Difféomorphismes holomorphes Anosov

Autor(en): **Cantat, Serge**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **79 (2004)**

PDF erstellt am: **16.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-59530

Comment. Math. Helv. 79 (2004) 779–797
0010-2571/04/040779-19
DOI 10.1007/s00014-004-0811-3

Commentarii Mathematici Helvetici

Difféomorphismes holomorphes Anosov

Serge Cantat

Abstract. We classify the holomorphic diffeomorphisms of complex projective varieties with an Anosov dynamics and holomorphic stable and unstable foliations : The variety is finitely covered by a compact complex torus and the diffeomorphism corresponds to a linear transformation of this torus.

Mathematics Subject Classification (2000). 58F15, 58F18, 32L30, 32Q57.

Keywords. Anosov diffeomorphisms, holomorphic foliations, Calabi–Yau manifolds, rational connectedness.

1. Introduction

1.1. Dynamique holomorphe

Par définition, un *automorphisme* d'une variété complexe M est un difféomorphisme holomorphe de M. Lorsque M est compacte, le groupe formé par ses automorphismes est un groupe de Lie complexe de dimension finie noté $\mathrm{Aut}\,(M)$. Certaines variétés projectives admettent des automorphismes dont la dynamique est très riche. Par exemple, si l'on choisit une sextique du plan projectif avec dix points doubles, la surface obtenue en éclatant ces dix points est munie d'un automorphisme qui possède une infinité de points périodiques et dont l'entropie topologique est strictement positive ([16], [7]). Cette remarque appelle deux questions naturelles : un tel exemple d'automorphisme étant donné, peut-on décrire avec précision sa dynamique ? Peut-on classer les variétés projectives qui sont le siège d'une dynamique chaotique ?

Dans ce texte, nous abordons un problème classique qui se situe à la frontière des deux questions précédentes. Il s'agit de classer les automorphismes des variétés projectives complexes dont la dynamique est de type Anosov. Cet article poursuit donc l'étude amorcée par É. Ghys dans [15].

1.2. Automorphismes Anosov

Avant de présenter les résultats principaux, rappelons ce qu'est un difféomorphisme Anosov. Soit M une variété compacte munie d'une métrique riemannienne. Un difféomorphisme $f : M \to M$ est de type Anosov s'il existe deux sous-fibrés E^+ et E^- du fibré tangent TM et deux constantes strictement positives c et χ tels que

(i) TM est la somme directe de E^+ et E^- ;

(ii) E^+ et E^- sont invariants sous l'action de f ;

(iii) pour tout entier relatif n, pour tout vecteur v^+ de E^+ et tout vecteur v^- de E^-,

$$\| df^n(v^+) \| \leq c \| v^+ \| \exp(n\chi)$$

$$\| df^n(v^-) \| \leq c \| v^- \| \exp(-n\chi).$$

Sous ces hypothèses, les deux champs de plans déterminés par E^+ et E^- sont continus et intégrables : ils déterminent deux feuilletages continus de M, le feuilletage instable $\mathcal{F}^+$ et le feuilletage stable $\mathcal{F}^-$. En général, $\mathcal{F}^+$ et $\mathcal{F}^-$ ne sont pas différentiables, même lorsque le difféomorphisme f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, mais leurs feuilles le sont.

Remarque 1.1. Si f préserve une structure complexe j, E^+ et E^- sont j-invariants et les feuilles de $\mathcal{F}^+$ et $\mathcal{F}^-$ sont donc holomorphes. A priori, la structure transverse de $\mathcal{F}^+$ et $\mathcal{F}^-$ est seulement continue, toutefois nous ne connaissons aucun exemple d'automorphisme sur une variété complexe compacte qui soit de type Anosov et dont les feuilletages stable et instable ne soient pas holomorphes.

Nous utiliserons le vocabulaire suivant : si $\mathcal{F}$ est un feuilletage continu d'une variété complexe M dont les feuilles sont holomorphes, la *dimension de* $\mathcal{F}$ est la dimension complexe de ses feuilles. Un automorphisme Anosov est *de codimension 1* si $\mathcal{F}^+$ ou $\mathcal{F}^-$ est de dimension 1.

Lorsque f est un difféomorphisme Anosov d'une variété compacte M, et lorsque $\mathcal{F}^+$ est un feuilletage par courbes, le feuilletage $\mathcal{F}^-$ est continuement différentiable (*cf.* [17]). Cette propriété s'étend aux automorphismes Anosov des variétés complexes compactes et l'on peut même remplacer *continuement différentiable* par *holomorphe* :

Proposition 1.2 (Ghys, [15]). *Soit f un automorphisme Anosov d'une variété complexe compacte M. Si $\mathcal{F}^+$ est de dimension* 1, *alors $\mathcal{F}^-$ est un feuilletage holomorphe. En particulier, si M est une surface, alors $\mathcal{F}^+$ et $\mathcal{F}^-$ sont holomorphes.*

1.3. Énoncés

Une conjecture célèbre de S. Smale affirme que toute variété compacte possédant un difféomorphisme de type Anosov est une infra-nilvariété, c'est-à-dire qu'après un revêtement fini la variété est le quotient d'un groupe de Lie nilpotent par un réseau cocompact. De nombreux résultats sont disponibles si l'on fait des hypothèses de régularité sur les feuilletages stable et instable du difféomorphisme Anosov ([13], [14], [2], [3]). En ce qui concerne les automorphismes, on dispose du très joli résultat suivant.

Theorem 1.3 (Ghys, [15]). *Soit M une variété complexe compacte et f un automorphisme de M.*

(a) *Si f est un automorphisme Anosov de codimension* 1 *qui a une orbite dense, alors M est homéomorphe à un tore et f est topologiquement conjugué à un difféomorphisme linéaire de ce tore.*

(b) *Si M est une surface, et si f est Anosov, alors M est un tore complexe et f en est un automorphisme linéaire.*

La preuve de ce théorème repose sur les propriétés transverses du feuilletage de codimension 1 : c'est un feuilletage holomorphe transversalement projectif (*cf.* [15] et le paragraphe 5.1). Le but du présent article est d'obtenir un résultat analogue en supposant d'entrée de jeu que les feuilletages stable et instable sont holomorphes, mais sans faire d'hypothèse sur la codimension des feuilletages ou la transitivité topologique de la dynamique. Par contre, nous supposerons que M est projective.

Theorem 1.4. *Soient M une variété projective complexe et f un automorphisme de M de type Anosov.*

(a) *Si les feuilletages stable et instable de f sont holomorphes, alors M est revêtue par un tore et f provient d'un automorphisme linéaire de ce tore.*

(b) *Si f est un automorphisme Anosov de codimension* 1, *alors M est un tore et f est linéaire.*

Exemple 1.5. Soient $\Lambda = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}\alpha$ un réseau cocompact de la droite complexe, A le tore $\mathbf{C}^2/\Lambda^2$ et τ le point de A associé au point $(1/2, 1/2)$ de $\mathbf{C}^2$. La transformation linéaire $(x, y) \mapsto (3x + 2y, 2x + y)$ préserve le réseau Λ^2 et induit donc un automorphisme Anosov de A. Nous noterons f l'automorphisme Anosov obtenu en faisant agir cette transformation diagonalement sur $A \times A$. Soit j l'automorphisme d'ordre 2 de $A \times A$ défini par

$$j(a, b) = (a + \tau, -b).$$

Les automorphismes f et j commutent et l'automorphisme induit par f sur $(A \times A)/j$ est un automorphisme Anosov d'une variété projective qui n'est pas un tore.

Remarque 1.6. (i) La conclusion du théorème 1.4 est plus forte que la conjecture de Smale puisque la variété M est revêtue par un tore. Ceci résulte de la remarque suivante : soient N un groupe de Lie complexe connexe et Γ un réseau cocompact de N, alors N/Γ est kählérienne si et seulement si N est abélien ; dans ce cas N/Γ est un tore.

Dans le même ordre d'idée, si M est une variété complexe compacte kählérienne dont le groupe fondamental est nilpotent sans être virtuellement abélien il est facile de déduire de [5] qu'aucun automorphisme de M n'est Anosov.

(ii) Puisque toute variété compacte kählérienne homéomorphe à un tore est un tore complexe, la seconde affirmation du théorème 1.4 est une faible généralisation du théorème de Ghys.

Remarque 1.7. Dans [15], Ghys étudie aussi les actions holomorphes de $\mathbf{C}^*$ qui sont de type Anosov (les fibrés stable et instable forts sont en somme directe avec le champ de droites complexes tangent au flot) : ces actions y sont complètement classées pour les variétés de dimension 3.

Sur une variété kählérienne, un théorème de M. Gromov montre que tout automorphisme isotope à l'identité a une entropie nulle. En particulier, il n'y a pas de flot d'Anosov. De surcroît, toute action holomorphe de $\mathbf{C}^*$ est *compactifiable* (*cf.* [20]).

1.4. Organisation de l'article

Les arguments employés pour démontrer les résultats de cet article relèvent essentiellement de la géométrie algébrique et analytique complexe. C'est d'ailleurs pour cela que nous supposons la variété ambiante projective et les feuilletages holomorphes. Les techniques diffèrent donc profondément de celles présentées dans [15].

La partie 2 concerne une alternative dûe à J.-P. Demailly et T. Peternell. Elle permet de rapporter l'étude à celle des variétés uniréglées (traitée dans la partie 4) et des variétés dont la première classe de Chern est nulle (partie 3). La partie 5 est consacrée aux automorphismes Anosov dont le feuilletage stable ou instable est de dimension 1 complexe.

1.5. Remerciements

Un grand merci à Étienne Ghys, à Sébastien Boucksom, à Dominique Cerveau, à Jean-Pierre Conze et à Frédéric Touzet pour les discussions que nous avons eues autour de ce thème. Les remarques judicieuses du rapporteur m'ont permis de rectifier une première version confuse et incomplète de ce texte. La partie 2 doit beaucoup à ses lectures attentives et je l'en remercie. Ce travail a été effectué lors d'une délégation cnrs. Merci au cnrs pour m'avoir offert ces moments privilégiés.

2. L'alternative de Demailly et Peternell

Dans cette partie, nous renforçons une alternative récente dûe à J.-P. Demailly et T. Peternell lorsque la variété projective M possède un automorphisme Anosov.

2.1. Courants positifs et pseudo-effectivité

Soit M une variété complexe compacte de dimension d. Une forme différentielle de type (p,p) est dite positive si sa restriction à tout germe de sous-variété complexe W de dimension p est une forme volume définissant la même orientation que la structure complexe de W.

Un $(1,1)$-*courant* est une forme linéaire continue sur l'espace des formes différentielles de type $(d-1,d-1)$, muni de la topologie de la convergence uniforme. Un courant est *positif* s'il attribue une valeur positive à toute forme positive ; il est *fermé* s'il est nul sur les formes exactes. Si T est un courant fermé, la classe d'homologie qui lui correspond sera notée $[T]$.

Exemple 2.1. Soit ω une forme de type $(1,1)$. On lui associe le $(1,1)$-courant T_ω défini par la formule

$$\langle T_\omega \mid \alpha \rangle = \int_M \omega \wedge \alpha$$

pour toute forme α de type $(d-1,d-1)$. Ce courant est positif (resp. fermé) si et seulement si ω l'est.

Si L est un fibré en droites sur M, nous noterons $c_1(L)$ sa première classe de Chern et $[L]$ la classe d'homologie Poincaré-duale. La classe $[L]$ sera appelée *classe d'homologie de L*. Le fibré L est *pseudo-effectif* s'il existe un courant positif fermé dont la classe d'homologie est égale à $[L]$. Par exemple, si le fibré en droites L est muni d'une métrique hermitienne dont la forme de courbure ω est positive, alors L est pseudo-effectif. Le courant T_ω associé à la forme ω est en effet un courant positif fermé représentant la classe d'homologie de L. Nous utiliserons de tels courants T_ω dans la preuve de la proposition 2.6. De même, lorsque L possède une section holomorphe, le courant d'intégration sur le lieu des zéros de cette section est un courant positif fermé dont la classe d'homologie coïncide avec celle de L : le fibré L est donc pseudo-effectif.

Le fibré en droites le plus important est le fibré canonique. Il s'agit du fibré $K_M = \mathsf{det}(T^*M)$ dont les sections sont les formes holomorphes de degré maximal $\dim_{\mathbf{C}}(M)$. Les propriétés de positivité de ce fibré régulent la géometrie de M. En particulier, nous exploiterons un théorème récent de J.-P. Demailly et T. Peternell offrant l'alternative suivante [11] : *si M est une variété projective complexe, ou bien K_M est pseudo-effectif, ou bien M est uniréglée, ce qui signifie que M est couverte par une famille de courbes rationnelles.*

Nous allons maintenant renforcer cette alternative dans le cas où M possède un automorphisme Anosov.

2.2. Énoncé de l'alternative renforcée

Le but de ce paragraphe est de démontrer la proposition suivante.

Proposition 2.2. *Si M est une variété projective complexe qui possède un automorphisme Anosov, ou bien M est uniréglée ou bien sa première classe de Chern est nulle.*

D'après l'alternative de Demailly et Peternell, il s'agit de montrer que la classe d'homologie du fibré canonique K_M est nulle dès que K_M est pseudo-effectif et qu'il existe un automorphisme Anosov. Un cas particulier instructif apparaît lorsque K_M admet une section et, plus généralement, lorsque la dimension de Kodaira de M est positive ou nulle.

Lemme 2.3. *Soit M une variété complexe compacte. Si M possède un automorphisme Anosov, ou bien son fibré canonique est un fibré de torsion, ou bien la dimension de Kodaira de M est égale à $-\infty$. En particulier, si la dimension de Kodaira de M est positive ou nulle, K_M est un fibré de torsion.*

Démonstration. Supposons que la dimension de Kodaira de M est positive ou nulle. Il existe alors une puissance positive $K_M^{\otimes l}$ du fibré canonique admettant des sections holomophes non triviales. L'automorphisme Anosov f agit linéairement sur le $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie formé des sections de $K_M^{\otimes l}$ et possède donc un un vecteur propre non nul :

$$\exists\, \lambda \in \mathbf{C}, \quad \exists\, \Omega \in \mathrm{H}^0(M, K_M^{\otimes l}), \quad f^*\Omega = \lambda\Omega. \tag{2.1}$$

Le module de λ est égal à 1 car $\lambda\overline{\lambda}$ coïncide avec la racine l-ème du degré topologique de f. En particulier, f préserve la mesure $(\Omega \wedge \overline{\Omega})^{1/l}$. Puisque le support de cette mesure coïncide avec la variété M, l'ensemble des points périodiques de f est dense dans M ; en effet, les points périodiques d'un difféomorphisme Anosov forment une partie dense de son ensemble non-errant.

Soit Z le lieu des zéros de Ω. Si Z n'est pas vide, c'est une hypersurface (singulière) f-invariante. Si m est un point périodique de f et si la variété stable ou instable de m coupe Z, alors m appartient à Z, car Z est un ensemble compact f-invariant.

Soit z un point de Z et $\mathcal{U}$ un voisinage ouvert de z qui soit un ouvert distingué pour le feuilletage stable et le feuilletage instable de f. Puisque Z est une hypersurface, si $\mathcal{U}$ est suffisamment petit alors Z coupe chaque variété instable ou chaque variété stable locale contenue dans $\mathcal{U}$. En particulier, Z contient tous les points périodiques situés dans un tel ouvert. Ainsi, si Z était non vide, Z contiendrait un ouvert, car les points périodiques de f sont denses. Ceci est absurde.

La section holomorphe Ω ne s'annule donc pas et $K_M^{\otimes l}$ est le fibré en droites trivial. Ceci termine la preuve. □

Remarque 2.4. L'étude des sous-variétés compactes invariantes par un difféomorphisme Anosov est un sujet difficile pour lequel on dispose d'une littérature importante. L'absence d'hypersurface compacte invariante par un difféomorphisme Anosov transitif a été remarquée par M. W. Hirsch [18]. On pourra consulter [12] et la bibliographie qui s'y trouve pour des compléments.

2.3. Courants positifs invariants

Dans ce paragraphe nous étudions les courants positifs T qui sont invariants sous l'action d'un automorphisme Anosov f. Ceci signifie que, pour toute forme α,

$$\langle T \mid f^*\alpha \rangle = \langle T \mid \alpha \rangle.$$

Lemme 2.5. *Soit M une variété complexe compacte kählérienne dont le fibré canonique est pseudo-effectif. Pour tout automorphisme f de M il existe un courant positif fermé T vérifiant les deux propriétés suivantes :*

(a) $f_*T = T$;

(b) *la classe d'homologie de T coïncide avec celle de K_M.*

Démonstration. Puisque K_M est pseudo-effectif, le convexe $\Gamma([K_M])$ formé des courants positifs fermés dont la classe d'homologie est celle de K_M n'est pas vide. Puisque M est une variété compacte kählérienne, la norme d'un courant positif fermé ne dépend que de sa classe d'homologie. La norme des éléments de $\Gamma([K_M])$ est donc constante et $\Gamma([K_M])$ est compact pour la topologie faible.

Puisque la classe d'homologie $[K_M]$ est un point fixe pour l'action de $\mathrm{Aut}(M)$ sur $\mathrm{H}_{2n-2}(M, \mathbf{R})$, ce convexe est $\mathrm{Aut}(M)$-invariant. Le théorème du point fixe de Schauder–Leray–Tychonoff permet de conclure. □

Proposition 2.6. *Soit M une variété complexe compacte munie d'un automorphisme Anosov f. Si le fibré canonique K_M est pseudo-effectif, la première classe de Chern $c_1(M)$ est nulle.*

D'après l'alternative de Demailly et Peternell, cette proposition est équivalente à la proposition 2.2. Pour l'établir, nous allons montrer que le courant T fourni par le lemme 2.5 est nul. Un cas particulier a déjà été obtenu au cours de la preuve du lemme 2.3 : nous y montrons en effet que le courant d'intégration sur le lieu des zéros d'une section holomorphe de K_M f-invariante est nul. Voici la seconde idée pour traiter le cas général.

Puisque f est un difféomorphisme Anosov, f réalise une dilatation uniforme le long de son feuilletage instable et une contraction uniforme le long de son feuilletage stable. En particulier, toute forme différentielle invariante par f est nulle le long de $\mathcal{F}^+$ et de $\mathcal{F}^-$. Une forme différentielle positive qui est nulle le long de deux sous-espaces supplémentaires est identiquement nulle : c'est l'inégalité de Cauchy–Schwartz. Il n'existe donc pas de forme positive invariante. Pour les courants positifs, la preuve est essentiellement la même ; pour la mettre en place, on approxime le courant invariant par une forme presque positive et presque invariante.

Démonstration. Notons d la dimension de la variété M et fixons une métrique hermitienne de forme fondamentale κ. Sa forme volume est donc égale à κ^d. Nous calculerons la norme des $(1,1)$-courants à l'aide de cette métrique ; ainsi, pour tout courant positif T, $\| T \| = \langle T \,|\, \kappa^{d-1} \rangle$.

Soit T un $(1,1)$-courant positif fermé invariant sous l'action de f et dont la classe d'homologie est égale à celle de K_M. Il s'agit de montrer que T est identiquement nul. Pour cela, effectuons la décomposition de Siu de T :

$$T = \sum_{i \geq 1} \lambda_i \{Z_i\} + R \tag{2.2}$$

où chaque $\{Z_i\}$ est le courant d'intégration sur une hypersurface de M et R est un courant positif fermé dont les nombres de Lelong sont concentrés sur des sous-ensembles analytiques de codimension supérieure ou égale à 2. Cette décomposition est unique, donc invariante sous l'action de f. Nous allons tout d'abord montrer que R est nul.

Soit $\{\mathcal{U}_i\}$ un recouvrement de M par des ouverts distingués pour $\mathcal{F}^+$ et $\mathcal{F}^-$ et $\{\rho_i\}$ une partition de l'unité adaptée à ce recouvrement. Sur chaque $\mathcal{U}_i$, on dispose donc de $p = \dim_{\mathbf{C}}(\mathcal{F}^-)$ sections continues v_1, ..., v_p du fibré tangent complexe TM telles que, en tout point x de $\mathcal{U}_i$,

$$T_x\mathcal{F}^- = \mathrm{Vect}_{\mathbf{C}}(v_1,\, v_2,\, ...,\, v_p). \tag{2.3}$$

De même, chaque $\mathcal{U}_i$ est muni de $q = \dim_{\mathbf{C}}(\mathcal{F}^+)$ champs de vecteurs v_{p+1}, ..., v_{p+q} engendrant le feuilletage $\mathcal{F}^+$.

Notons w le champ de bivecteurs

$$w_x = \sum_i \rho_i(x) \sum_{j=1}^{p} v_j(x) \wedge \overline{v}_j(x). \tag{2.4}$$

Ce champ est partout tangent au feuilletage stable donc, lorsque n est suffisamment grand, le champ de bivecteurs $w - f_*^n w$ est strictement positif le long de $\mathcal{F}^-$. Autrement dit, il existe une constante positive C telle que, pour toute $(1,1)$-forme ω positive le long de $\mathcal{F}^-$ et pour tout point x,

$$\frac{1}{C}\, \omega_x\left(w_x - (f_*^n w)_x\right) \leq \| \omega_{T_x\mathcal{F}^-} \| \leq C\, \omega_x\left(w_x - (f_*^n w)_x\right). \tag{2.5}$$

Cette inégalité permet de contrôler la norme d'une forme différentielle positive le long du feuilletage stable. Une inégalité similaire est valable le long du feuilletage instable si l'on remplace f par son inverse et que l'on choisit n et C convenablement. Lorsque la forme ω est presque positive, i.e. lorsque $\omega \geq -\epsilon\kappa$, une inégalité analogue est valable, avec un terme correcteur additif de taille ϵ.

L'inégalité de Cauchy–Schwartz montre que, pour tout point x, et pour toute forme positive ω, la norme de ω en x est majorée par la moyenne géometrique de la norme de ω le long de $T_x\mathcal{F}^-$ et le long de $T_x\mathcal{F}^+$. De même, s'il existe ϵ strictement positif tel que $\omega \geq -\epsilon\kappa$, alors

$$\forall x \in X, \qquad \| \omega_x \| \leq \epsilon + \sqrt{\| \omega_{T_x\mathcal{F}^+} \|^2 + \| \omega_{T_x\mathcal{F}^-} \|^2}. \tag{2.6}$$

Dans la suite, l'entier n et la constante C seront telles que l'équation (2.5) soit vérifiée. Pour chaque paire d'indices (i,j), nous noterons α_i^j la $(d-1,d-1)$-forme duale du champ de bivecteurs $\rho_i v_j \wedge \overline{v_j}$ pour la forme volume κ^d ; autrement dit, pour toute forme ω de type $(1,1)$ et pour tout point x,

$$\left(\omega \wedge \alpha_i^j\right)_x = \omega_x\left(\rho_i(x)\,(v_j \wedge \overline{v_j})_x\right)\,\left(\kappa^d\right)_x.$$

Tout ceci étant mis en place, nous pouvons démontrer la proposition. D'après le théorème d'approximation de Demailly [10], il existe une suite (ω_k) de $(1,1)$-formes à singularités algébriques satisfaisant :

$$|\langle R - T_{\omega_k}\,|\,\alpha_i^j\rangle\,| \leq \frac{1}{k} \quad \forall\, i,\, j,\, k, \tag{2.7}$$

$$|\langle R - T_{\omega_k}|\kappa^{d-1}\rangle| \leq \frac{1}{k} \quad \forall k, \tag{2.8}$$

$$\omega_k \geq -\frac{1}{k}\kappa \quad \forall k. \tag{2.9}$$

Le troisième point signifie que ω_k est presque positive : plus k est grand et plus ω_k est proche d'une forme positive. De plus, les singularités des ω_k sont concentrées sur des ensembles analytiques (de codimension 2) contenus dans l'ensemble des points où R a des nombres de Lelong positifs.

Le premier point, l'invariance de T sous l'action de f et la définition des formes α_i^j montrent que

$$\left|\int_X' \omega_k\,(w - f_*^n w)\,\kappa^d\right| \leq p\frac{1+\parallel f_* \parallel^n}{k}. \tag{2.10}$$

Le signe $\int_X'$ signifie que l'on intègre en dehors des singularités de ω_k. Cette quantité tend donc vers 0 lorsque k tend vers l'infini. En remplaçant f par son inverse et en choisissant n convenablement, la même affirmation s'avère bien sûre valable le long du feuilletage $\mathcal{F}^+$.

L'inégalité (2.5), son analogue pour $\mathcal{F}^+$ et la remarque concernant l'inégalité de Cauchy–Schwartz (équation 2.6) assurent alors que la suite

$$k \mapsto \left|\int_X' \omega_k \wedge \kappa^{d-1}\right|$$

tend vers zéro. Ceci montre que le courant R se concentre sur le sous-ensemble où ses nombres de Lelong sont strictement positifs. Puisque les nombres de Lelong de R sont nuls en codimension 1, et puisque R est un courant positif fermé de type $(1,1)$ (*i.e.* de bidimension $(d-1,d-1)$), ce courant est nul.

Nous pouvons maintenant conclure. Puisque R est nul, la décomposition de Siu de T est réduite à l'égalité

$$T = \sum_{i\geq 1} \lambda_i\{Z_i\}. \tag{2.11}$$

Le courant T étant invariant sous l'action de f, nous pouvons supposer que les diviseurs Z_i sont eux-mêmes invariants. Soit W l'espace vectoriel engendré par les classes d'homologie $[Z_i]$. Au sein de W, la classe d'homologie $[K_M]$ est contenue dans l'intérieur du cône convexe engendré par les $[Z_i]$. Il en résulte que l'un des multiples entiers de $[K_M]$ est égal à la somme d'un nombre fini de classes $[D_j]$, où chaque D_j est un diviseur effectif f-invariant. Le fibré en droites K_M est donc isomorphe au produit tensoriel

$$(\otimes_j \mathcal{O}(D_j)) \otimes L$$

où L est un fibré plat (donc unitaire). Puisque K_M et les D_j sont f-invariants, L^* l'est aussi et l'on peut munir L^* d'une métrique plate invariante $\|.\|_{L^*}$. Nous noterons encore $\|.\|_{L^*}$ la métrique qui s'en déduit sur les puissances tensorielles de L^*.

Comme les D_j sont effectifs, il existe une section Ω de $K_M \otimes L^*$ qui est f-invariante. Nous pouvons maintenant reprendre la preuve du lemme 2.3. Cette section est une forme holomorphe à valeurs dans L, et la densité $\|\Omega \wedge \overline{\Omega}\|_{L^*}$ est f-invariante. La démonstration du lemme 2.3 s'adapte alors en utilisant la mesure associée à cette densité car c'est une mesure de support total absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. On en déduit que $K_M \otimes L^*$ possède une section ne s'annulant pas. Ainsi, K_M est un fibré plat et la première classe de Chern de M est nulle. □

3. Principe de Bochner et théorème de Bogomolov

Le but de cette partie est de démontrer le théorème principal de ce texte lorsque la première classe de Chern de la variété ambiante M est nulle. Pour cela, nous emploierons le théorème de structure de Bogomolov, ce qui permet de ramener l'étude aux variétés de Calabi–Yau (*cf.* [1]). Dans ce contexte, c'est le principe de Bochner qui permet de conclure.

3.1. Variétés de Calabi–Yau

Une variété de Calabi–Yau est une variété complexe, compacte, kählérienne et simplement connexe dont le fibré canonique est trivial. La variété est donc munie d'une forme volume holomorphe partout non nulle. Une telle variété possède une métrique Kählérienne Ricci-plate (*cf.* [1]) ; nous fixerons une telle métrique h et noterons κ la forme de Kähler associée.

On dit qu'une variété de Calabi–Yau est irréductible si la composante connexe du groupe d'holonomie de cette métrique est irréductible. En ce cas, le théorème de classification de Berger montre que ce groupe coïncide avec $\mathsf{SU}(m)$ ou $\mathsf{Sp}(r)$ (m est égal à la dimension de M et r à la moitié). L'irréductibilité correspond au fait que ces deux groupes ne préservent aucun sous-espace vectoriel non trivial de $\mathbf{C}^n$.

Lorsqu'une variété de Calabi–Yau est réductible, elle est isomorphe au produit d'un nombre fini de variétés de Calabi–Yau irréductibles : la décomposition du fibré tangent en la somme des fibrés tangents à chacun des facteurs irréductibles correspond à la décomposition en sous-espaces invariants par l'holonomie.

Proposition 3.1. *Soit M une variété de Calabi–Yau. Toute décomposition du fibré tangent de M en la somme de deux sous-fibrés holomorphes est subordonnée à la décomposition de M en facteurs irréductibles. En particulier, M n'a pas d'automorphisme Anosov dont les feuilletages stable et instable sont holomorphes.*

Démonstration. Il s'agit d'un résultat classique qui résulte du célèbre principe de Bochner.

Supposons que le fibré tangent de M scinde en la somme de deux sous-fibrés holomorphes :

$$TM = E_1 \oplus E_2. \tag{3.1}$$

Notons p la dimension de E_1 et $\mathrm{j} : E_1 \to TM$ l'injection canonique. En prenant la puissance extérieure p-ième de j, nous obtenons un morphisme non nul du fibré en droites $\mathsf{det}(E_1)$ vers le fibré vectoriel $\bigwedge^p TM$. Autrement dit, $\wedge^p \mathrm{j}$ détermine une section holomorphe non nulle du fibré vectoriel $\bigwedge^p(TM) \otimes (\mathsf{det}(E_1))^*$. Puisque TM est un fibré Ricci-plat, ce fibré vectoriel peut être muni d'une structure d'Hermite-Einstein. D'après le principe de Bochner, la courbure de ce fibré doit être positive ou nulle et, TM étant Ricci-plat, nous obtenons

$$c_1(E_1) \leq 0. \tag{3.2}$$

La même inégalité s'applique à E_2 et l'équation (3.1) entraîne les égalités

$$c_1(E_1) = 0 = c_1(E_2). \tag{3.3}$$

Nous sommes donc dans le cas d'égalité du principe de Bochner. En particulier, E_1 est invariant par transport parallèle et peut être décomposé en une somme de sous-espaces irréductibles pour l'action du groupe d'holonomie. Nous avons donc montré que E_1 et E_2 sont subordonnés à la décomposition de M en ses facteurs irréductibles.

Si f est un automorphisme Anosov dont les feuilletages stable et instable sont holomorphes, on peut appliquer cette propriété à $T\mathcal{F}^+$ et $T\mathcal{F}^-$. Ceci montre que les feuilles de $\mathcal{F}^+$ et $\mathcal{F}^-$ sont compactes, ce qui est impossible car f contracte uniformément $\mathcal{F}^-$. □

3.2. Le théorème de Bogomolov

Employons maintenant le théorème de structure de F. A. Bogomolov : si la classe de Chern de M est nulle, et si M est kählérienne, il existe un revêtement fini de M qui est isomorphe au produit d'un tore par une variété de Calabi–Yau.

Proposition 3.2. *Si M est une variété kählérienne compacte dont la première classe de Chern est nulle et si M possède un automorphisme Anosov dont les feuilletages stable et instable sont holomorphes, alors M est revêtue par un tore.*

Démonstration. Appliquons le théorème de F. A. Bogomolov. Le revêtement universel de M est donc le produit d'un espace affine $\mathbf{C}^k$ par une variété de Calabi–Yau B.

Soit $f : M \to M$ un automorphisme de M et $\tilde{f}$ son relevé au revêtement universel $\tilde{M} = \mathbf{C}^k \times B$. L'espace affine $\mathbf{C}^k$ ne contient pas de sous-ensemble analytique compact, donc $\tilde{f}$ préserve la projection de $\tilde{M}$ sur $\mathbf{C}^k$. Autrement dit, il existe un automorphisme ϕ de $\mathbf{C}^k$ et une application holomorphe $a \mapsto \psi_a$ de $\mathbf{C}^k$ vers le groupe de Lie $\mathrm{Aut}(B)$ tels que

$$\tilde{f}(a, b) = (\phi(a), \psi_a(b)) \tag{3.4}$$

pour tout point (a, b) du produit $\mathbf{C}^k \times B$. Le groupe d'automorphismes de B est discret (principe de Bochner), donc ψ_a ne dépend pas de a. Ceci montre que $\tilde{f}$ agit diagonalement sur $\tilde{M} = \mathbf{C}^k \times B$.

Puisque l'automorphisme Anosov f agit diagonalement, l'automorphisme induit par f sur le facteur B est un automorphisme Anosov à feuilletages stable et instable holomorphes. D'après la proposition 3.1, la variété B est réduite à un point. La variété M est donc revêtue par un tore et f provient d'un automorphisme de ce tore. □

Remarque 3.3. Tout automorphisme d'un tore complexe compact $\mathbf{C}^k/\Gamma$ est une transformation affine de ce tore car sa différentielle est constante : c'est, en effet, une fonction holomorphe du tore (compact) vers l'espace affine des matrices complexes de taille $k \times k$. Puisque cette transformation affine définit un automorphisme Anosov, il est facile de voir qu'elle possède un point fixe. Quitte à choisir convenablement l'origine, il s'agit donc d'une transformation linéaire.

4. Variétés uniréglées

Le but de cette partie est de démontrer qu'il n'y a pas d'automorphisme Anosov à feuilletages stable et instable holomorphes sur les variétés projectives uniréglées. Modulo l'existence du quotient rationnel, ce résultat se ramène à un théorème de Y. Miyaoka sous une forme récente dûe à F. A. Bogomolov et M. McQuillan.

4.1. Variétés rationnellement connexes

Une variété projective complexe M est rationnellement connexe si deux points quelconques de M peuvent être joints par une courbe rationnelle. Pour qu'une variété soit rationnellement connexe, il faut et il suffit qu'il existe une courbe rationnelle $c : \mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \to M$ telle que le fibré $c^*(TM)$ soit une somme de fibrés en droites $\mathcal{O}(m)$ strictement positifs (*i.e.* $m > 0$). Cette définition a un sens car tout fibré vectoriel de la droite projective est une somme de fibrés en droites, et ce de manière unique à permutation près des facteurs.

Voici une formulation affaiblie et simplifiée, mais suffisante pour les applications que nous avons en vue, du théorème de Y. Miyaoka renforcé par F. A. Bogomolov et M. McQuillan.

Theorem 4.1 ([4]). *Soit M une variété projective et $\mathcal{F}$ un feuilletage holomorphe lisse de M. S'il existe une courbe rationnelle $c : \mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \to M$ telle que le fibré $c^*(T\mathcal{F})$ soit une somme de fibrés en droites $\mathcal{O}(m)$ strictement positifs, il existe alors une courbe rationnelle contenue dans l'une des feuilles de $\mathcal{F}$.*

Corollaire 4.2. *Si M est rationnellement connexe, et si M possède deux feuilletages holomorphes partout transverses $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, il existe alors une courbe rationnelle contenue dans l'une des feuilles de $\mathcal{F}$ (resp. de $\mathcal{G}$).*

Démonstration. Fixons une courbe rationnelle $c: \mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \to M$ le long de laquelle TM est une somme de fibrés en droites strictement positifs. Puisque $TM = T\mathcal{F} \oplus T\mathcal{G}$, nous avons l'égalité $c^*(TM) = c^*(T\mathcal{F}) \oplus c^*(T\mathcal{G})$ et chacun des deux facteurs de cette somme directe est donc lui-même une somme de fibrés en droites positifs. Ainsi, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ contiennent chacun une courbe rationnelle dans l'une de leurs feuilles. □

Corollaire 4.3. *Une variété rationnellement connexe ne possède pas d'automorphisme Anosov à feuilletages stable et instable holomorphes.*

Démonstration. Soient $\{B_i\}$ un recouvrement fini de M par des ouverts biholomorphes à des boules et ϵ un nombre de Lebesgue pour ce recouvrement : tout ensemble de diamètre inférieur à ϵ est contenu dans l'un des B_i. Puisqu'une boule ouverte ne contient pas d'ensemble analytique compact de dimension strictement positive, toute courbe de M a un diamètre supérieur à ϵ.

Appliquons le théorème 4.1 et le corollaire 4.2. Si un tel automorphisme Anosov f existait, il existerait une courbe rationnelle C dans l'une des feuilles du feuilletage stable de f. Puisque f est une contraction uniforme le long de ce feuilletage, pour n très grand devant 1, $f^n(C)$ serait une sous-variété compacte de M de diamètre inférieur à ϵ. Ceci contredit le choix de ϵ. □

4.2. Quotient rationnel

Soit M une variété projective. On définit sur M une relation d'équivalence $\mathcal{R}$, dénommée *équivalence rationnelle*, en disant que deux points sont en relation s'il existe une chaine de courbes rationnelles dans M qui joint x à y. En général, l'espace quotient $M/\mathcal{R}$ n'est pas une variété ; par exemple, toute surface K3 projective possède une infinité dénombrable de courbes rationnelles. Toutefois, la construction du quotient rationnel montre que c'est presque le cas (cf. [9], chap. 5) :

Soit M une variété projective complexe. Il existe une variété projective normale (singulière) $\mathsf{Rat}(M)$ *et une fibration méromorphe* $\rho : M \dashrightarrow \mathsf{Rat}(M)$ *qui satisfait les propriétés suivantes :*

(a) *ρ est une fibration régulière propre en dehors d'un fermé de Zariski de M ;*
(b) *les fibres de ρ sont rationnellement connexes ;*
(c) *les fibres génériques de ρ sont des classes de $\mathcal{R}$-équivalence ;*
(d) *si $\psi : M \dashrightarrow B$ est une autre fibration méromorphe satisfaisant* (a) *et* (b), *il existe une application rationnelle* $\pi : B \dashrightarrow \mathsf{Rat}(M)$ *telle que* $\rho = \pi \circ \psi$.

Le troisième point utilise la définition suivante : une propriété est *générique* si elle est valable sur le complémentaire d'une famille dénombrable de fermés de Zariski d'intérieur vide. La fibration ρ est appelée *quotient rationnel de M*. D'après la propriété (d), cette fibration est invariante par tout endomorphisme rationnel de M. Tout automorphisme de M permute donc les fibres de ρ.

Poursuivons maintenant l'étude des automorphismes Anosov. Nous supposons donc que M est une variété projective uniréglée munie d'un automorphisme Anosov dont les feuilletages stable et instable sont holomorphes. Puisque M est uniréglée, les fibres du quotient rationnel $\rho : M \dashrightarrow \mathsf{Rat}(M)$ ont une dimension strictement positive.

Lemme 4.4. *Les feuilletages $\mathcal{F}^+$ et $\mathcal{F}^-$ induisent deux feuilletages holomorphes partout transverses sur les fibres génériques de ρ.*

Dans cet énoncé, la transversalité est à prendre au sens fort : si V est une fibre générique de ρ, alors TV est égal à la somme directe de $T\mathcal{F}^- \cap TV$ et de $T\mathcal{F}^+ \cap TV$.

Démonstration. Soit V une fibre lisse de ρ autour de laquelle ρ est une fibration holomorphe propre. Notons TV le fibré tangent de V et $\pi : TM_{|V} \to N_V$ la projection du fibré tangent à M sur le fibré normal de V (ce fibré est trivial, il s'identifie au produit de V et du fibré tangent de $\mathsf{Rat}(M)$ au point $\rho(V)$).

D'après le corollaire 5.14 du livre [9], on peut choisir une courbe rationnelle $c : \mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \to V$ passant par un point générique de V pour laquelle $c^*(TM)$ est la somme directe de $\dim(V)$ fibrés en droites strictement positifs et de $\mathrm{codim}(V)$ fibrés en droites triviaux. Les facteurs positifs de cette somme directe correspondent au fibré tangent de V et les facteurs triviaux au fibré normal de V.

Décomposons cette somme directe de manière compatible avec la décomposition $TM = T\mathcal{F}^+ \oplus T\mathcal{F}^-$. On obtient ainsi

$$c^*(T\mathcal{F}^+) = \mathcal{O}(p_1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}(p_{d_+}) \oplus \mathcal{O} \oplus \ldots \oplus \mathcal{O} \tag{4.1}$$
$$c^*(T\mathcal{F}^-) = \mathcal{O}(q_1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}(q_{d_-}) \oplus \mathcal{O} \oplus \ldots \oplus \mathcal{O} \tag{4.2}$$

où les p_i et les q_j sont strictement positifs, $(d_+ + d_-)$ est égal à la dimension de V et le nombre total de facteurs triviaux est égal à la codimension de V. Le long de l'image de c, la projection $\pi_{|T\mathcal{F}^+} : T\mathcal{F}^+ \to N_V$ contient chaque facteur strictement positif dans son noyau car N_V est trivial. Ainsi, le long de l'image de c, TF^+ intersecte TV sur un fibré de dimension supérieure ou égale à d_+. Le même argument s'applique à $\mathcal{F}^-$. Puisque $(d_+ + d_-)$ est égal à la dimension de V et puisque $T\mathcal{F}^+$ et $T\mathcal{F}^-$ sont en somme directe, il vient :

$$\forall x \in c(\mathbb{P}^1(\mathbf{C})), \quad T_xV = (T_x\mathcal{F}^+ \cap T_xV) \oplus (T_x\mathcal{F}^- \cap T_xV). \tag{4.3}$$

En déformant c le long de V, on peut faire passer la courbe c par un point générique de V. Cette propriété est donc valable au point générique, et par semi-continuité de la dimension, elle est valable partout, ce qu'il fallait démontrer. □

Proposition 4.5. *Une variété projective complexe uniréglée ne possède pas d'automorphisme Anosov à feuilletages stable et instable holomorphes.*

Démonstration. Supposons qu'une telle variété M admette un automorphisme Anosov f à feuilletages holomorphes. Puisque M est uniréglée, le quotient rationnel a des fibres de dimension positive et nous pouvons appliquer le lemme précédent. Le corollaire 4.2 montre alors que $\mathcal{F}^+$ possède une courbe rationnelle dans l'une de ses feuilles et l'argument du corollaire 4.3 s'applique sans modification pour conclure. □

5. Difféomorphismes Anosov de codimension 1

Nous abordons maintenant la preuve du second point du théorème 1.4. Les techniques sont similaires mais s'appuient sur les travaux de Ghys mentionnés dans l'introduction. En particulier, la structure transverse du feuilletage de codimension 1 joue un rôle important.

5.1. Codimension 1 et structure transverse

Dans toute cette partie, f désignera un automorphisme Anosov d'une variété complexe compacte M dont le feuilletage instable est de dimension 1 complexe. Dans ce cadre le feuilletage $\mathcal{F}^-$ est un feuilletage holomorphe et les feuilles de $\mathcal{F}^+$ sont paramétrées par la droite complexe $\mathbf{C}$. En particulier, les feuilles de $\mathcal{F}^+$ sont munies d'une structure affine canoniquement associée à leur structure complexe ; cette structure affine est f-invariante et est uniquement caractérisée par cette propriété [15]. Le pseudo-groupe d'holonomie de $\mathcal{F}^-$ agit projectivement par rapport à cette structure affine (*cf.* [15]). Autrement dit, $\mathcal{F}^-$ est un feuilletage holomorphe lisse de codimension 1 transversalement projectif.

Notons $\tilde{M}$ le revêtement universel de M, $\pi : \tilde{M} \to M$ l'application de revêtement et Γ le groupe d'automorphismes de ce revêtement. Les feuilletages $\mathcal{F}^+$ et $\mathcal{F}^-$ se relèvent en deux feuilletages $\tilde{\mathcal{F}}^+$ et $\tilde{\mathcal{F}}^-$ de $\tilde{M}$. D'après [21], il existe une application holomorphe $\delta : \tilde{M} \to \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ et une représentation du groupe fondamental $\rho : \Gamma \to \mathsf{PGL}(2, \mathbf{C})$ telles que

(i) δ est une submersion locale et, localement, les fibres de δ sont les feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}^-$;

(ii) δ est Γ-équivariante : pour tout x dans $\tilde{M}$ et tout γ dans Γ, $\delta(\gamma(x)) = \rho(\gamma)(\delta(x))$.

Chaque feuille de $\tilde{\mathcal{F}}^+$ se projette affinement et biholomorphiquement sur le complémentaire d'un point de $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$. A priori, ce point dépend de la feuille. S'il n'en dépend pas, on peut supposer que $\rho(\Gamma)$ est contenu dans le groupe affine, ce qui revient à dire que le feuilletage $\mathcal{F}^-$ est transversalement affine.

5.2. Simple connexité et conclusion

Commençons par renforcer l'alternative obtenue dans la deuxième partie de ce texte.

Lemme 5.1. *Soit M une variété projective complexe munie d'un automorphisme Anosov de codimension* 1. *Ou bien M est rationnellement connexe, ou bien K_M est un fibré de torsion.*

Démonstration. D'après la proposition 2.2 et le théorème de Bogomolov, il suffit de montrer que M est rationnellement connexe si elle est uniréglée. Vues l'existence et l'invariance du quotient rationnel, il suffit de montrer qu'un automorphisme Anosov de codimension 1 ne préserve pas de fibration holomorphe.

Supposons donc que $f : M \to M$ est un automorphisme Anosov dont le feuilletage stable est de codimension 1 et que f permute les fibres d'une fibration $\pi : M \to B$. Notons $\overline{f} : B \to B$ l'automorphisme induit par f sur la base de la fibration. Nous allons montrer que cette situation est impossible. Nous verrons en effet qu'ou bien $\overline{f}$ est une contraction uniforme, ou bien f contracte uniformément une fibre invariante, ces deux cas de figure étant absurdes.

Soit y un point de B pour lequel il existe un point x de M satisfaisant $\pi(x) = y$ et $d\pi(| T_x\mathcal{F}^-) = T_yB$. Il existe alors un voisinage $\mathcal{U}$ de x dans la feuille stable $\mathcal{F}^-_x$ dont l'image par π est un voisinage de y. Si tous les points de B satisfont cette propriété, alors B peut être couverte par un nombre fini d'ouverts $\mathcal{U}_i$ tels que le diamètre de $\overline{f}^n(\mathcal{U}_i)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Ceci est impossible car $\overline{f} : B \to B$ est une transformation surjective.

L'ensemble des points y de B tels que

$$\forall x \in \pi^{-1}(y), \quad \dim_{\mathbf{C}}(d\pi_x(T_x\mathcal{F}^-)) < \dim_{\mathbf{C}}(B)$$

est donc non vide. C'est un sous-ensemble analytique de B car $\mathcal{F}^-$ est holomorphe. Nous noterons E son image réciproque par π ; comme le feuilletage instable de f est de dimension 1, E est contenu dans l'ensemble des points x de M tels que $\mathcal{F}^+$ est partout transverse à la fibre de π passant par x.

L'ensemble E est un sous-ensemble analytique de M qui est f-invariant. Puisque l'ensemble des points périodiques de f est dense dans l'ensemble des points non errants de f, on en déduit facilement que f possède un point périodique x_0 dans E. Quitte à changer f en l'un de ses itérés, nous pouvons supposer que x_0 est un point fixe.

Notons V_0 la fibre de π passant par x_0 et f_0 la restriction de f à cette fibre invariante. Puisque le feuilletage instable de f est partout transverse à V_0, tous les points périodiques de f_0 situés sur V_0 sont des points périodiques attractifs. L'ensemble non errant de f_0 est donc constitué de points périodiques attractifs et V_0 est couverte par les bassins d'attraction de ces points. Ceci contredit la surjectivité de f_0.

Nous avons ainsi obtenu une contradiction et ceci termine la preuve. □

Remarque 5.2. Cet argument n'est plus valable dès que les feuilletages stable et instable de l'automorphisme Anosov sont de dimension 2. Par exemple, l'automorphisme diagonal $f : A \times A \to A \times A$ construit dans l'exemple 1.5 préserve deux fibrations non triviales.

Le lecteur intéressé trouvera dans [18], théorème 7, et surtout [19], théorème 5.1, des énoncés qui permettent de court-circuiter les arguments proposés dans la preuve du lemme 5.1.

Proposition 5.3. *Soit f un automorphisme Anosov d'une variété projective complexe M. Si le feuilletage stable ou instable de f est de dimension* 1 *complexe, alors M est un tore et f est un automorphisme linéaire.*

Démonstration. Supposons que c'est le feuilletage instable qui est de dimension 1 et employons l'alternative fournie par le lemme précédent.

Si M est rationnellement connexe, M est simplement connexe. Dans ce cas, l'application δ permettant de développer la structure projective tranverse de $\mathcal{F}^-$ est une application holomorphe (surjective) de M sur $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ dont les fibres sont les feuilles de $\mathcal{F}^-$. Ceci est impossible car aucune feuille de $\mathcal{F}^-$ n'est compacte.

Supposons maintenant que le fibré canonique de M est un fibré de torsion. Puisque f est un automorphisme Anosov de codimension 1, f ne préserve aucune fibration holomorphe non triviale. En particulier, le théorème de Bogomolov assure que M est revétue par un tore ou que $\tilde{M}$ est compacte. La deuxième situation est exclue par l'argument précédent.

La variété M est donc revétue par un tore : il existe un revêtement fini et galoisien $P : M' \to M$, où M' est un tore, auquel f se relève en un automorphisme Anosov linéaire f' de codimension 1. Soit G le groupe des automorphismes (affines) du revêtement $P : M' \to M$. L'automorphisme f' appartient au normalisateur de G et l'un de ses itérés commute donc avec chaque élément de G. En particulier les espaces propres de la partie linéaire de chaque élément de G sont invariants sous l'action de f' : chacun de ces espaces contient donc la droite instable ou est contenu dans l'espace stable de f'. Ces espaces sont donc denses dans le tore M'.

Soit g un élément de G. Puisque g n'a pas de point fixe, $g(x) = a(x) + t$ avec un vecteur de translation t qui n'appartient pas à l'image de la transformation linéaire $a - \mathrm{id}$. En particulier, le sous-espace propre de a associé à la valeur propre 1 est de dimension positive. Ce sous-espace est donc dense dans M' et, par conséquent, $a = \mathrm{id}$. Chaque élément de G est donc une translation, ce qui montre que M est un tore. $\square$

Remarque 5.4. La proposition précédente est encore valable lorsque M est seulement supposée kählérienne compacte. Pour cela, on peut employer les arguments suivants.

La dimension de Kodaira de M est négative ou nulle, donc M doit être une variété spéciale au sens de F. Campana [6] : sinon, la fibration du *coeur* introduite par Campana serait une fibration méromorphe $c_M : M \dashrightarrow C(M)$ presque holomorphe invariante par f, ce qui est impossible.

Puisque M est spéciale, toute représentation linéaire du groupe fondamental de M est virtuellement abélienne [6].

La structure transverse projective du feuilletage stable de f montre alors que le premier nombre de Betti de M est strictement positif. La fibration d'Albanese de M étant f-invariante, la dimension de ses fibres est nulle et elle réalise un biholomorphisme si l'on remplace M par l'un de ses revêtements finis. Ainsi, à revêtement fini près M est un tore.

Remarque 5.5. Le théorème de Ghys mentionné dans l'introduction permet de montrer que M est homéomorphe à un tore sans supposer que M est kählérienne mais en supposant que f a une orbite dense. Sous de telles hypothèses, nous ne savons pas renforcer la conclusion et montrer que M est biholomorphe à un tore. Pourtant, il est facile de montrer que les exemples connus de variétés complexes compactes homéomorphes mais non biholomorphes à des tores ne possèdent pas d'automorphismes Anosov (*cf.* [8] pour de tels exemples).

Références

[1] Arnaud Beauville, Variétés Kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle, *J. Differential Geom.* **18** (1984), 755–782.

[2] Yves Benoist, Patrick Foulon and François Labourie, Flots d'Anosov à distributions stable et instable différentiables, *J. Amer. Math. Soc.* **5** (1992), 33–74.

[3] Yves Benoist et François Labourie, Sur les difféomorphismes d'Anosov affines à feuilletages stable et instable différentiables, *Invent. Math.* **111** (1993), 285–308.

[4] Fedor A. Bogomolov and Michael McQuillan, Rational curves on foliated varieties, Prépublication de l'IHES (2001), 1–29.

[5] Frédéric Campana, Remarques sur les groupes de Kähler nilpotents, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **28** (1995), 307–316.

[6] Frédéric Campana, Orbifolds, special varieties and classification theory, preprint, 1–102, version 2003.

[7] Serge Cantat, *Dynamique des automorphismes des surfaces complexes compactes*, Thèse de doctorat de l'É.N.S., Lyon, 1999.

[8] Fabrizio Catanese, Deformation types of real and complex manifolds, in : *Contemporary trends in algebraic geometry and algebraic topology (Tianjin, 2000)*, Nankai Tracts Math. **5**, 195–238, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2002.

[9] Olivier Debarre, *Higher-dimensional algebraic geometry*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2001.

[10] Jean-Pierre Demailly, Regularization of closed positive currents and intersection theory, *J. Algebraic Geom.* **1** (1992), 361–409.

[11] Jean-Pierre Demailly and Thomas Peternell, On the geometry of positive cones of projective and Kähler varieties, preprint, 1–9, 2002.

[12] Albert Fathi, Some compact invariant sets for hyperbolic linear automorphisms of tori, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **8** (1988), 191–204.

[13] Étienne Ghys, Flots d'Anosov dont les feuilletages stables sont différentiables, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **20** (1987), 251–270.

[14] Étienne Ghys, Rigidité différentiable des groupes fuchsiens, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **78** (1993), 163–185.

[15] Étienne Ghys, Holomorphic Anosov systems, *Invent. Math.* **119** (1995), 585–614.

[16] Marat H. Gizatullin, Rational G-surfaces, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **44** (1980), 110–144, 239.

[17] Moris W. Hirsch, Charles C. Pugh and Michael Shub, *Invariant manifolds*, Lecture Notes in Mathematics **583**, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[18] Morris W. Hirsch, On invariant subsets of hyperbolic sets, in : *Essays on Topology and Related Topics (Mémoires dédiés à Georges de Rham)*, 126–135, Springer, New York, 1970.

[19] Morris W. Hirsch and Charles C. Pugh, Stable manifolds and hyperbolic sets, in : *Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIV, Berkeley, Calif., 1968)*, 133–163, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970.

[20] David I. Lieberman, Compactness of the Chow scheme : applications to automorphisms and deformations of Kähler manifolds, in : *Fonctions de plusieurs variables complexes, III (Sém. François Norguet, 1975–1977)*, 140–186, Springer, Berlin, 1978.

[21] William Thurston, *The geometry and topology of 3-manifolds*, Princeton University Lecture Notes, 1977.

S. Cantat
IRMAR, UMR 6625 du CNRS
Université de Rennes I
35042 Rennes
France
e-mail : cantat@univ-rennes1.fr

(Received: May 26, 2003)