la somme des coefficients des éléments de  $\Gamma$  dans la matrice  $\tilde{\mathbf{u}}$ , cf. [Lüc94] Lemma 2.5). Du théorème de convergence dominée de Lebesgue, on déduit donc :

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{\mathcal{M}}(\mathbf{Q}(\mathbf{u})) &= \sum_{s \in \Theta_n} \langle \mathbf{Q}(\mathbf{u})(\bar{s}) | \bar{s} \rangle \\ &= \sum_{s \in \Theta_n} \int_X \langle \mathbf{Q}(\mathbf{u})^x(\bar{s}(x)) | \bar{s}(x) \rangle d\mu(x) \\ &= \sum_{s \in \Theta_n} \int_X \lim_{i \rightarrow +\infty} \langle \mathbf{Q}(\mathbf{u}_i)^{x_i}(\bar{s}_i(x_i)) | \bar{s}_i(x_i) \rangle d\mu(x) \\ &= \sum_{s \in \Theta_n} \lim_{i \rightarrow +\infty} \int_X \langle \mathbf{Q}(\mathbf{u}_i)^{x_i}(\bar{s}_i(x_i)) | \bar{s}_i(x_i) \rangle d\mu(x) \\ &= \lim_{i \rightarrow +\infty} \sum_{s \in \Theta_n} \int_{X_i} \langle \mathbf{Q}(\mathbf{u}_i)^{x_i}(\bar{s}_i(x_i)) | \bar{s}_i(x_i) \rangle d\mu_i(x_i) \end{aligned}$$

$$= \lim_{i \rightarrow +\infty} \sum_{s \in \Theta_n} \langle \mathbf{Q}(\mathbf{u}_i)(\bar{s}_i) | \bar{s}_i \rangle.$$

Autrement dit :

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{M}}(\mathbf{Q}(\mathbf{u})) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \mathrm{Tr}_{\mathcal{M}_i}(\mathbf{Q}(\mathbf{u}_i)), \quad (17)$$

où  $\mathcal{M}_i$  est l'algèbre de von Neumann de la relation d'équivalence sur  $X_i$  engendrée par l'action transitive de  $\Gamma$ , *i.e.*  $\mathcal{M}_i$  est l'algèbre des matrices  $|X_i| \times |X_i|$ , munie de la trace normalisée  $\mathrm{Tr}_{\mathcal{M}_i}$ , qui est la trace usuelle divisée par  $|X_i|$ .

Soit maintenant  $\{P(\lambda)/\lambda \in [0, N]\}$  la famille spectrale continue à droite de  $\mathbf{u}$ . Notons

$$F : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}_+; \lambda \mapsto \mathrm{Tr}_{\mathcal{M}}(P(\lambda)).$$

**Fait 2.** Soit  $\mathbf{Q}_k$  une suite de polynômes réels qui, sur l'intervalle  $[0, N]$ , converge simplement vers la fonction caractéristique  $\chi_{[0, \lambda]}$  de  $[0, \lambda]$  et reste uniformément bornée sur  $[0, N]$ . Alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathrm{Tr}_{\mathcal{M}}(\mathbf{Q}_k(\mathbf{u})) = F(\lambda).$$

En effet, toujours à l'aide du théorème de convergence dominée de Lebesgue et des propriétés standard des traces (de von Neumann) on a :

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathrm{Tr}_{\mathcal{M}}(\mathbf{Q}_k(\mathbf{u})) &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathrm{Tr}_{\mathcal{M}} \left( \int_0^N \mathbf{Q}_k(\lambda) dP(\lambda) \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^N \mathbf{Q}_k(\lambda) dF(\lambda) \\ &= \int_0^N \left( \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{Q}_k(\lambda) \right) dF(\lambda) \\ &= \int_0^N \chi_{[0, \lambda]} dF(\lambda) \\ &= F(\lambda). \end{aligned}$$

Fixons un réel  $\lambda > 0$ . Pour tout  $k \geq 1$ , soit

$$f_k : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ \eta \mapsto \begin{cases} 1 + \frac{1}{k} & \text{si } \eta \leq \lambda \\ 1 + \frac{1}{k} - k(\eta - \lambda) & \text{si } \lambda \leq \eta \leq \lambda + \frac{1}{k} \\ \frac{1}{k} & \text{si } \lambda + \frac{1}{k} \leq \eta. \end{cases} \end{cases}$$

On a  $\chi_{[0, \lambda]}(\eta) < f_{k+1}(\eta) < f_k(\eta)$  et  $f_k$  converge simplement vers  $\chi_{[0, \lambda]}$  sur  $[0, +\infty[$ . Pour chaque  $k$ , choisissons un polynôme  $\mathbf{Q}_k$  tel que  $\chi_{[0, \lambda]}(\eta) < \mathbf{Q}_k(\eta) < f_k(\eta)$  pour tout  $\eta \in [0, N]$ . Soit  $E_i(\lambda)$  l'ensemble ordonné des valeurs propres  $\eta$  de  $\mathbf{u}_i$  inférieures à  $\lambda$  et comptées avec multiplicités.



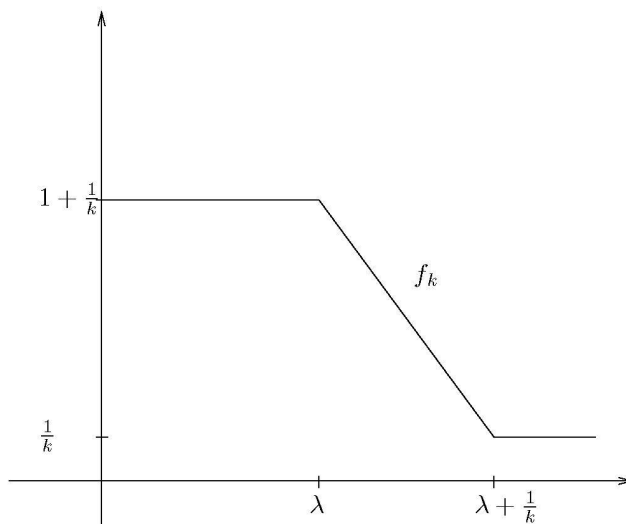


Figure 1. La fonction  $f_k$

**Fait 3.**

$$\frac{|E_i(\lambda)|}{[\Gamma : \Gamma_i]} \leq \text{Tr}_{\mathcal{M}_i}(\mathbf{Q}_k(\mathbf{u}_i)) \leq \frac{|E_i(\lambda + \frac{1}{k})|}{[\Gamma : \Gamma_i]} + \frac{\theta_n}{k}.$$

En effet :

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{\mathcal{M}_i}(\mathbf{Q}_k(\mathbf{u}_i)) &= \frac{1}{[\Gamma : \Gamma_i]} \text{Tr}_{\mathbb{C}}(\mathbf{Q}_k(\mathbf{u}_i)) \\ &= \frac{1}{[\Gamma : \Gamma_i]} \sum_{\eta \in E_i(N)} \mathbf{Q}_k(\eta). \end{aligned}$$

Et on conclut alors grâce à un petit calcul, cf. [Lüc94] pp. 468–469.

Comme dans la démonstration du théorème de Lück, le lemme “clef” de la preuve du théorème est :

**Lemme de Lück** [Lüc94]. *Soit  $g : V \rightarrow W$  une application linéaire entre deux espaces de Hilbert de dimensions finies. Soit  $p(t) = \det(tid - gg^*)$  le polynôme caractéristique de  $gg^*$ . On écrit  $p(t) = t^k q(t)$  où  $q$  est un polynôme ne s’annulant pas en zéro. Soit  $A$  un réel supérieur à 1 tel que  $A \geq \|g\|^2$  et soit  $C$  un nombre*

réel positif tel que  $C \leq |q(0)|$ . Soit  $E(\lambda)$  l'ensemble des valeurs propres  $\eta$  de  $gg^*$  vérifiant  $\eta \leq \lambda$  et comptées avec multiplicités. Alors pour  $0 < \lambda < 1$  :

$$\frac{|E(\lambda)| - |E(0)|}{\dim_{\mathbb{C}}(V)} \leq \frac{-\log(C)}{\dim_{\mathbb{C}}(V)(-\log(\lambda))} + \frac{\log(A)}{-\log(\lambda)}.$$

Soit  $\varepsilon$  un réel strictement positif.

Dor evant  $\tilde{\mathbf{u}}$  est le laplacien  $\Delta = \partial_{n+1}\partial_{n+1}^* + \partial_n^*\partial_n$ . On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{b_n(\Gamma_i \setminus L)}{[\Gamma : \Gamma_i]} - \beta_n(\bar{\mathcal{L}}) &= \beta_n(\bar{\mathcal{L}}^i) - \beta_n(\bar{\mathcal{L}}) \\ &= \frac{|E_i(0)|}{[\Gamma : \Gamma_i]} - \beta_n(\bar{\mathcal{L}}) \\ &= \left( \frac{|E_i(0)|}{[\Gamma : \Gamma_i]} - \frac{|E_i(\lambda)|}{[\Gamma : \Gamma_i]} \right) + \left( \frac{|E_i(\lambda)|}{[\Gamma : \Gamma_i]} - \text{Tr}_{\mathcal{M}_i}(\mathbf{Q}_k(\Delta_i)) \right) \\ &\quad + (\text{Tr}_{\mathcal{M}_i}(\mathbf{Q}_k(\Delta_i)) - \text{Tr}_{\mathcal{M}}(\mathbf{Q}_k(\Delta))) \\ &\quad + (\text{Tr}_{\mathcal{M}}(\mathbf{Q}_k(\Delta)) - F(\lambda)) + (F(\lambda) - \beta_n(\bar{\mathcal{L}})). \end{aligned}$$

Pour alléger les notations on notera ces cinq parenthèses :  $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_5$ .

Puisque la famille spectrale  $\{P(\lambda)/\lambda \in [0, N]\}$  est continue à droite, la fonction  $F$  l'est aussi. Or, puisque  $\tilde{\mathbf{u}}$  désigne dor evant le laplacien,  $F(0) = \beta_n(\bar{\mathcal{L}})$ . On peut donc supposer que  $\lambda$  est suffisamment petit pour que  $|\Pi_5| \leq \frac{\varepsilon}{5}$ .

On peut appliquer le lemme de Lück en prenant  $g = \Delta_n$ . Puisque  $\Delta_n$  est défini sur  $\mathbb{Z}$ , la constante  $C$  peut être prise égale à 1 (un entier strictement positif est toujours supérieur ou égal à 1). La conclusion du lemme de Lück s'écrit alors (avec  $\dim_{\mathbb{C}}(C_n^{(2)}(\bar{\mathcal{L}}^i)) = \theta_n[\Gamma : \Gamma_i]$ ) :

$$\frac{|E_i(\lambda) - E_i(0)|}{[\Gamma : \Gamma_i]} \leq \frac{2\theta_n \log(N)}{-\log(\lambda)},$$

si  $\lambda < 1$ . Donc quitte à diminuer  $\lambda$ , on peut supposer que  $|\Pi_1| \leq \frac{\varepsilon}{5}$ .

D'après le fait 2, on peut alors choisir  $k$  de manière à ce que  $|\Pi_4| \leq \frac{\varepsilon}{5}$ .

En passant à la limite en  $i$  et pour  $k$  fixé dans l'inégalité du fait 3, à l'aide de (17), on obtient :

$$\overline{\lim}_{i \rightarrow +\infty} \frac{|E_i(\lambda)|}{[\Gamma : \Gamma_i]} \leq \text{Tr}(\mathbf{Q}_k(\Delta)) \leq \underline{\lim}_{i \rightarrow +\infty} \frac{|E_i(\lambda + \frac{1}{k})|}{[\Gamma : \Gamma_i]} + \frac{\theta_n}{k},$$

pour tout entier  $k$  strictement positif. En particulier, en passant cette fois à la limite en  $k$  à l'aide du fait 2, pour tout  $\eta > 0$  :

$$F(\lambda) \leq \underline{\lim}_{i \rightarrow +\infty} \frac{|E_i(\lambda + \eta)|}{[\Gamma : \Gamma_i]} \leq \overline{\lim}_{i \rightarrow +\infty} \frac{|E_i(\lambda + \eta)|}{[\Gamma : \Gamma_i]} \leq F(\lambda + \eta).$$

Ainsi la continuité à droite de  $F$  permet de conclure que quitte à augmenter  $k$ , il existe un entier  $i_0$  positif tel que pour tout  $i \geq i_0$ ,  $|\Pi_2| \leq \frac{\varepsilon}{5}$ .

Enfin d'après (17), quitte à augmenter  $i_0$ , on peut supposer que pour tout  $i \geq i_0$ ,  $|\Pi_3| \leq \frac{\varepsilon}{5}$ .

Finalement on obtient que pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier positif  $i_0$  tel que pour tout  $i \geq i_0$ ,

$$|\beta_n(\bar{L}) - \frac{b_n(\Gamma_i \setminus L)}{[\Gamma : \Gamma_i]}| \leq \varepsilon.$$

Ce qui achève la démonstration du théorème 3.1.

#### 4. Une famille d'exemples

Soient  $A$  et  $B$  deux complexes simpliciaux compacts, de points base respectifs des sommets  $*^A$  et  $*^B$ . Soit  $K$  le complexe simplicial compact obtenu en ajoutant à la réunion disjointe de  $A$  et  $B$  un simplexe  $a$  de dimension 1 en attachant ses extrémités à  $*^A$  et  $*^B$ . On prend comme point base de  $K$  le point  $*$  milieu de  $a$ .

Soient  $\Gamma^A := \pi_1(A, *^A)$  et  $\Gamma^B := \pi_1(B, *^B)$  les groupes fondamentaux de  $A$  et  $B$ , soit  $\Gamma := \pi_1(K, *) = \Gamma^A * \Gamma^B$  celui de  $K$  et soit  $L$  le revêtement universel de  $K$ , avec un point base  $\tilde{*}$  qui relève  $*$ .

**Théorème 4.1.** *Supposons que les groupes fondamentaux  $\Gamma^A$  et  $\Gamma^B$  sont infinis et résiduellement finis.*

*Alors pour tout  $\mu_0 \in [0, 1[$ , il existe une tour décroissante de sous-groupes  $(\Gamma_i)_{i \in \mathbb{N}}$  d'indices finis dans  $\Gamma$ , telle que*

1.  $\Gamma_{i+1}$  est normal dans  $\Gamma_i$
2.  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \Gamma_i = \{e\}$
3.  $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{b_n(\Gamma_i \setminus L)}{[\Gamma : \Gamma_i]} = \mu_0 b_n(A) + (1 - \mu_0) b_n^{(2)}(\tilde{A}, \Gamma^A) + b_n^{(2)}(\tilde{B}, \Gamma^B)$ , pour  $n \geq 2$
4.  $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{b_1(\Gamma_i \setminus L)}{[\Gamma : \Gamma_i]} = \mu_0 b_1(A) + (1 - \mu_0) b_1^{(2)}(\tilde{A}, \Gamma^A) + b_1^{(2)}(\tilde{B}, \Gamma^B) + (1 - \mu_0)$ .

*De plus, dans l'action limite (projective)  $(X, \mu, \Gamma)$ ,*

5. *il existe un borélien  $X_0$  de mesure  $\mu_0$  tel que l'ensemble des points fixes de tout  $g \in \Gamma^A \setminus \{e\}$  soit exactement  $X_0$ ,*
6. *le fixateur de  $\mu$ -presque tout point de  $X$  est un produit libre de conjugués de  $\Gamma^A$ .*

L'énoncé du théorème 0.1 est une spécialisation de celui-ci, avec  $B \simeq \mathbb{T}^1$ . Dans ce cas on pourra noter que la preuve se simplifie à plusieurs endroits.

On se donne une tour de sous-groupes normaux d'indices finis et d'intersection triviale  $(\bar{\Gamma}_i^A)_{i \in \mathbb{N}}$  (resp.  $(\bar{\Gamma}_i^B)_{i \in \mathbb{N}}$ ) de  $\Gamma^A$  (resp.  $\Gamma^B$ ).

On va construire par récurrence une suite  $(\Gamma_i^A)_{i \in \mathbb{N}}$  (resp.  $(\Gamma_i^B)_{i \in \mathbb{N}}$ ) telle que

**Condition  $C_1^i$ .** *chaque  $\Gamma_i^A$  (resp.  $\Gamma_i^B$ ) est l'un des sous-groupes  $\bar{\Gamma}_j^A$  (resp.  $\bar{\Gamma}_j^B$ ) et  $\Gamma_i^A$  (resp.  $\Gamma_i^B$ ) est un sous-groupe strict de  $\Gamma_{i-4}^A$  (resp.  $\Gamma_{i-4}^B$ ).*

On appellera  $A_i \rightarrow A$  (resp.  $B_i \rightarrow B$ ) les revêtements galoisiens correspondants

et  $a_i := [\Gamma^A : \Gamma_i^A]$  (resp.  $b_i := [\Gamma^B : \Gamma_i^B]$ ) leurs indices. On aura encore  $\cap_{i \in \mathbb{N}} \Gamma_i^A = \{e\}$ ,  $\cap_{i \in \mathbb{N}} \Gamma_i^B = \{e\}$  et  $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = \lim_{i \rightarrow \infty} b_i = \infty$ .

On va construire par récurrence des revêtements finis  $p_i : K_i \rightarrow K$  d'indices  $\kappa_i$ . Chaque  $K_i$  sera un *graphe d'espaces*, constitué de  $\kappa_i$  *arêtes* : les relevés de  $a$ , et d'un certain nombre de *sommets* : les composantes connexes de  $p_i^{-1}(A \amalg B)$  auxquels on imposera les *types* suivants :

**Condition  $\mathbf{C}_2^i$ .**  $p_i^{-1}(A)$  est constitué de  $r_i$  sommets isomorphes à  $A$  et de  $s_i$  sommets isomorphes à  $A_i$ ;  $p_i^{-1}(B)$  est constitué de  $t_i$  sommets isomorphes à  $B_i$ .

L'indice du revêtement vérifie alors

$$\kappa_i = r_i + s_i a_i = t_i b_i.$$

Notons qu'alors le graphe  $\mathcal{G}_i$  obtenu en écrasant en un point chaque composante connexe (=sommets) de  $p_i^{-1}(A \amalg B)$  est connexe et possède  $r_i + s_i + t_i$  sommets et  $\kappa_i$  arêtes. Une application de la suite longue exacte de Mayer-Vietoris permet alors de calculer :

$$\begin{aligned} b_n(K_i) &= r_i b_n(A) + s_i b_n(A_i) + t_i b_n(B_i) \quad (n \geq 2) \\ b_1(K_i) &= r_i b_1(A) + s_i b_1(A_i) + t_i b_1(B_i) + (1 - (r_i + s_i + t_i) + \kappa_i) \\ b_0(K_i) &= 1. \end{aligned}$$

On va faire en sorte que  $\frac{r_i}{\kappa_i} \rightarrow \mu_0$  en décroissant lorsque  $i \rightarrow \infty$ , alors  $\frac{s_i b_n(A_i)}{\kappa_i} = \frac{(\kappa_i - r_i) b_n(A_i)}{a_i \kappa_i} = \left( \frac{\kappa_i - r_i}{\kappa_i} \right) \frac{b_n(A_i)}{a_i} \rightarrow (1 - \mu_0) b_n^{(2)}(\tilde{A}, \Gamma^A)$ , par application du théorème de Lück. De même,  $\frac{t_i b_n(B_i)}{\kappa_i} = \frac{t_i b_n(B_i)}{t_i b_i} \rightarrow b_n^{(2)}(\tilde{B}, \Gamma^B)$ . Et enfin,  $\frac{(1 - (r_i + s_i + t_i) + \kappa_i)}{\kappa_i} \rightarrow (-\mu_0 + 1)$ . Cela permettra d'assurer les points 3. et 4. de l'énoncé du théorème.

**Fait 1.** On choisit dans chaque revêtement  $A_i$  un point base  $*_i^A$  qui relève  $*_{i-1}^A$  et pour les autres relevés de  $*_{i-1}^A$ , on choisit un chemin le reliant à  $*_i^A$ . On fait de même pour les revêtements  $B_i$ . On choisit aussi un arbre maximal dans  $\mathcal{G}_i$ . Le groupe  $\Gamma_i = \pi_1(K_i, *_i)$  s'écrit alors naturellement comme produit libre des groupes fondamentaux des composantes connexes de  $p_i^{-1}(A \amalg B)$  et du groupe fondamental  $\pi_1(\mathcal{G}_i, *_i)$  du graphe  $\mathcal{G}_i$ . Il est donc formé comme produit libre d'un certain nombre de groupes qu'on range en 4 types :

- (1)  $t_i$  fois  $\pi_1(B_i, *_i^B) \simeq \Gamma_i^B$
- (2) un groupe libre  $\pi_1(\mathcal{G}_i, *_i) = \mathbf{F}_i$  de rang  $(1 - (r_i + s_i + t_i) + \kappa_i)$
- (3)  $r_i$  fois  $\pi_1(A, *_i^A) \simeq \Gamma^A$
- (0)  $s_i$  fois  $\pi_1(A_i, *_i^A) \simeq \Gamma_i^A$ .

**Construction basique.** Le complexe  $K_{i+1}$  sera alors construit à partir de  $K_i$  par le procédé suivant :

On va choisir un certain nombre  $u_i$  de facteurs de type  $m$  ( $m = 1, 2, 3$  ou  $0$ ) dans la décomposition en produit libre de  $\pi_1(K_i, *_i)$ . L'isomorphisme qu'ils entretiennent chacun avec  $G_i := \Gamma_i^B, \mathbf{F}_i, \Gamma^A$  ou  $\Gamma_i^A$  (selon que  $m = 1, 2, 3$  ou  $0$ )

s'étend (trivialement sur les autres facteurs) en un homomorphisme surjectif  $h_i : \pi_1(K_i, *_{i+1}) = \Gamma_i \rightarrow G_i$ . On choisira alors un certain sous-groupe normal d'indice fini  $G'_i$  de  $G_i$ . Il définit par image inverse un sous-groupe normal d'indice fini  $\Gamma_{i+1}$  de  $\Gamma_i$  et un revêtement galoisien associé  $K_{i+1} \rightarrow K_i$ . La préimage dans  $K_{i+1}$  de chaque partie de  $K_i$  associée à un des facteurs choisis est alors un revêtement (connexe) d'indice  $[G_i : G'_i]$ , tandis que la préimage de chaque partie associée à un autre facteur est constituée de  $[G_i : G'_i]$  composantes connexes. L'espace  $K_{i+1}$  vient avec un point base  $*_{i+1}$  qui relève  $*_i$ . L'indice du revêtement (non galoisien)  $K_{i+1} \rightarrow K_i$  est donné par  $\kappa_{i+1} = [G_i : G'_i]\kappa_i$ .

Il reste à expliciter les conditions qui président à ces choix. On peut suivre les premières étapes sur la figure 2.

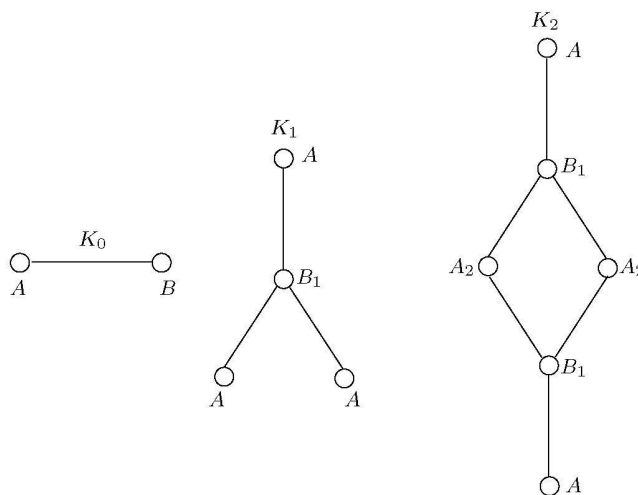


Figure 2. Amorce de la récurrence

- Pour  $i = 0$ , le complexe  $K_0 = K$  a deux sommets  $A$  et  $B$ . On choisit le facteur de type (1) pour obtenir l'homomorphisme  $h_0 : \Gamma_0 := \pi_1(K_0, *) \rightarrow \Gamma_0^B = \Gamma^B$ . On choisit un sous-groupe de la tour  $(\Gamma_j^B)$  strictement plus petit qu'on notera  $\Gamma_1^B$ , d'indice  $b_1$  dans  $\Gamma^B$  tel que

$$(1 - \mu_0)b_1 > 2. \tag{18}$$

Alors  $\kappa_1 = b_1$ , le complexe  $K_1$  a  $r_1 = \kappa_1$  sommets de type  $A$  chacun relié par une arête à l'unique sommet de type  $B_1 = \Gamma_1^B \setminus \tilde{B}$ . Le graphe  $\mathcal{G}_1$  est un arbre avec un sommet de valence  $\kappa_1$  et  $\kappa_1$  sommets terminaux.

- Pour  $i = 1$ , on choisit un certain nombre  $u_1$  de sommets de type  $A$ , *i.e.* de groupes de type (3) dans la décomposition en produit libre de  $\pi_1(K_1, *_{1+1})$ , avec

$\mu_0 < \frac{r_1 - u_1}{\kappa_1} \leq \mu_0 + \frac{1}{\kappa_1}$ , pour obtenir l'homomorphisme  $h_1 : \Gamma_1 := \pi_1(K_1, *_1) \rightarrow \Gamma_1^A = \Gamma^A$ . La condition (18) assure que  $u_1 \geq 2$ . On choisit n'importe quel sous-groupe qu'on appellera  $\Gamma_2^A$  de la tour  $(\overline{\Gamma}_j^A)$  contenu strictement dans  $\Gamma^A$ . Son indice est appelé  $a_2$ . Alors  $K_2$  est un revêtement d'indice  $\kappa_2 = \kappa_1 a_2$  comportant  $t_2 = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}$  sommets de type  $B_2 = B_1$ ,  $s_2 = u_1$  sommets de type  $A_2 = \Gamma_2^A \setminus \tilde{A}$  et  $r_2 = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}(r_1 - u_1)$  sommets de type  $A$ . On voit que la condition sur  $u_1$  assure  $\frac{r_2}{\kappa_2} > \mu_0$ . Un calcul immédiat montre que le rang du groupe libre  $\pi_1(\mathcal{G}_2, *_2)$  vaut  $(u_1 - 1)(a_2 - 1)$ . Les conditions imposées entraînent donc qu'il n'est pas trivial, et à partir de maintenant, aucun des  $\mathcal{G}_i$  ne sera un arbre.

- Après cette mise en jambes et maintenant que la récurrence est amorcée, supposons que la construction ait été avancée jusqu'à l'étape  $i \geq 2$ , satisfaisant aux conditions  $C_1^i, C_2^i$  et **Condition  $C_3^i$**  :  $\frac{r_i}{\kappa_i} > \mu_0$ . On décrit selon la congruence  $m = 2, 3, 0, 1$  de  $i$  modulo 4 les choix effectués dans la construction basique afin de construire  $K_{i+1}$  à partir de  $K_i$ .

- Pour  $i = 4j + 2$  ( $m = 2$ ). On considère le graphe  $\mathcal{G}_i$  et son groupe fondamental (non trivial), le facteur de type 2 dans la décomposition en produit libre de  $\pi_1(K_i, *_i)$ , pour obtenir l'homomorphisme  $h_i : \pi_1(K_i, *_i) \rightarrow \mathbf{F}_i$ . Le graphe  $\mathcal{G}_i$  possède un revêtement galoisien fini  $\overline{\mathcal{G}}_{i+1}$  d'indice  $J_i$  où aucun des lacets (en nombre fini) de longueur  $\leq 2i + 1$  de  $\mathcal{G}_i$  ne se relève en un lacet, avec de plus la condition suivante sur  $J_i$  :

$$b_i \frac{(b_i a_i)^{i+1} - 1}{(b_i a_i) - 1} < (r_i - \kappa_i \mu_0) J_i. \tag{19}$$

Le revêtement  $K_{i+1} \rightarrow K_i$  est alors défini à l'aide du sous-groupe normal de  $\mathbf{F}_i$  correspondant. Il est d'indice  $J_i$  et sa décomposition en graphe d'espaces fait apparaître des sommets de type  $A$ ,  $A_{i+1} := A_i$  et  $B_{i+1} := B_i$  en nombres  $r_{i+1} = J_i r_i$ ,  $s_{i+1} = J_i s_i$ ,  $t_{i+1} = J_i t_i$ . Les sous-groupes doivent donc valoir  $\Gamma_{i+1}^A = \Gamma_i^A$  et  $\Gamma_{i+1}^B = \Gamma_i^B$ . Le graphe  $\mathcal{G}_{i+1}$  est précisément  $\overline{\mathcal{G}}_{i+1}$ , qu'on vient de considérer.

**Fait 2.** Le graphe  $\mathcal{G}_{i+1}$  (obtenu lors de cette étape) ne comporte aucun lacet de longueur  $\leq 2i + 1$ .

- Pour  $i = 4j + 3$  ( $m = 3$ ). Parmi les  $r_i$  copies de  $A$  dans  $K_i$ , on en choisit une quantité  $u_i$ , avec  $(r_i - \kappa_i \mu_0) - 1 \leq u_i < (r_i - \kappa_i \mu_0)$ , en prenant en particulier toutes celles dont la distance au point base  $*_i$  est  $\leq 2i - 1$ . C'est possible car la mystérieuse quantité à gauche dans l'inégalité (19) donne un majorant grossier du nombre de sommets à distance  $\leq 2i - 1 = 2(4j + 2) + 1$  du point base  $*_{4j+3}$ , tandis que la quantité de droite coïncide avec la nouvelle valeur de  $(r_i - \kappa_i \mu_0)$  (vu le décalage des indices). On obtient alors l'homomorphisme  $h_i : \pi_1(K_i, *_i) \rightarrow \Gamma^A$ , construit à l'aide des  $u_i$  facteurs du produit libre, associés à ces copies de  $A$  et on choisit comme sous-groupe normal dans  $\Gamma^A$ , le sous-groupe  $\Gamma_i^A$ . Les espaces sommets de  $K_{i+1}$  sont donc de type  $A$ ,  $A_{i+1} = A_i$  et  $B_{i+1} = B_i$ .

**Fait 3.** Dans  $K_{i+1}$  et dans tous les revêtements postérieurs  $K_l$ ,  $l > i + 1$ , aucun

des sommets à distance  $\leq 2i - 1$  du point base ne sera donc de type  $A$ .

**Fait 4.** La condition imposée sur le nombre  $u_i$  donne alors

$$\mu_0 < \frac{r_{i+1}}{\kappa_{i+1}} = \frac{r_i - u_i}{\kappa_i} \leq \mu_0 + \frac{1}{\kappa_i}$$

et permettra d'assurer la convergence de la suite  $(\frac{r_i}{\kappa_i})$  vers  $\mu_0$ .

- Pour  $i = 4j + 4$  ( $m = 0$ ). On choisit toutes les copies de  $A_i$  pour obtenir l'homomorphisme  $h_i : \pi_1(K_i, *_{i}) \rightarrow \Gamma_i^A$  et un sous-groupe  $\Gamma_{i+1}^A$  de la tour  $(\overline{\Gamma}_j^A)$  strictement contenu dans  $\Gamma_i^A$ . Cela permet de définir  $K_{i+1}$ . La proportion  $\frac{r_{i+1}}{\kappa_{i+1}} = \frac{r_i}{\kappa_i}$  reste inchangée.
- De même, pour  $i = 4j + 5$  ( $m = 1$ ). On choisit toutes les copies de  $B_i$  pour obtenir l'homomorphisme  $h_i : \pi_1(K_i, *_{i}) \rightarrow \Gamma_i^B$  et un sous-groupe  $\Gamma_{i+1}^B$  de la tour  $(\overline{\Gamma}_j^B)$  strictement contenu dans  $\Gamma_i^B$ . Cela permet de définir  $K_{i+1}$ . La proportion  $\frac{r_{i+1}}{\kappa_{i+1}} = \frac{r_i}{\kappa_i}$  reste inchangée.

Les conditions  $C_1^{i+1}$ ,  $C_2^{i+1}$  et  $C_3^{i+1}$  sont immédiatement vérifiées à chaque étape. Fin de la récurrence. Les points 1., 3. et 4. de l'énoncé du théorème sont aussi démontrés.

**Fait 5.** Un point base  $*_i$  étant choisi dans  $K_i$ , au-dessus de  $*$ , le groupe fondamental  $\pi_1(K_i, *_{i})$  est un sous-groupe  $\Gamma_i$  de  $\pi_1(K, *)$ . Les autres relevés de  $*$  dans  $K_i$  sont alors associés bijectivement aux classes à droite de  $\Gamma/\Gamma_i$ . Un élément  $\gamma \in \Gamma$  fixe une telle classe (dans l'action à gauche sur  $\Gamma/\Gamma_i$ ) si et seulement si un (tout) lacet représentant  $\gamma$  dans  $(K, *)$  se relève en un lacet à partir de ce relevé.

Tout lacet dans  $A$  (resp.  $B$ ) s'ouvre pour  $i$  assez grand lorsqu'on le relève dans  $A_i$  (resp.  $B_i$ ).

Ainsi, par exemple, un élément  $g$  de  $\Gamma^A \setminus \{e\} \subset \Gamma = \Gamma^A * \Gamma^B$  est représenté par un lacet dans  $K_0 = K$  constitué du chemin  $c$  de  $*$  à  $*^A$ , suivi d'un lacet  $\tau$  dans  $A$  puis  $c^{-1}$ . Il fixe donc une classe de  $\Gamma/\Gamma_i$  associé au relevé  $*'_i$  de  $*$  dans  $K_i$  si et seulement si le relevé de  $c$  à partir de  $*'_i$  aboutit à une composante connexe de  $p_i^{-1}(A)$  où le lacet  $\tau$  se relève en un lacet. Et donc pour  $i$  assez grand, si et seulement si ce relevé de  $c$  aboutit à l'un des  $r_i$  sommets de  $K_i$  de type  $A$ . La convergence  $\frac{r_i}{\kappa_i} \rightarrow \mu_0$  entraîne alors le point 5. de l'énoncé, avec  $X_0$  le borélien de la limite projective associé aux suites de points  $*'_i$  qui vérifient cette condition.

Soit  $x$  un point de la limite projective  $X$ . C'est une suite  $x = (*'_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de sommets  $*'_i$  de  $K_i$ , chacun relevant le précédent dans la tour  $K_{i+1} \rightarrow K_i \rightarrow K_{i-1}$ . Il est stabilisé par le groupe  $\text{Stab}(x) := \cap_{i \in \mathbb{N}} \pi_1(K_i, *'_i)$ . L'espace  $L_x := \text{Stab}(x) \backslash L$  basé en l'image  $*_x$  de  $*$  vient avec les revêtements  $f_{i,x} : L_x \rightarrow K_i = \pi_1(K_i, *'_i) \backslash L$ , qui envoient  $*_x$  sur  $*'_i$  et qui coïncident avec la composition  $f_{i,x} : L_x \xrightarrow{f_{i+1,x}} K_{i+1} \rightarrow K_i$ . C'est un graphe d'espaces (infini).

En restriction à une composante connexe de  $f_{0,x}^{-1}(B)$ , chaque  $f_{i,x}$  définit un revêtement de l'un des sommets de type  $B_i$  dans  $K_i$ . On en déduit que ces com-

posantes connexes sont donc simplement connexes et s'identifient à  $\tilde{B}$ . De même, si une composante connexe de  $f_{0,x}^{-1}(A)$  revêt via  $f_{i,x}$ , pour un certain  $i \geq 2$ , l'un des sommets de type  $A_i$ , alors elle est simplement connexe et s'identifie à  $\tilde{A}$ . Sinon (elle ne revêt que des  $A$ ) elle s'identifie à  $A$ . Les sommets du graphe d'espaces  $L_x$  sont donc de type  $A$ ,  $\tilde{A}$  ou  $\tilde{B}$ .

Considérons maintenant le graphe  $\mathcal{G}_{\infty,x}$  obtenu en écrasant en un point chacune des composantes connexes de  $f_{0,x}^{-1}(A \coprod B)$ . Si  $\tau$  est un lacet de  $L_x$  qui se projette dans  $\mathcal{G}_{\infty,x}$  en un lacet sans aller-retour  $\tau'$ , alors il n'emprunte aucun sommets de type  $A$  (les sommets de type  $A$  sont en effet terminaux : une seule arête y est attachée). On en déduit que pour  $i \geq i_0$  assez grand il se projette dans  $K_i$  puis  $\mathcal{G}_i$  en un lacet isomorphe à  $\tau'$ . Mais il existe un nombre infini de valeurs de  $i$  (grâce au fait 2) pour lesquelles  $\mathcal{G}_{i+1}$  ne comporte aucun lacet de longueur  $\leq 2i + 1$ . On en déduit que  $\tau'$  est le lacet trivial et  $\mathcal{G}_{\infty,x}$  est un arbre.

Ainsi  $L_x$  est un arbre d'espaces dont les sommets ont été décrits. Son groupe fondamental  $\pi_1(L_x, *x) = \text{Stab}(x)$ , comme sous-groupe de  $\pi_1(K, *)$ , est un produit libre de conjugués de  $\pi_1(A, *^A)$ . Cela montre le point 6. du théorème.

Il reste à montrer que  $\cap_{i \in \mathbb{N}} \Gamma_i = \{e\}$ , *i.e.* que le stabilisateur du point  $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , associé à la suite de points base particuliers  $*_i$ , est trivial. On raffine l'argument précédent en ajoutant, à l'aide du fait (2), que pour  $i$  assez grand, aucun des sommets à distance donnée  $\leq l$  du point base  $*_i$  dans  $K_i$  n'est de type  $A$ . Ainsi, aucun des sommets de  $L_x$  ne peut être de type  $A$  et  $\pi_1(L_x, *x) = \text{Stab}(x)$  est le groupe trivial.

## 5. Actions boréliennes non nécessairement libres

Dans cette section, on considère un espace borélien standard de probabilité sans atome,  $(X, \mu)$  et une action mesurable préservant  $\mu$  d'un groupe  $\Gamma$  dénombrable.

Un exemple particulier d'action non libre de  $\Gamma$  est donné par une action libre préservant  $\mu$  d'un groupe quotient  $\Gamma/\Lambda$  sur  $(X, \mu)$ , où  $\Lambda$  est un sous-groupe normal de  $\Gamma$ . Tous les points de  $X$  ont le même stabilisateur  $\Lambda$ .

On peut constater assez rapidement par des méthodes classiques que des conditions de finitudes imposées aux stabilisateurs ont des conséquences importantes : si les stabilisateurs sont de type fini, alors on se trouve essentiellement à indice fini près dans le cas de l'exemple particulier. En effet :

**Théorème 5.1.** *Si l'action de  $\Gamma$  est ergodique et les stabilisateurs de points sont de type fini, alors  $X$  possède une partition finie  $X = \coprod_{i \in I} X_i$  et  $\Gamma$  un sous-groupe normal d'indice fini  $\Gamma'$  tels que*

- presque tous les  $x \in X_i$  ont le même stabilisateur  $\Gamma_i$ , lequel n'a donc qu'un nombre fini de conjugués
- pour tout  $i \in I$ ,  $\Gamma' X_i = X_i$
- les actions de  $\Gamma'$  sur les divers  $X_i$  sont deux à deux conjuguées par des



isomorphismes préservant la mesure  $\mu$ .

– l'action de  $\Gamma'$  sur  $X_i$  possède pour noyau un sous-groupe  $\Gamma'_i$  qui est d'indice fini dans  $\Gamma_i$  et l'action de  $\Gamma'/\Gamma'_i$  est libre.

*Démonstration.* Soit  $SGTF(\Gamma)$  l'ensemble des sous-groupes de type fini de  $\Gamma$  muni de l'action par conjugaison de  $\Gamma$ . C'est un ensemble dénombrable. L'application  $\Gamma(\cdot) : X \rightarrow SGTF(\Gamma)$ ,  $x \mapsto \Gamma(x)$  est mesurable et  $\Gamma$ -équivariante. La mesure image  $\Gamma(\cdot)_*\mu$  étant ergodique et invariante, elle charge seulement une  $\Gamma$ -orbite finie  $\{\Gamma_i : i \in I\}$  et le noyau de l'action de  $\Gamma$  sur cette orbite est un sous-groupe normal d'indice fini  $\Gamma'$ . La partition finie (à un ensemble de mesure nulle près) de  $X$  est obtenue par image inverse. Tout  $x \in X_i$  a pour stabilisateur le sous-groupe  $\Gamma_i$  et  $\Gamma'_i := \Gamma' \cap \Gamma_i$  est le noyau de l'action de  $\Gamma'$  sur  $X_i$ . C'est un sous-groupe d'indice fini dans  $\Gamma_i$ . Observons qu'il est donc aussi de type fini. Pour tout  $j \in I$ , il existe un  $\gamma \in \Gamma$  tel que  $\gamma X_i = X_j$  qui fournit la conjugaison recherchée entre les diverses actions de  $\Gamma'$ .

**Corollaire 5.2.** *Si  $\Gamma$  est un groupe libre, si l'action est ergodique et si les stabilisateurs de points sont de type fini, alors l'action est libre.*

*Démonstration du corollaire.* En effet, chaque  $\Gamma'_i$  est un sous-groupe normal de type fini du groupe libre  $\Gamma'$ . S'il était d'indice fini, les  $\Gamma$ -orbites des points de  $X$  seraient finies. Le théorème de O. Schreier rappelé en introduction permet de conclure que  $\Gamma'_i$  est le groupe trivial.

Plus généralement, en utilisant le théorème 6.8 de [Gab01] également rappelé dans l'introduction, on obtient :

**Corollaire 5.3.** *Si l'action de  $\Gamma$  est ergodique, si les stabilisateurs de points sont de type fini, et si de plus  $b_1^{(2)}(\Gamma) \neq 0$ , alors pour presque tout  $x \in X$ , le stabilisateur  $\Gamma(x)$  est fini.*

*Démonstration du corollaire.* En effet, le sous-groupe d'indice fini  $\Gamma'$  vérifie aussi  $b_1^{(2)}(\Gamma') \neq 0$ . Chaque sous-groupe normal  $\Gamma'_i$  est de type fini. Il n'est pas d'indice fini dans  $\Gamma'$  sinon les orbites seraient finies. Alors par [Gab01, th. 6.8],  $\Gamma'_i$  est fini. Enfin, pour tout  $x \in X_i$ ,  $\Gamma'_i$  est d'indice fini dans  $\Gamma(x)$ .

Il nous semble intéressant et conforme à l'introduction de donner aussi une preuve "géométrique" du corollaire 5.2. Soit  $(L, *)$  un arbre simplicial pointé sur lequel le groupe libre  $\Gamma$  agit librement. Considérons la  $(L, \Gamma)$ -lamination  $\mathcal{L} := \Gamma \backslash (X \times L)$  et le plongement  $\bar{X}$  de  $X$  comme transversale induit par  $X \times \{*\}$ . Pour tout  $x \in X \simeq \bar{X}$ , la feuille  $\mathcal{L}_x$  est exactement  $\Gamma(x) \backslash L$ . Si  $\Gamma(x)$  est de type fini, alors cette feuille de la lamination a un cœur compact (le plus petit sous-graphe connexe contenant toute la topologie), dont l'intersection avec  $\bar{X}$  est formée d'un nombre fini de points. Si tous les  $\Gamma(x)$  sont de type fini, on est ainsi en mesure de

choisir un nombre fini de points dans chaque orbite, et cette construction est assez clairement mesurable. Cela n'est possible que si les orbites de l'action sont finies.

Plus généralement encore (en effet  $\Lambda$  de type fini entraîne  $b_1^{(2)}(\Lambda)$  fini), voici le résultat que nous obtenons :

**Théorème 5.4.** *Soit  $(X, \mu, \Gamma)$  une action ergodique, préservant la mesure, d'un groupe dénombrable  $\Gamma$  sur un borélien standard de probabilité sans atome. Si  $b_1^{(2)}(\Gamma) \neq 0$ , alors*

- *ou bien  $\Gamma(x)$ , le stabilisateur de  $x$  dans  $\Gamma$ , est un groupe fini pour  $\mu$ -presque tout  $x \in X$  (et alors le théorème 5.1 s'applique);*
- *ou bien le premier nombre de Betti  $l^2$ ,  $b_1^{(2)}(\Gamma(x))$ , est infini pour  $\mu$ -presque tout  $x \in X$ .*

**Corollaire 5.5.** *Si  $(X, \mu, \Gamma)$  est une action ergodique, préservant la mesure, d'un groupe dénombrable  $\Gamma$  tel que  $b_1^{(2)}(\Gamma) \neq 0$ , et si les stabilisateurs sont moyennables, ou s'ils ont la propriété (T) de Kazhdan, alors ils sont presque tous finis.*

En effet, dans les deux cas, le premier nombre de Betti  $l^2$  des stabilisateurs est nul [CG86]. On peut également dire que les groupes possédant la propriété (T) de Kazhdan sont de type fini.

Concernant les nombres de Betti  $l^2$  de dimension supérieure, nous montrons aussi :

**Théorème 5.6.** *Soit  $(X, \mu, \Gamma)$  une action ergodique hyperfinie, préservant la mesure, d'un groupe dénombrable  $\Gamma$  sur un borélien standard de probabilité sans atome. Si pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ , le  $n$ -ème nombre de Betti  $l^2$  de presque tout stabilisateur est fini ( $b_n^{(2)}(\Gamma(x)) < \infty$   $\mu$ -p.s), alors  $b_n^{(2)}(\Gamma) = 0$ .*

Comme nous l'avons annoncé dans l'introduction, pour démontrer les théorèmes 5.4 et 5.6, nous serons amenés à prouver le résultat suivant :

**Théorème 5.7.** *Soit  $(X, \mu, \Gamma)$  une action préservant la mesure d'un groupe dénombrable  $\Gamma$  sur un borélien standard de probabilité sans atome. Alors, la fonction  $X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ ,  $x \mapsto b_n^{(2)}(\Gamma(x))$ , qui associe à  $x$  le  $n$ -ème nombre de Betti  $l^2$  de son stabilisateur, est mesurable. En particulier, si l'action de  $\Gamma$  est ergodique, alors cette fonction est presque sûrement constante.*

On repousse à la fin de cette section la preuve un peu technique de cet énoncé

### 5.1. Démonstration des théorèmes 5.4 et 5.6

Commençons par "libérer" l'action de  $\Gamma$  en lui associant une action libre. Soit  $X'$  un borélien standard muni d'une mesure de probabilité  $\mu'$  et sur lequel  $\Gamma$  agit librement. Alors, l'action diagonale  $\gamma.(x', x) = (\gamma.x', \gamma.x)$  de  $\Gamma$  sur  $Z = X' \times X$  est libre et préserve la probabilité produit  $\nu$ . Soient  $\mathcal{R}^Z$  et  $\mathcal{R}^X$  les relations produites

par  $\Gamma$  sur  $(Z, \nu)$  et  $\Gamma$  sur  $(X, \mu)$ . Appelons  $\pi$  la projection de  $Z$  sur  $X$  et  $\pi_1$  la projection de  $\mathcal{R}^Z$  dans  $\mathcal{R}^X$  :

$$((x', x), (\gamma.x', \gamma.x)) \mapsto (x, \gamma.x).$$

Notons  $\mathcal{T}^Z$  l'image inverse par  $\pi_1$  de la relation triviale sur  $X$  (celle où les classes sont les singletons). Deux points  $(x', x)$  et  $(y', y)$  dans  $Z = X' \times X$  sont  $\mathcal{T}^Z$ -équivalents si et seulement s'il existe un élément  $\gamma \in \Gamma(x)$  tel que  $(y', y) = \gamma.(x', x)$ . C'est-à-dire, les fibres de  $\pi$  sont  $\mathcal{T}^Z$ -invariantes et la restriction  $\mathcal{T}^Z_x$  de  $\mathcal{T}^Z$  à la fibre  $X' \times \{x\}$  de  $x$ , munie de la mesure  $\mu'$  est donnée par une action libre préservant la mesure de  $\Gamma(x)$ .

Par hypothèse, la relation  $\mathcal{R}^X$  est à classes infinies.

**Fait.** La relation  $\mathcal{R}^X$  contient une sous-relation hyperfinie  $\mathcal{H}^X$  à classes infinies (consulter par exemple [Gab00, prop. III.3]).

Soit  $\mathcal{H}^Z := \pi_1^{-1}(\mathcal{H}^X)$  sa préimage dans  $Z$ . Elle contient  $\mathcal{T}^Z$ .

**Lemme 5.8.** *Si pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ , les  $b_n^{(2)}(\Gamma(x))$  sont presque tous finis égaux à  $b$ , alors  $\beta_n(\mathcal{H}^Z, \nu) = 0$ .*

*Démonstration.* La relation  $\mathcal{H}^X$  étant hyperfinie, elle s'écrit comme réunion croissante d'une suite de relations  $\mathcal{H}_i^X$  à orbites finies, qui possèdent un domaine fondamental borélien  $X_i \subset X$ . Définissons par préimage le borélien  $Z_i := \pi^{-1}(X_i) \subset Z$  et la relation  $\mathcal{H}_i^Z := \pi_1^{-1}(\mathcal{H}_i^X)$ .

Puisque  $Z_i$  rencontre toutes les orbites de la relation  $\mathcal{H}_i^Z$  (et  $\nu(\pi^{-1}(X_i)) = \mu(X_i)$ ) alors, le corollaire 5.5 de [Gab01] assure que

$$\beta_n(\mathcal{H}_i^Z, \nu) = \mu(X_i)\beta_n(\mathcal{H}_i^Z|_{Z_i}, \bar{\nu}_i), \tag{20}$$

où  $\bar{\nu}_i$  est la restriction de  $\nu$  à  $Z_i$  renormalisée en une mesure de probabilité, et  $\mathcal{H}_i^Z|_{Z_i}$  la restriction de  $\mathcal{H}_i^Z$  à  $Z_i$ .

Puisque la restriction de  $\mathcal{H}_i^X$  à  $X_i$  est la relation triviale, alors la restriction  $\mathcal{H}_i^Z|_{Z_i}$  coïncide avec la restriction de  $\mathcal{T}^Z$  à  $Z_i$ . C'est-à-dire,  $\mathcal{H}_i^Z|_{Z_i}$  fixe chaque fibre  $\pi^{-1}(x)$  et y est donnée par une action libre d'un groupe (à savoir  $\Gamma(x)$ ) dont le  $n$ -ème nombre de Betti  $l^2$  est égal à  $b$ .

On en déduit que  $\beta_n(\mathcal{H}_i^Z|_{Z_i}, \bar{\nu}_i) = b$  et donc que le membre de gauche de l'égalité (20) tend comme  $\mu(X_i)$  vers 0 lorsque  $i$  tend vers l'infini. Mais  $\mathcal{H}^Z$  étant la réunion croissante des  $\mathcal{H}_i^Z$ , le corollaire 5.13 de [Gab01] assure que

$$\beta_n(\mathcal{H}^Z, \nu) \leq \liminf \beta_n(\mathcal{H}_i^Z, \nu).$$

Ce qui démontre le lemme.

Le théorème 5.6 s'en déduit puisque dans ce cas, on peut prendre  $\mathcal{H}^X = \mathcal{R}^X$  et donc  $\mathcal{H}^Z = \mathcal{R}^Z$ . Le lemme s'applique par ergodicité de  $\mathcal{R}^X$  et par le théorème 5.7.

Pour démontrer le théorème 5.4, travaillons par contraposition et supposons (en utilisant l'ergodicité de l'action de  $\Gamma$  sur  $X$  et le théorème 5.7) que :

1. le groupe  $\Gamma(x)$  est infini pour  $\mu$ -presque tout  $x$  dans  $X$  et,
2. le premier nombre de Betti  $b_1^{(2)}(\Gamma(x)) = b$ , est fini pour  $\mu$ -presque tout  $x$ .

Soit  $\varepsilon$  un réel strictement positif. Nous allons montrer que  $b_1^{(2)}(\Gamma) < \varepsilon$ .

Tout d'abord, l'image inverse  $T^Z$  par  $\pi_1$  de la relation triviale sur  $X$  a presque toute ses orbites infinies (puisque  $\Gamma(x)$  est infini  $\mu$ -p.s.). La proposition 1 de [Lev95] implique qu'il existe une suite  $(Z_j)_{j \in \mathbb{N}}$  de boréliens de  $Z$  qui sont de mesures  $\leq \frac{\varepsilon}{2j+1}$  et qui chacun rencontre presque toutes les  $T^Z$ -classes.

Soit  $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_j, \dots)$  une famille génératrice de  $\Gamma$ . On définit des isomorphismes boréliens partiels  $\varphi_j$  comme restriction de  $\gamma_j$  à  $Z_j$ .

**Fait.** La plus petite relation d'équivalence contenant  $T^Z$  et les graphes des  $\varphi_j$  est égale à  $\mathcal{R}^Z$ , i.e.  $\mathcal{R}^Z$  est la plus petite relation d'équivalence pour laquelle  $zT^Z z' \Rightarrow z \sim z'$  et  $z \in Z_j \Rightarrow z \sim \varphi_j(z)$ . Autrement dit, avec la terminologie de [Gab00, Gab01],  $\mathcal{R}^Z$  peut être engendrée à partir de  $T^Z$  en ajoutant le graphage  $\Phi = (\varphi_j)_j$ .

Clairement,  $T^Z \vee \Phi \subset \mathcal{R}^Z$ . Pour l'inclusion inverse, il suffit de montrer que  $(z, \gamma_j.z) \in (T^Z \vee \Phi)$ , pour tout  $\gamma_j$  et pour (presque tout)  $z = (x', x) \in Z$ . Il existe  $g \in \Gamma(x)$  qui envoie  $z$  dans  $Z_j$  et  $g' := \gamma_j g^{-1} \gamma_j^{-1}$  appartient à  $\Gamma(\gamma_j.x)$ . Les points suivants sont  $(T^Z \vee \Phi)$ -équivalents :  $z$  et  $g.z$  grâce à  $T^Z$ ,  $g.z$  et  $\gamma_j g.z$  grâce à  $\Phi$  et  $\gamma_j g.z$  et  $g' \gamma_j g.z = \gamma_j.z$  grâce à  $T^Z$ . Cela démontre le fait.

Soit maintenant  $\Sigma$  un  $\mathcal{H}^Z$ -complexe simplicial simplement connexe (chaque  $\Sigma_z$  est simplement connexe), d'ensemble de sommets  $\Sigma^0 \simeq \mathcal{H}^Z$  et soit  $\mathcal{L}_1 := \mathcal{H}^Z \setminus \Sigma$  la structure simpliciale sur  $\mathcal{H}^Z$  associée (cf. [Gab01, sect. 2.2.3]). L'image de la diagonale de  $\mathcal{H}^Z \simeq \Sigma^0$  induit un plongement (encore noté  $Z$ ) de  $Z$  comme transversale totale dans  $\mathcal{L}_1$ . Maintenant, puisque  $\mathcal{H}^Z \subset \mathcal{R}^Z$ , la structure simpliciale  $\mathcal{L}_1$  sur  $\mathcal{H}^Z$  peut aussi être considérée comme une structure simpliciale  $\mathcal{L}_2$  sur  $\mathcal{R}^Z$ . Dans ce cas, les feuilles de  $\mathcal{L}_2$  sont des réunions de feuilles de  $\mathcal{L}_1$ . Elle ne sont plus connexes : la feuille  $\mathcal{L}_2[z]$  de  $z \in Z$  est la réunion des feuilles de  $\mathcal{L}_1$  qui sur la transversale  $Z$  rencontrent la  $\mathcal{R}^Z$ -orbite de  $z$ . Les formules suivantes s'obtiennent par la formule de réciprocity, [Gab01, sect. 5.2], par définition ([Gab01, Th. 3.13, Déf. 3.14]) et grâce au lemme 5.8,

$$\begin{aligned} \beta_1(\mathcal{L}_2, \mathcal{R}^Z) &= \beta_1(\mathcal{L}_1, \mathcal{H}^Z) \\ &= \beta_1(\mathcal{H}^Z) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Soit enfin  $\mathcal{L}_3$  la structure simpliciale sur  $\mathcal{R}^Z$  obtenue à l'aide de cylindres  $Z_j \times [0, 1]$  feuilletés par  $\{z\} \times [0, 1]$  recollés sur  $\mathcal{L}_2$  par  $Z_j \times \{0\} \sim Z_j$  via l'identité et  $Z_j \times \{1\} \sim \varphi_j(Z_j)$  via  $\varphi_j$ . Stricto sensu, pour éviter des arêtes doubles et obtenir des complexes simpliciaux, on peut être amené à restreindre encore les  $\varphi_j$  à une

partie de leur domaine. On obtient aisément :

$$\begin{aligned}\beta_1(\mathcal{L}_3, \mathcal{R}^Z) &\leq \beta_1(\mathcal{L}_2, \mathcal{R}^Z) + \sum \nu(Z_j) \\ &\leq 0 + \varepsilon.\end{aligned}$$

Le fait ci-dessus montre que les feuilles de cette structure simpliciale sur  $\mathcal{R}^Z$  sont connexes. Par ailleurs,  $\mathcal{R}^Z$  est donnée par une action libre de  $\Gamma$ , alors

$$\begin{aligned}\beta_1(\Gamma) &= \beta_1(\mathcal{R}^Z) \\ &\leq \beta_1(\mathcal{L}_3, \mathcal{R}^Z).\end{aligned}$$

Ce qui démontre l'inégalité annoncée (pour tout  $\varepsilon$ ) donc le théorème 5.4.

## 5.2. Démonstration du théorème 5.7

Notons  $\mathcal{T}$  la relation  $\mathcal{T}^Z$  sur  $(Z, \nu)$  de la section précédente. Rappelons qu'elle fixe les fibres de  $\pi$  et notons  $\mathcal{T}_x$  la restriction de  $\mathcal{T}$  à la  $\pi$ -fibre  $X' \times \{x\}$ . L'algèbre  $L^\infty(X, \mu)$  se plonge naturellement dans le centre de l'algèbre de von Neumann  $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}$  de  $\mathcal{T}$ , laquelle peut alors se décomposer sous la forme  $\mathcal{M}_{\mathcal{T}} = \int_X \mathcal{M}_{\mathcal{T}_x} d\mu(x)$  et sa trace  $\text{Tr}_{\mathcal{T}} = \int_X \text{Tr}_{\mathcal{T}_x} d\mu(x)$ .

Si  $H$  est un  $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}$ -module de Hilbert, et  $p$  un projecteur orthogonal de  $H$  qui commute avec  $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}$ , alors ils sont décomposables sous la forme  $H = \int_X^\oplus H_x d\mu(x)$  et  $p = \int_X^\oplus p_x d\mu(x)$ , où  $x \mapsto H_x$  est un champ mesurable d'espaces de Hilbert, pour  $\mu$ -presque tout  $x \in X$ ,  $H_x$  est un  $\mathcal{M}_{\mathcal{T}_x}$ -module de Hilbert,  $x \mapsto p_x$  est un champ mesurable de projecteurs orthogonaux et  $p_x$  commute avec  $\mathcal{M}_{\mathcal{T}_x}$ . On en déduit que la fonction  $x \mapsto \text{Tr}_{\mathcal{T}_x}(p_x)$ , ou autrement dit  $x \mapsto \dim_{\mathcal{T}_x}(\text{Im}(p_x))$  est mesurable.

Soit  $\Sigma$  un  $\mathcal{T}$ -complexe simplicial contractile et  $(\Sigma_t)_{t \in \mathbb{N}}$  une suite croissante exhaustive de sous- $\mathcal{T}$ -complexes uniformément localement bornés (ULB) (cf. [Gab01, sect. 2]). Pour  $\mu$ -presque tout  $x \in X$ , par restriction à  $X' \times \{x\}$ , le complexe  $\Sigma$  fournit un  $\mathcal{T}_x$ -complexe simplicial contractile  $\Sigma_x$  et les complexes  $\Sigma_t$  fournissent une suite croissante de  $\mathcal{T}_x$ -complexes simpliciaux ULB  $(\Sigma_{t,x})$  exhaustive de  $\Sigma_x$ .

Si  $U^{s,t}$  désigne (pour  $s \leq t$ ) l'adhérence de l'image du morphisme naturel de  $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}$ -modules de Hilbert  $\overline{H}_n^{(2)}(\Sigma_s, \mathcal{T}, \nu) \rightarrow \overline{H}_n^{(2)}(\Sigma_t, \mathcal{T}, \nu)$ , alors ces données sont décomposables suivant  $X$  et la fonction  $x \mapsto \dim_{\mathcal{T}_x}(U_x^{s,t})$  est mesurable. La fonction  $f : x \mapsto \sup_s \inf_{t \geq s} \lim_{t \rightarrow \infty} \dim_{\mathcal{T}_x}(U_x^{s,t})$  l'est aussi. Maintenant, pour presque tout  $x \in X$ ,  $f(x)$  coïncide avec le  $n$ -ème nombre de Betti  $l^2$  du  $\mathcal{T}_x$ -complexe simplicial  $\Sigma_x : f(x) = \beta_n(\Sigma_x, \mathcal{T}_x, \mu')$  (cf. [Gab01, sect. 3], en particulier, prop. 3.9, th. 3.13 et déf. 3.14).

Mais puisque  $\mathcal{T}_x$  est donnée par une action libre de  $\Gamma(x)$ , alors par [Gab01, cor. 3.16],  $\mu$ -presque sûrement,  $f(x) = b_n^{(2)}(\Gamma(x))$  (dans les notations de [Gab01], il s'agit de  $\beta_n(\Gamma(x))$ ).

## Références

- [Ati76] M. Atiyah, Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras, in : *Colloque "Analyse et Topologie" en l'Honneur de Henri Cartan (Orsay, 1974)*, pages 43–72. *Astérisque, SMF*, No. 32–33. Soc. Math. France, Paris, 1976.
- [CG86] J. Cheeger and M. Gromov,  $L_2$ -cohomology and group cohomology, *Topology* **25**(2) (1986), 189–215.
- [CFW81] A. Connes, J. Feldman and B. Weiss, An amenable equivalence relation is generated by a single transformation, *Ergodic Theory Dynamical Systems* **1**(4) (1982), 431–450.
- [Co79] A. Connes, Sur la théorie non commutative de l'intégration, in : *Algèbres d'opérateurs (Sém., Les Plans-sur-Bex, 1978)*, pages 19–143. Lect. Notes 725. Springer, Berlin, 1979.
- [Eck45] B. Eckmann, Harmonische Funktionen und Randwertaufgaben in einem Komplex. *Comment. Math. Helv.* **17** (1945), 240–255.
- [Eck49] B. Eckmann, Coverings and Betti numbers, *Bull. Amer. Math. Soc.* **55** (1949), 95–101.
- [Eck00] B. Eckmann, Introduction to  $l_2$ -methods in topology : reduced  $l_2$ -homology, harmonic chains,  $l_2$ -Betti numbers, *Israel J. Math.* **117** (2000), 183–219. Notes prepared by Guido Mislin.
- [Far98] M. Farber, Geometry of growth : approximation theorems for  $L^2$ -invariants, *Math. Ann.* **311**(2) (1998), 335–375.
- [FM77] J. Feldman and C. Moore, Ergodic equivalence relations, cohomology and von Neumann algebras. I and II, *Trans. Amer. Math. Soc.* **234** (1977), 289–324, 325–359.
- [Gab00] D. Gaboriau. Coût de relations d'équivalence et des groupes, *Invent. Math.* **139** (1) (2000), 41–98.
- [Gab01] D. Gaboriau, Invariants  $L^2$  de relations d'équivalence et de groupes, *Publ. math. Inst. Hautes Étud. Sci.* **95**(1) (2002), 93–150.
- [Ghy95] É. Ghys, Topologie des feuilles génériques, *Ann. of Math.* **141**(2) (1995), 387–422.
- [Gro91] M. Gromov, Asymptotic invariants of infinite groups, in : *Geometric group theory, Vol. 2 (Sussex, 1991)*, pages 1–295, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
- [Kaz75] D. A. Kajdan, On arithmetic varieties, in : *Lie groups and their representations (Proc. Summer School, Bolyai János Math. Soc., Budapest, 1971)*, 151–217, Halsted, New York, 1975.
- [Lev95] G. Levitt, On the cost of generating an equivalence relation, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **15**(6) (1995), 1173–1181.
- [Lüc94] W. Lück, Approximating  $L^2$ -invariants by their finite-dimensional analogues, *Geom. Funct. Anal.* **4**(4) (1994), 455–481.
- [Lüc98a] W. Lück, Dimension theory of arbitrary modules over finite von Neumann algebras and  $L^2$ -Betti numbers. I. Foundations, *J. Reine Angew. Math.* **495** (1998), 135–162.
- [Lüc98b] W. Lück, Dimension theory of arbitrary modules over finite von Neumann algebras and  $L^2$ -Betti numbers. II. Applications to Grothendieck groups,  $L^2$ -Euler characteristics and Burnside groups, *J. Reine Angew. Math.* **496** (1998), 213–236.
- [Mum79] D. Mumford, An algebraic surface with  $K$  ample,  $(K^2) = 9$ ,  $p_g = q = 0$ , *Amer. J. Math.* **1** (1979), 233–244.
- [Sch27] O. Schreier, Die Untergruppen der freien Gruppen, *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, **5** (1927), 161–183.

N. Bergeron  
Unité Mixte de Recherche 8628  
du C. N. R. S.  
Bât. 425  
Université Paris-Sud Orsay  
F-91405 Orsay cedex  
France  
e-mail : Nicolas.Bergeron@math.u-psud.fr

D. Gaboriau  
Unité de Mathématiques  
Pures et Appliquées (UMPA)  
Unité Mixte de Recherche 5669  
du C. N. R. S.  
46, allée d'Italie  
F-69364 Lyon cedex 07  
France  
e-mail : damien.gaboriau@umpa.ens-lyon.fr  
[http ://www.umpa.ens-lyon.fr/~gaboriau/](http://www.umpa.ens-lyon.fr/~gaboriau/)

(Received: December 20, 2002)



To access this journal online:  
<http://www.birkhauser.ch>

---