

# Sur l'application des périodes d'une variation de structure de Hodge attachée aux familles d'hypersurfaces à singularités simples

Autor(en): **Eyssidieux, Philippe / Mégy, Damien**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **90 (2015)**

Heft 4

PDF erstellt am: **18.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-658067>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

ETH-ZÜRICH

27. Jan. 2016

BIBLIOTHEK

# Sur l'application des périodes d'une variation de structure de Hodge attachée aux familles d'hypersurfaces à singularités simples

Philippe Eyssidieux and Damien Mégy

**Résumé.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  un entier positif pair et  $d$  un entier positif. Pour toute famille complète  $Y$  d'hypersurfaces de  $\mathbb{P}^{n+1}$  de degré  $d$  à singularités isolées de type A-D-E, nous construisons d'après une idée de Carlson et Toledo reprise dans [34, 43] un champ de Deligne–Mumford  $\widetilde{Y}$  d'espace de modules  $Y$  auquel la représentation de monodromie de la famille se prolonge. Nous étudions l'application de périodes associée et montrons un théorème de Torelli infinitésimal le long des strates isosingulières de  $Y$  sous des hypothèses de transversalité. Enfin, nous appliquons ce résultat à l'étude du revêtement universel de  $\widetilde{Y}$ .

**Mathematics Subject Classification (2010).** 14C30; 14J70, 14D05, 32Q30, 32S25.

**Keywords.** Projective hypersurfaces, infinitesimal Torelli theorem, simple singularities.

## 1. Introduction

La théorie de Hodge et ses prolongements imposent des contraintes très fortes sur le type d'homotopie des variétés kählériennes compactes [12, 42, 44] et notamment sur leurs groupes fondamentaux, appelés groupes kählériens (voir [1] pour une présentation et le séminaire Bourbaki [7] plus récent). En dépit des nombreux résultats contraignant les groupes kählériens, la question posée initialement par Serre de caractériser dans les termes de la théorie des groupes les groupes kählériens parmi les groupes de présentation finie reste largement ouverte.

Une approche dans l'étude de ces groupes fondamentaux est de considérer leurs schémas de représentations linéaires. La géométrie des variétés kählériennes sous-jacentes a des conséquences algébriques importantes, notamment que ces schémas sont à singularités quadratiques [25, 42]. Ils héritent également de structures supplémentaires par comparaison avec des espaces de modules de fibrés de Higgs. Un certain type de représentations linéaires, les Variations de Structure de Hodge polarisables complexes (VSH), jouent un rôle privilégié dans l'étude des représentations linéaires des groupes kählériens grâce au théorème d'ubiquité de Simpson [41]. Le concept a été dégagé lors de la découverte fondamentale par Griffiths [27] que les

systèmes locaux de monodromie sur les espaces de modules de variétés polarisées sont des VSH. Les applications de périodes associées donnent alors des informations précieuses sur ces espaces de modules et leur uniformisation [13, 27, 30, 33].

Cependant, malgré l'importance théorique des VSH, relativement peu d'exemples concrets en sont connus et les espaces portant de telles variations sont rarement compacts. Dans cet article, on étudie des situations où il est possible d'obtenir, via le théorème de prolongement d'applications de périodes de Griffiths, des VSH sur des variétés projectives. Le point de départ est le suivant.

Dans [43] est décrite une classe de surfaces projectives algébriques  $S$  munies de  $\mathbb{Q}$ -variations de structure de Hodge  $\mathbb{V}_S$  qui sont intéressantes du point de vue de la théorie de Hodge non-abélienne :  $(S, \mathbb{V}_S)$  ne peut pas s'exprimer par tiré en arrière à partir de systèmes locaux sur des courbes, variétés abéliennes ou espaces localement symétriques hermitiens. Ce sont des exemples particulièrement intéressants pour l'uniformisation en plusieurs variables complexes (voir [24] pour un survey récent) et l'un de nous a généralisé cette construction jusqu'en dimension six et a entamé l'étude cohomologique de ces exemples [34]. La conjecture de Toledo stipule que pour toute variété kählérienne compacte  $Z$ , on a  $H^2(\pi_1(Z), \mathbb{Q}) \neq 0$ , ce qui est le cas si le revêtement universel de  $Z$  est contractile. Cette conjecture n'est décidée dans cette classe d'exemples que dans certains cas [34]. La motivation initiale de ce travail est d'étudier pour cette classe d'exemples l'autre problème ouvert général de l'uniformisation en plusieurs variables complexes, c'est-à-dire la conjecture de Shafarevich prédisant que le revêtement universel d'une variété projective algébrique complexe est holomorphiquement convexe (cf. [24] pour la définition de la convexité holomorphe et une discussion du problème).

Décrivons la construction de [43] et son prolongement par [34] qui reprennent une idée de Carlson et Toledo. Dans ce qui suit  $X$  désigne une variété projective complexe connexe de dimension  $n + 1$  avec  $n \geq 1$ ,  $L$  un faisceau inversible tel que  $|L|$  n'a pas de point base. Si  $\eta = [f] \in |L|$  est représenté par une section globale  $f \in H^0(X, L) - \{0\}$ , on note

$$X_\eta = X_f = \{x \in X \mid f(x) = 0\}.$$

Définissons l'ouvert de Zariski  $U_0 := U(X, L)_0$  de  $|L|$  comme le lieu des  $[f] \in |L|$  tels que  $X_f$  est une hypersurface lisse et notons  $D := |L| - U_0$  le lieu discriminant.

L'ouvert  $U_0$  est la base d'un système local naturel, noté  $\mathbb{V}_{U_0}$ , dont la fibre au-dessus d'un point  $[f]$  est l'espace vectoriel de cohomologie évanescence

$$H_{ev}^n(X_f, \mathbb{Q}) := \text{coker} \left( H^n(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\text{restr.}} H^n(X_f, \mathbb{Q}) \right).$$

Ce système local est le produit tensoriel par  $\mathbb{Q}$  d'une  $\mathbb{Z}$ -variation de structure de Hodge de poids  $n$  sur  $U_0$  qui est polarisée par la forme d'intersection  $\int_{X_f} - \cup -$  sur les fibres [46]. Fixons une fois pour toutes un élément général  $f_{gen} \in H^0(X, L)$

et prenons  $\eta := [f_{gen}] \in U_0$  comme point base. La représentation d’holonomie du système local  $\mathbb{V}_{U_0}$  s’écrit

$$\rho : \pi_1(U_0, \eta) \rightarrow \mathbf{G} := \text{Aut} \left( H_{ev}^n(X_\eta, \mathbb{R}), \int_{X_\eta} - \cup - \right).$$

Dans la suite, l’entier  $n$  est pair. La forme d’intersection est alors symétrique et le groupe  $\mathbf{G}$  est un groupe orthogonal.

Introduisons  $U := U(X, L) \subset |L|$  l’ouvert de Zariski, contenant  $U_0$ , formé des hypersurfaces lisses ou n’ayant que des singularités isolées simples. Une singularité isolée d’hypersurface est dite *simple* si dans une déformation miniverselle ([32]) n’apparaissent qu’un nombre fini de classes d’isomorphisme de singularités. V. Arnold a démontré qu’une singularité d’hypersurface est simple si et seulement si elle est de type ADE [2]. En dimension paire, le groupe de monodromie d’une telle singularité est le groupe de Coxeter ADE correspondant, qui est en particulier fini ; réciproquement, ce sont les seules singularités d’hypersurface dont le groupe de monodromie est fini (voir [3] ou [14]). En dimension deux, la notion de singularité simple est confondue avec celle de singularité Du Val ou encore avec celle de singularité canonique [29].

Cette propriété de finitude de la monodromie nous permet dans la section 3.1 de construire un champ algébrique de Deligne–Mumford  $\tilde{U} := \tilde{U}(X, L)$  séparé et propre sur son espace des modules  $U$ , contenant  $U_0$  comme ouvert de Zariski, et vérifiant la propriété suivante : notant  $i : U_0 \subset \tilde{U}$  l’inclusion et  $i_* : \pi_1(U_0, \eta) \rightarrow \pi_1(\tilde{U}, \eta)$  le morphisme surjectif induit par  $i$  sur les groupes fondamentaux des champs topologiques sous-jacents ([35, 36]), alors le noyau de  $i_*$  est contenu dans celui de  $\rho$ . Par conséquent, la représentation  $\rho$  descend à une représentation  $\tilde{\rho} : \pi_1(\tilde{U}, \eta) \rightarrow \mathbf{G}$ . Si  $L$  est assez ample et si  $\eta'$  est un point de  $\tilde{U}$  au-dessus d’une hypersurface singulière  $X_{f'}$ , le groupe d’inertie de  $\tilde{U}$  en  $\eta'$  est le produit des groupes de monodromie des points singuliers de  $X_{f'}$ . Ces groupes de monodromie sont précisément les groupes de Coxeter ADE de même type que les singularités. Plus généralement, la construction de  $\tilde{U}$  intègre comme groupe d’inertie en  $\eta$  le groupe de monodromie locale de  $\rho$  en  $\eta$  qui est un sous-groupe de ce produit.

La représentation  $\tilde{\rho}$  apparaît comme l’holonomie d’une  $\mathbb{Q}$ -variation de structure de Hodge  $(\mathbb{V}_{\tilde{U}}, \mathcal{F}, S)$ , polarisée de poids  $n$ , sur le champ  $\tilde{U}$ . L’image  $\Gamma$  de  $\rho$  est la même que celle de  $\tilde{\rho}$  et un théorème classique de Beauville [5] entraîne que c’est un sous-groupe arithmétique du groupe orthogonal  $\mathbf{G}$  (voir [9, théorème 9.1]).

Notons  $\mathbf{U}$  le sous-groupe de  $\mathbf{G}$  qui stabilise la structure de Hodge sur  $H_{ev}^n(X_\eta, \mathbb{R})$ , et  $\mathcal{D} := \mathbf{G}/\mathbf{U}$  le domaine de Griffiths ([27]) attaché à  $(\mathbb{V}_{\tilde{U}}, \mathcal{F}, S)$ . On rappelle que  $\mathcal{D}$  a une structure naturelle de variété complexe homogène et porte une distribution holomorphe horizontale  $\mathbf{G}$ -équivariante. L’action de  $\Gamma$  sur  $\mathcal{D}$  est proprement discontinue et le champ quotient  $[\Gamma \backslash \mathcal{D}]$  est un orbifold complexe. L’application des



périodes de  $(\mathbb{V}_{\widetilde{U}}, \mathcal{F}, S)$  définit une application holomorphe horizontale de champs complexes analytiques

$$p : \widetilde{U} \rightarrow [\Gamma \backslash \mathcal{D}].$$

Le principal résultat de cet article est un théorème de Torelli infinitésimal. Plus précisément, on étudie l'application des périodes  $p$  en restriction à certaines strates définies de la manière suivante : pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on note  $U_k \subset U$  l'ouvert des hypersurfaces à singularités simples dont le nombre de Tjurina total  $\tau(f)$  (voir la section 2) est inférieur ou égal à  $k$ , et on note  $\widetilde{U}_k = \widetilde{U} \times_U U_k$ . C'est un sous-champ de  $\widetilde{U}$ , d'espace de modules  $U_k$ . On s'intéresse au comportement de  $p$  sur les strates  $\widetilde{U}_k - \widetilde{U}_{k-1}$  (voir 3.6), sous des conditions de positivité sur  $L$ .

**Théorème 1** (voir prop. 3.8.1 et prop. 6.3.1). *Pour  $X = \mathbb{P}^{n+1}$  avec  $n \geq 2$  pair,  $d > 0$  et  $L = \mathcal{O}_X(d)$ , on a :*

- (1) *L'action de  $PGL(n+2)$  sur  $|L|$  se relève à  $\widetilde{U}$  en préservant les différents  $\widetilde{U}_1$ .*
- (2) *Soit  $k > 0$ . Si  $d \geq n+2+k$ , la différentielle de la restriction de l'application de périodes de  $\mathbb{V}_{\widetilde{U}}$  à la strate  $\widetilde{U}_k - \widetilde{U}_{k-1}$  a pour noyau le tangent de l'orbite de  $PGL(n+2)$ .*

Nos bornes ne sont pas optimales. Si les surfaces quintiques avec un nœud sont obtenues par notre théorème, ce dernier est vide pour les surfaces quartiques à singularités simples alors que Torelli infinitésimal est bien connu dans ce cas. L'obtention de bornes optimales nécessiterait des arguments nettement plus fins non développés ici.

Le résultat avec  $k = 0$  est un résultat classique de Griffiths [26]. La preuve du théorème 1 repose sur le calcul de la différentielle de l'application de périodes pour des hypersurfaces nodales issue du travail fondamental [18] et de l'étude de leur filtration de Hodge dans [20]. Nous étendons une partie des résultats de ces articles aux hypersurfaces à singularités simples. Cette extension effectuée, l'énoncé de type Torelli infinitésimal repose sur une variante donnée au lemme 5.2.1 du théorème de Macaulay pour des hypersurfaces à singularités isolées quasi-homogènes, exactement comme dans [46]. Techniquement, nos résultats sont complémentaires de ceux de [16, 21] qui ne considèrent pas la question de Torelli infinitésimal.<sup>1</sup>

Une généralisation du théorème de Griffiths sur les intégrales rationnelles donnant une interprétation de la différentielle de l'application de périodes comme opérateur de multiplication pour les directions transverses aux strates isosingulières ne semble pas avoir été considérée de façon systématique dans la littérature. De même il est probable que le théorème 1 se généralise pour  $X$  quelconque pourvu que  $L$  soit assez ample mais là encore nous n'avons pas trouvé de référence dans la littérature. Nous laissons ces questions pour de futures recherches.

1. Alors que nous finissions de rédiger ce travail, A. Dimca nous a signalé que le lemme 5.2.1 résultait de [19] qui traite le cas plus général des singularités isolées quelconques, moyennant une traduction qui n'est pas si évidente pour nous. Notre preuve demandant moins de technologie et restant assez courte, nous avons donc préféré la conserver.

L'application à la conjecture de Shafarevich est immédiate en utilisant une construction de [22, 23] :

**Corollaire 2.** *Hypothèses et notations comme au théorème 1. Soit  $Y$  une variété projective lisse et  $\phi : Y \rightarrow \widetilde{U}_k$  un morphisme fini. Alors le revêtement universel de  $Y$  est une variété de Stein.*

Remarquons qu'il existe effectivement de telles variétés projectives  $Y$  dont la dimension peut aller jusqu'à six. En effet, l'ouvert  $U_k$  a un complémentaire de codimension  $c \geq \min(7, k)$  dès que  $L$  est  $k$ -jet-ample (voir [34]). Pour plus de résultats sur le revêtement universel de tels  $Y$ , dans le cas où  $X = \mathbb{P}^{n+1}$  ou non, voir la section 7. Dans le cas où  $\phi$  est génériquement fini, l'étude de la conjecture de Shafarevich semble beaucoup plus délicate et nous ne savons pas non plus la décider dans tous les cas.

L'article est organisé comme suit. Après avoir rappelé quelques notations et résultats dans la section 2, on construit dans la section 3 le champ  $\widetilde{U}$  ainsi que la variation de structure de Hodge  $\mathbb{V}_{\widetilde{U}}$ , et on prouve la première partie du théorème 1 en 3.8.1. La section 4 contient une comparaison entre les tiges de  $\mathbb{V}_{\widetilde{U}}$  aux points correspondant à des variétés singulières et la cohomologie de ces variétés singulières. La section 5 contient un théorème général de dualité de Macaulay pour des variétés à singularités modérées. On l'applique dans la section 6 par l'intermédiaire d'une formule de type Dimca–Saito–Wotzlaw, pour obtenir en 6.3.1 la fin de la preuve du théorème 1. Les applications à la conjecture de Shafarevich sont données dans la section 7.

**Remerciements.** Nous tenons à remercier D. Barlet, N. Borne, M. Brion, A. Dimca, S. Druel, L. Gruson, C. Peters, C. Voisin, M. H. Saito et tout particulièrement A. Otwinowska pour d'utiles remarques sur les questions traitées ici. Nous remercions également le rapporteur dont les remarques ont aidé à améliorer l'exposition.

## 2. Notations et rappels

Dans cette première section, nous précisons certaines notations et rappelons quelques résultats portant sur la topologie et la théorie de Hodge des hypersurfaces à singularités simples.

Pour tout espace  $T$  et tout groupe  $A$ ,  $A_T$  désigne le faisceau des fonctions localement constantes sur  $T$  à valeurs dans  $A$ . Plus généralement si  $\mathbb{W}_T$  est un système local sur  $T$  et  $\phi : T' \rightarrow T$  une application continue, on note  $\mathbb{W}_{T'} = \phi^* \mathbb{W}_T$ . De même, pour  $X \rightarrow T$  une application continue, on note  $X_{T'} = X \times_T T'$ .

Soit  $X$  une variété projective lisse complexe de dimension impaire  $n + 1$ ,  $L$  un fibré en droites sans point base sur  $X$ . On note  $\mathcal{X} \subset |L| \times X$  l'hypersurface universelle et  $p_1 : \mathcal{X} \rightarrow |L|$  la projection sur le premier facteur. L'ouvert  $U_0$  de

l'introduction est l'ouvert de lissité de  $p_1$  et en notant  $\mathcal{X}_0 = p_1^{-1}(U_0)$ , le conoyau du morphisme de systèmes locaux  $H^n(X, \mathbb{Q})_{U_0} \rightarrow R^n p_{1*} \mathbb{Q}_{\mathcal{X}_0}$  est exactement  $\mathbb{V}_{U_0}$ .

**2.1. Nombre de Tjurina.** Soit  $f \in H^0(X, L) - \{0\}$  telle que l'hypersurface  $\{f = 0\} := X_f$  n'ait que des singularités isolées. Soit  $\Sigma \subset X_f$  le sous-schéma artinien de  $X$  de support  $X_f^{sing}$  défini par l'annulation du premier jet de  $f$ . La longueur de  $\Sigma$ , i.e. le nombre de Tjurina total  $\tau(f)$ , est défini par la relation

$$\tau(f) = \sum_{P \in |\Sigma|} \tau_P(f) = \sum_{P \in |\Sigma|} \dim(\mathcal{O}_{\Sigma, P}).$$

Choisissant des coordonnées locales et une trivialisations locale de  $L$  et notant  $f_P$  la fonction qui définit  $f$  dans ces coordonnées, on voit que  $\mathcal{O}_{\Sigma, P}$  est isomorphe à l'algèbre de Tjurina  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1}, 0} / (f_P, \frac{\partial f_P}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_P}{\partial x_{n+1}})$ .

**2.2. Cohomologie de certaines hypersurfaces singulières.** Soit  $[f] \in |L|$ . Alors la cohomologie  $H^n(X_f, \mathbb{Q})$  est munie de la structure de Hodge mixte canonique de Deligne [10]. Supposons que  $X_f$  n'ait que des singularités simples. Comme une singularité simple a une forme d'intersection définie négative donc non dégénérée, la variété de dimension paire  $X_f$  est une variété d'homologie rationnelle [14, prop. 4.7]. Le morphisme naturel  $\mathbb{Q}_{X_f}[n] \rightarrow IC_{X_f} \mathbb{Q}$  vers le complexe d'intersection [15, 5.4] est alors un isomorphisme et le groupe  $H^n(X_f, \mathbb{Q})$  coïncide donc avec le groupe de cohomologie d'intersection  $IH^n(X_f, \mathbb{Q}) := \mathbb{H}^0(X_f, IC_{X_f} \mathbb{Q})$  et porte une structure de Hodge pure de poids  $n$ .

### 3. Structure orbifold sur $U$ et prolongement de la représentation de monodromie

Dans cette section on commence par introduire (3.1) le champ de Deligne–Mumford  $\widetilde{U}$  qui est muni d'une variation de structure de Hodge. Dans certains cas (3.8), ce champ est également muni de l'action d'un groupe algébrique, et la variation de structure de Hodge descend au champ d'Artin quotient. Son application des périodes est étudiée à la section suivante.

**3.1. Reformulation et extension des résultats de [34].** Reprenons les notations de la section précédente, et soit  $k \in \mathbb{N}$ , et  $U_k \subset |L|$  l'ouvert de Zariski constitué des  $[f] \in L$  tels que  $X_f$  n'ait que des singularités isolées, simples, et telles que  $\tau(f) \leq k$ . On a  $U_0 \subset U_1 \subset \dots \subset U = \bigcup_k U_k$ . Remarquons que  $U$  est non vide puisque l'ouvert  $U_0$  des  $[f]$  tels que  $X_f$  soit lisse est non vide par Bertini.

**Proposition 3.1.1.** *Soient  $X, L$  et  $U$  comme ci-dessus. Il existe un champ de Deligne–Mumford  $\widetilde{U}$  contenant  $U_0$  et fini sur son espace de modules  $U$ , tel que la représentation de monodromie de  $\pi_1(U_0)$  se prolonge à  $\widetilde{\rho} := \widetilde{\rho}_{(X,L)} : \pi_1(\widetilde{U}, b) \rightarrow O(H^n(X_b, \mathbb{Q}))$  où  $b \in U_0$  est un point base arbitraire. De plus, si  $L$  est  $k$ -jet-ample, alors le sous-champ ouvert  $\widetilde{U}_k := \widetilde{U} \times_U U_k$  est lisse.*

La preuve occupe les paragraphes 3.2 à 3.6 suivants.

**3.2. Déformations locales.** Soit  $f \in H^0(X, L)$  tel que l’hypersurface  $X_f \subset X$  soit à singularités isolées. Tout voisinage de  $[f]$  dans  $\mathbb{P}H^0(X, L)$  induit une déformation globale de  $X_f$  et donc induit pour chaque point singulier  $p \in |\Sigma|$  une déformation locale du germe  $(X_f, p)$ . Notons  $\text{Def}(X_f, p)$  la base d’une déformation miniverselle [32, 6.4, 6.5] de la singularité isolée d’hypersurface  $(X_f, p)$ . La propriété universelle fournit des morphismes de germes

$$\lambda_p : (|L|, [f]) \rightarrow \text{Def}(X_f, p) \quad \text{et} \quad \lambda = \prod_{p \in |\Sigma|} \lambda_p : (|L|, [f]) \rightarrow \prod_{p \in |\Sigma|} \text{Def}(X_f, p).$$

Il est connu que pour des singularités isolées d’hypersurfaces,  $\text{Def}(X_f, p)$  est lisse et naturellement isomorphe à un voisinage de 0 dans l’espace vectoriel  $\mathcal{O}_{\Sigma,p}$  [32, 6.7]. De plus, toujours par propriété universelle, la déformation  $(X \times |L|, (p, [f])) \supset (\mathcal{X}, (p, [f])) \rightarrow (|L|, [f])$  est induite par la déformation miniverselle. En particulier les éléments de  $|L|$  proches de  $[f]$  et singuliers près du point  $p$  sont ceux que  $\lambda_p$  envoie dans le discriminant  $\mathcal{D}_p \subset \text{Def}(X_f, p)$ .

La surjection de faisceaux  $L \rightarrow L \otimes \mathcal{O}_\Sigma$  induit un morphisme

$$H^0(X, L) \rightarrow H^0(X, L \otimes \mathcal{O}_\Sigma) = \bigoplus_{p \in |\Sigma|} \mathcal{O}_{\Sigma,p} \otimes L \tag{3.2.1}$$

qui évalue les jets des sections aux points singuliers de  $X_f$ . Ce morphisme s’annule sur  $f$  et définit sur le quotient  $H^0(X, L)/(f) \simeq T_{[f]}|L|$  une application que l’on note

$$ev_{[f]} = \bigoplus_{p \in |\Sigma|} ev_p : T_{[f]}|L| \rightarrow \bigoplus_{p \in |\Sigma|} \mathcal{O}_{\Sigma,p} \otimes L \tag{3.2.2}$$

Cette application est la différentielle de  $\lambda$  en  $[f]$ .

**3.3. Stratification par le nombre de Tjurina.** Soit  $k \in \mathbb{N}$  et posons  $Z_k = U_k - U_{k-1}$ . Alors  $Z_k$  est localement fermé dans  $U$ , on le munit de sa structure réduite induite. Dans tous les cas envisagés ici,  $Z_1$  est non-vide, lisse de codimension un et connexe car son adhérence est le discriminant  $D \subset |L|$  qui est irréductible. Par contre  $Z_k$  n’est pas généralement pas connexe si  $k \geq 2$  : par exemple  $Z_2$  désigne les hypersurfaces  $X_f$  dont les singularités sont soit deux points doubles ordinaires, soit un *cusp* de type  $A_2$ .

Soit  $[f] \in Z_k$ ,  $p$  un point singulier de  $X_f$  et  $\lambda_p : (|L|, [f]) \rightarrow \text{Def}(X_f, p)$  comme plus haut. La déformation miniverselle possède une structure assez riche. Le discriminant  $\mathcal{D}_p \subset \text{Def}(X_f, p)$  est un germe d’hypersurface réduite et irréductible dans  $\text{Def}(X_f, p)$  et sa multiplicité à l’origine est égale au nombre de Tjurina  $\tau_p := \tau(f_p)$  de  $(X_f, p)$  [32, 4.8]. La stratification de Samuel de  $\mathcal{D}_p$  est la partition en sous-ensembles

$$Z_l^p := \{s \in \mathcal{D}_p, \text{mult}_s \mathcal{D}_p = l\}, \quad l \in \llbracket 1, \tau_p \rrbracket.$$

C’est aussi la partition par nombre de Tjurina, au sens où dans la famille miniverselle  $(\mathcal{X}, p) \rightarrow (\text{Def}(X_f, p), 0)$ , la fibre au-dessus d’un point  $s \in Z_l^p$  a au voisinage de  $p$  des points singuliers dont la somme des nombres de Tjurina vaut précisément  $l$ .

Par [17], cette partition coïncide avec la stratification canonique de Whitney. En notant  $Z_0^p$  le complémentaire du discriminant dans  $\text{Def}(X_f, p)$ , on a finalement une stratification de toute la base

$$\text{Def}(X_f, p) = \bigsqcup_{l=0}^{\tau_p} Z_l^p,$$

avec  $Z_l^p$  de codimension  $l$ . Le produit  $\prod_{p \in |\Sigma|} \text{Def}(X_f, p)$  hérite de la stratification produit.

Toute cette structure peut être tirée en arrière à  $(|L|, [f])$  au moyen du morphisme  $\lambda$ . En particulier, pour tout  $l \leq k$ , l’intersection de  $Z_l$  avec un voisinage de  $[f]$  se laisse décrire comme l’image réciproque par  $\lambda$  de la réunion sur toutes les partitions de  $l$

$$l = \sum_{p \in |\Sigma|} l_p$$

des strates produits  $\prod_{p \in |\Sigma|} Z_{l_p}^p$ .

Le morphisme  $\lambda$  permet également de comparer les groupes fondamentaux locaux, au sens suivant. Soit  $B$  une boule de  $|L|$  centrée en  $[f]$ , suffisamment petite. Alors, on a un morphisme de groupes fondamentaux

$$\lambda_* : \pi_1(U_0 \cap B) \rightarrow \prod_{p \in |\Sigma|} \pi_1\left(\text{Def}(X_f, p) - \overline{Z_1^p}\right). \tag{3.3.1}$$

Les groupes  $\pi_1\left(\text{Def}(X_f, p) - \overline{Z_1^p}\right)$  sont bien compris grâce aux travaux d’Arnold et Brieskorn. Chacun d’entre eux est isomorphe au groupe de tresses généralisé de type ADE correspondant au type de singularité au point  $p$ . Par exemple pour un point singulier de type  $A_k$ , c’est le groupe de tresses classique à  $k + 1$  brins. Le groupe  $\pi_1(U_0 \cap B)$  est appelé groupe fondamental local en  $[f]$ .

Cette description locale se comporte bien par spécialisation au sens où si une singularité simple  $g$  se spécialise en  $f$ , alors une déformation miniverselle de  $g$  peut

être obtenue en construisant d'abord une déformation miniverselle de  $f$  et en prenant à l'intérieur de celle-ci une transversale à l'orbite de  $g$ . Ainsi, une déformation miniverselle de  $g$  peut être réalisée comme plongée dans celle de  $f$ .

**3.4. Utilisation de l'hypothèse de  $k$ -jet amplitude.** Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Si  $L$  est  $k$ -jet ample, on peut décrire la structure locale des strates  $Z_l$  pour  $l \leq k$  et minorer leur codimension pour  $l > k$ .

La  $k$ -jet-amplitude entraîne que pour tout  $[f] \in Z_k$ , le morphisme (3.2.1) d'évaluation des multijets est surjectif. Autrement dit,  $\lambda$  est submersif en  $[f]$  et équivalent à la seconde projection du produit  $(Z_k, [f]) \times \prod_{p \in |\Sigma|} \text{Def}(X_f, p)$  [32, Ch. 6], la strate  $Z_k$  est lisse en  $[f]$  et son espace tangent est le noyau du morphisme d'évaluation (3.2.2). Pour tout  $l \leq k$ , la strate  $Z_l$  est lisse de codimension  $l$ , et la stratification  $U_k = \bigcup_{l=0}^k Z_l$  est de Whitney en  $[f]$  puisque c'est le cas dans les déformations miniverselles locales. De plus, le morphisme induit (3.3.1) entre les groupes fondamentaux locaux est un isomorphisme.

Enfin, toujours sous l'hypothèse de  $k$ -jet amplitude, les strates  $Z_l$  avec  $l > k$  sont de codimension au moins  $k + 1$  [34, Th. 3.1] mais leur structure locale n'a pas de description simple.

**Remarque 3.4.1.** S'il est vrai que l'hypothèse de positivité sur  $L$  permet de contrôler la codimension des strates  $Z_k$ , nous attirons l'attention sur le fait que le complémentaire de  $U$  dans  $|L|$  a une codimension qui ne peut pas être rendue arbitrairement petite. Dès que  $L$  est 3-jet ample, cette codimension est exactement sept.

**3.5. Revêtement galoisien neutralisant la monodromie locale.** Sur l'ouvert  $B \cap U_0 = B - \overline{Z_1}$ , on peut considérer la restriction du système local  $R^n p_{1*} \mathbb{Q}_{X_0}$  de cohomologie des fibres, ainsi que le système  $\mathbb{V}_{U_0}$  déduit du précédent en quotientant par l'image (constante) de  $H^n(X, \mathbb{Q})$ . Sa représentation de monodromie est notée  $\rho|_{\pi_1(B - \overline{Z_1})}$  ou simplement  $\rho_{[f]}$ , c'est la composition à gauche de  $\rho$  par  $\pi_1(U_0 \cap B) \rightarrow \pi_1(U_0)$ . On l'appelle la représentation de monodromie locale en  $[f]$ .

Enfin, pour chaque point singulier  $p$  de  $X_f$ , on a sur  $\text{Def}(X, P) - \overline{Z_1^P}$  la représentation de monodromie de la singularité, à valeurs dans les automorphismes de la cohomologie de la fibre de Milnor notée  $F_p$  et munie de sa forme d'intersection :

$$\rho_p : \pi_1(\text{Def}(X, p) - \overline{Z_1^P}) \rightarrow \text{Aut}(H^n(F_p, \mathbb{Q}), \langle -, - \rangle).$$

Son image est le groupe de monodromie de la singularité, qui est fini car la singularité est simple et de dimension paire.

En composant avec  $(\lambda_p)_*$ , on obtient des représentations notées  $\lambda_p^*(\rho_p)$  de  $\pi_1(B - \overline{Z_1})$ .

Toujours parce que  $X_f$  est de dimension paire et n'a que des singularités isolées et simples,  $\rho_{[f]}$  se décompose comme somme directe d'un facteur trivial



et de  $\bigoplus_p \lambda_p^*(\rho_p)$ . Son image est donc finie. Si de plus  $L$  est  $k$ -jet ample,  $\lambda_*$  est bijective et l'image de  $\rho_{[f]}$  est isomorphe au produit des groupes de monodromie des singularités de  $X_f$ . Pour tous ces résultats, voir [34, Prop.4.1].

Par un théorème de Selberg [40], il existe un sous-groupe normal sans torsion d'indice fini dans  $\rho(\pi_1(U_0))$ . Le revêtement étale fini correspondant  $\eta : U'_0 \rightarrow U_0$  est galoisien de groupe noté  $G$  et se prolonge par le théorème de Grauert–Remmert en un revêtement galoisien normal encore noté  $\eta : |L'| \rightarrow |L|$ , unique à isomorphisme près. On note aussi  $U'_k = |L'| \times_{|L|} U_k$  et  $\eta : U'_k \rightarrow U_k$  la restriction à cet ouvert. Le sous-groupe sans torsion d'indice fini n'est bien sûr pas unique, et donc le revêtement  $\eta$  non plus. Cependant, la structure locale de  $\eta$  est toujours la même, au sens suivant. La restriction du revêtement  $\eta : U'_0 \rightarrow U_0$  au-dessus de  $U_0 \cap B$  est un revêtement non connexe, dont chaque composante connexe est le revêtement galoisien de  $U_0 \cap B$  défini par le sous-groupe  $\ker \rho_{[f]} \subset \pi_1(U_0 \cap B)$ , le noyau de la monodromie locale [34, Th. 4.3, étape 1]. Ceci signifie que le système local  $\eta^* \mathbb{V}_{U_0 \cap B}$  sur  $\eta^{-1}(U_0 \cap B)$  a monodromie nulle, donc s'étend en un système local (trivial) sur  $\eta^{-1}(B)$ . Par conséquent, le système local  $\mathbb{V}_{U_0}$  tiré en arrière par  $\eta$  s'étend en un système local  $\mathbb{V}_{U'}$  sur  $U'$ .

Si  $L$  est  $k$ -jet ample,  $U'_k$  est lisse car le modèle local de  $\eta : U'_k \rightarrow U_k$  est le quotient d'un espace vectoriel par un groupe de Coxeter de type ADE agissant comme groupe de réflexions [34, 2.2]. Dans ce cas, le système local  $\mathbb{V}_{U'_k}$  sur  $U'_k$  est sous-jacent à une variation de structure de Hodge par le théorème d'extension de Griffiths [27].

Le paragraphe qui suit élimine l'ambiguïté sur le choix du revêtement  $U'$ .

**3.6. Construction du champ.** Considérons le champ quotient  $\widetilde{U} = [U'/G]$ . C'est un champ de Deligne–Mumford normal, d'espaces de modules  $U$ . On peut définir des sous-champs ouverts  $\widetilde{U}_k = [U'_k/G]$ , et considérer  $\widetilde{Z}_k := \widetilde{U}_k - \widetilde{U}_{k-1}$  avec la structure réduite induite de sous-champ localement fermé. On note  $\pi_1(\widetilde{U})$ ,  $\pi_1(\widetilde{U}_k)$ ,  $\pi_1(\widetilde{Z}_k)$  les groupes fondamentaux des champs topologiques sous-jacents [35, 36].

Le champ  $\widetilde{U}$  ne dépend pas du choix du revêtement  $\eta$  au sens où si  $U' \rightarrow U$  et  $U'' \rightarrow U$  sont deux revêtements de groupe de Galois  $G_1$  et  $G_2$  correspondant à deux choix de sous-groupes distingués sans torsion comme plus haut, l'intersection de ces deux groupes donne un revêtement commun  $U''' \rightarrow U$ , de groupe de Galois noté  $G_3$ . Alors,  $[U'/G_1] \simeq [U'''/G_3] \simeq [U''/G_2]$ .

Si  $ev_{[f]}$  est surjective pour tout  $[f] \in U_k$  et en particulier si  $L$  est  $k$ -jet-ample, alors la variété  $U'_k$  est lisse donc le champ quotient  $\widetilde{U}_k$  est un champ de Deligne–Mumford lisse d'espace grossier  $U_k$ , le groupe d'inertie en  $[f]$  étant le produit des groupes de monodromie locale des singularités de  $X_f$ , et pour tout  $l \leq k$ ,  $Z_l$  est lisse et  $\widetilde{Z}_l$  est une gerbe sur  $Z_l$ . Cette description locale de  $\widetilde{U}$  peut se reformuler de la manière suivante. Pour chaque point  $p$  singulier dans  $X_f$ ,  $\text{Def}(X_f, p)$  est l'espace

grossier d'un champ de Deligne–Mumford lisse  $\widetilde{\text{Def}}(X_f, p)$  obtenu comme quotient global d'un germe lisse par le groupe de monodromie de la singularité en  $p$  agissant comme groupe de réflexions. La structure locale en  $[f]$  du champ  $\widetilde{U}$  est celle de

$$\prod_{p \in |\Sigma|} \widetilde{\text{Def}}(X_f, p),$$

tirée en arrière par  $\lambda$ .

Le système local  $\mathbb{V}_{U'}$  sur  $U'$  est  $G$ -équivariant et descend donc à un système local  $\mathbb{V}_{\widetilde{U}}$  sur  $\widetilde{U}$ , dont on note la représentation de monodromie

$$\widetilde{\rho} : \pi_1(\widetilde{U}, b) \rightarrow O(H_{ev}^n(X_b, \mathbb{Q}), \langle -, - \rangle),$$

avec  $b \in U_0$  un point base arbitraire. Si  $\widetilde{U}_k$  est lisse, le système local restreint  $\mathbb{V}_{\widetilde{U}_k}$  sur  $\widetilde{U}_k$  est sous jacent à une  $\mathbb{Q}$ -Variation de structure de Hodge. On obtient de la même manière des variations de structure de Hodge  $\mathbb{V}_{\widetilde{Z}_k}$  sur les strates  $\widetilde{Z}_k$  si elles sont lisses. Ceci termine la preuve de la proposition 3.1.1.  $\square$

**3.7. Une question ouverte.** Dans le cas  $X = \mathbb{P}^3, L = O_{\mathbb{P}^3}(4)$  on sait que  $\widetilde{\rho}$  est un isomorphisme sur son image grâce au théorème de Torelli pour les surfaces K3. Une conjecture de Carlson–Toledo prédit que les seuls réseaux de groupes algébriques réels semisimples apparaissant comme groupes kähleriens sont ceux des groupes de type hermitien symétrique. Cette conjecture implique que  $\widetilde{\rho}$  n'est pas injective pour  $d \geq 5$ . Ceci motive :

**Conjecture 1.** *Pour  $d \geq 5$  le noyau de  $\widetilde{\rho} = \widetilde{\rho}_{(\mathbb{P}^3, O_{\mathbb{P}^3}(d))}$  est un groupe infini.*

La méthode de [9] pour prouver le fait analogue dans le cas de  $\rho$  ne s'applique malheureusement pas ici. Nous ne voyons pas comment construire d'autres représentations linéaires de  $\pi_1(\widetilde{U}(\mathbb{P}^3, O_{\mathbb{P}^3}(d)), \eta)$ . Ceci motive la :

**Question 2.** *Le groupe  $\pi_1(\widetilde{U}(\mathbb{P}^3, O_{\mathbb{P}^3}(d)), \eta)$  admet-il d'autres représentations complexes que les représentations de la forme  $\alpha \circ \widetilde{\rho}$  où  $\alpha$  est une représentation rationnelle de  $O(H^n(X_g, \mathbb{R}))$  ?*

Pour  $d = 4$  la réponse à cette question est négative par le théorème de superrigidité de Margulis.

**3.8. Relèvement de l'action de  $PAut(X, L)$ .** Le groupe  $Aut(X, L)^\circ$  des automorphismes du couple  $(X, L)$  agit sur  $|L|$  à travers  $PAut(X, L) = Aut(X, L)^\circ / \mathbb{C}^*$  en préservant les  $U_k$ .

La proposition suivante appliquée dans le cas particulier  $X = \mathbb{P}^{n+1}$  prouve la partie (1) du théorème 1.

**Proposition 3.8.1.** *Si le groupe  $PAut(X, L)$  est semisimple, son action sur  $U$  se relève à une action sur  $\widetilde{U}$ .*

*Démonstration.* L'algèbre de Lie  $\text{paut}(X, L)^{op} \subset H^0(\Theta_{|L|})$  est une algèbre de Lie de champs de vecteurs holomorphes qui sont tangents à chaque  $Z_k$ . Or  $\overline{Z_1}$  est le lieu de ramification de  $|L|' \rightarrow |L|$ . Donc ces champs de vecteurs se relèvent à des champs de vecteurs sur  $|L|'$  car tout champ de vecteurs tangent au lieu de ramification de  $Z \rightarrow Y$  avec  $Y$  lisse et  $Z$  normal se relève à  $Z$ .

En effet, le relèvement a lieu en codimension un car un germe de champ de vecteurs de la forme  $a(z, (w_j))z \frac{\partial}{\partial z} + b_i(z, (w_j)) \frac{\partial}{\partial w_i}$ ,  $a, b \in \mathbb{C}\{z, w_1, \dots, w_n\}$  se relève bien à un germe de champ de vecteurs holomorphes par un morphisme de la forme  $(z, (w_j) \rightarrow (z^e, (w_j))$ . Ce relèvement en codimension un se prolonge à  $Y$  tout entier car le faisceau des champs de vecteurs holomorphes sur l'espace normal  $Y$  est réflexif.

On dispose donc d'un morphisme d'algèbres de Lie  $\text{paut}(X, L)^{op} \rightarrow H^0(\Theta_{U'})^G$  qui s'exponentie en un morphisme de groupes de Lie complexes du revêtement universel topologique  $\tilde{P}$  de  $PAut(X, L)$  vers le centralisateur  $C(G, Aut(U'))$  de  $G$  dans  $Aut(U')$ .

Si  $PAut(X, L)$  est semisimple, le groupe  $\tilde{P}$  est un groupe algébrique affine semisimple et le morphisme correspondant est un morphisme de groupes algébriques. Le noyau  $N$  du morphisme  $\tilde{P} \rightarrow Aut'(U)$  est contenu dans le noyau  $N'$  de  $\tilde{P} \rightarrow PAut(X, L)$  car l'action de  $\tilde{P}$  redescend à une action de  $\tilde{P}$  sur  $U$  factorisant via  $PAut(X, L)$ . Mais  $N'/N$  commute à  $G$  et préserve  $\eta$ . Comme  $\eta$  est galoisien de groupe  $G$  on déduit que  $N'/N \subset Z(G)$  et que donc, en divisant  $U'$  par  $N'/N$ , on obtient une action de  $PAut(X, L)$  sur  $U'' := U'/(N'/N)$  qui commute à  $Gal(U''/U) = G/(N'/N) := G'$  et descend à une action de  $PAut(X, L)$  sur  $\tilde{U} \simeq [U''/G']$ .  $\square$

**Corollaire 3.8.2.** *L'application des périodes  $\mathcal{P} : \tilde{U} \rightarrow [\Gamma \backslash \mathcal{D}]$  attachée à  $\tilde{\rho}$  descend à une application définie sur le champ quotient  $[PAut(X, L) \backslash \tilde{U}] \rightarrow [\Gamma \backslash \mathcal{D}]$ .*

#### 4. Interprétation géométrique de la représentation de monodromie prolongée

Avec les notations de 3.1, la première projection  $p_1 : |L| \times X \rightarrow |L|$  se restreint en un morphisme surjectif lisse toujours noté  $p_1 : |L| \times X - \mathcal{X} \rightarrow |L|$  dont la fibre au-dessus de  $[f]$  est la variété ouverte  $X - X_f$ .

Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Si pour tout  $[f] \in Z_k$  l'évaluation des multijets  $ev_{[f]}$  est surjective, alors la strate  $Z_k$  est lisse et porte le système local  $R^{n+1}(p_1)_* \mathbb{Q}_{(Z_k \times X - \mathcal{X}_{Z_k})}$  dont la tige au-dessus de  $[f]$  est  $H^{n+1}(X - X_f, \mathbb{Q})$ . Ce système local est sous-jacent à une variation de structure de Hodge mixte et en notant  $W$  sa graduation par le poids, on en tire la variation de structure de Hodge pure de poids  $n + 2$  sur  $Z_k$  :

$$Gr_W^{n+2} R^{n+1}(p_1)_* \mathbb{Q}_{(Z_k \times X - \mathcal{X}_{Z_k})},$$

que l'on peut tirer en arrière à  $\tilde{Z}_k$  et que l'on note de la même manière. D'autre part,

$\widetilde{Z}_k$  est muni de la VSH  $\mathbb{V}_{\widetilde{Z}_k}$ . La proposition qui suit compare les variations de ces deux VSH.

**Proposition 4.0.3.** *Soit  $k \in \mathbb{N}$  et supposons  $ev_{[f]}$  surjectif pour tout  $[f] \in Z_k$ . Les sous-faisceaux de  $\Theta_{\widetilde{Z}_k}$  définis par les noyaux des  $Gr_F(\mathbb{V})$  pour les variations de structure de Hodge  $Gr_W^{n+2} R^{n+1}(p_1)_* \mathbb{Q}_{(Z_k \times X - X_{Z_k})}$  et  $\mathbb{V}_{\widetilde{Z}_k}$  sont égaux.*

L’hypothèse de la proposition est satisfaite si par exemple  $L$  est  $\tau(f)$ -jet ample, en particulier si  $L$  est le produit tensoriel d’au moins  $\tau(f)$  fibrés très amples.

Pour montrer la proposition, on considère la cohomologie de la variété singulière  $X_f$ . On la compare dans un premier temps à celle de son complémentaire (4.1), et ensuite à la tige de  $\mathbb{V}$  qui est décrite comme la structure de Hodge limite dans une dégénérescence (4.2). Cette comparaison effectuée en famille au-dessus de la strate  $Z_k$  donne le résultat (4.3). Une preuve alternative et plus constructive est donnée dans le cas de familles de surfaces en (4.4).

**4.1. Relation entre les structures de Hodge de  $X_f$  et de  $X - X_f$ .** Comme rappelé dans la section 2,  $X_f$  est une variété d’homologie rationnelle et donc  $H^n(X_f, \mathbb{Q})$  porte une structure de Hodge pure de poids  $n$ . Le groupe  $H^{n+1}(X - X_f, \mathbb{Q})$  porte une structure de Hodge mixte [10] de poids  $n + 1$  et  $n + 2$ , entrant dans une suite exacte :

$$H^{n+1}(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^{n+1}(X - X_f, \mathbb{Q}) \rightarrow H_{X_f}^{n+2}(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^{n+2}(X, \mathbb{Q}) \quad (4.1.1)$$

Toujours parce que  $X_f$  est une variété d’homologie rationnelle, on a un isomorphisme de structure de Hodge  $H^n(X_f, \mathbb{Q})(-1) \xrightarrow{\sim} H_{X_f}^{n+2}(X, \mathbb{Q})$ . Pour avoir un tel isomorphisme « de Thom », il suffit en effet que le complexe  $\mathbb{Q}_{X_f}[n]$  soit autodual. Ainsi  $Gr_W^{n+2} H^{n+1}(X - X_f, \mathbb{Q})$  est une sous-structure de Hodge pure de poids  $n + 2$  de  $H^n(X_f, \mathbb{Q})(-1)$  et sa filtration de Hodge vérifie

$$0 = F^{n+2} \subset F^{n+1} \subset \dots \subset F^1 = F^0 = Gr_W^{n+2} H^{n+1}(X - X_f, \mathbb{Q})$$

On note que si  $H^{n+1}(X, \mathbb{Q}) = 0$ , ce qui est le cas si  $X = \mathbb{P}^{n+1}$  puisque  $n$  est pair, alors  $H^{n+1}(X - X_f, \mathbb{Q})$  est pure de poids  $n + 2$ .

**4.2. Structure de Hodge de  $X_f$  et structure de Hodge limite.** Soit  $i : \Delta \rightarrow U$  un disque analytique tel que  $i(0) = [f]$  et  $i(\Delta^*) \subset U_0$ . Posons  $\mathcal{X}_\Delta = \mathcal{X} \times_U \Delta$ . Alors la projection  $t : \mathcal{X}_\Delta \rightarrow \Delta$  est un morphisme projectif, lisse au-dessus de  $\Delta^*$  et la fibre en zéro est  $(\mathcal{X}_\Delta)_0 = X_f$ . Rappelons rapidement les résultats généraux sur de telles familles, avant d’examiner le cas particulier des singularités ADE.

D’un point de vue purement topologique d’abord, le formalisme des cycles évanescents de Deligne donne dans la catégorie dérivée  $D_c^b(X_f, \mathbb{Q})$  un triangle distingué (voir [15, 4.2])

$$\mathbb{Q}_{X_f} \rightarrow \psi_t(\mathbb{Q}_{\mathcal{X}_\Delta}) \xrightarrow{can} \phi_t(\mathbb{Q}_{\mathcal{X}_\Delta}) \xrightarrow{+1}, \quad (4.2.1)$$

où le complexe  $\phi_t(\mathbb{Q}_{\mathcal{X}_\Delta})$  est cohomologiquement concentré aux points singuliers de  $X_f$ . En prenant l'hypercohomologie de ce triangle, on obtient une suite exacte longue d'espaces vectoriels

$$\cdots \rightarrow H^n(X_f, \mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{H}^n(\psi_t(\mathbb{Q}_{\mathcal{X}_\Delta})) \rightarrow \mathbb{H}^n(\phi_t(\mathbb{Q}_{\mathcal{X}_\Delta})) \rightarrow \cdots \quad (4.2.2)$$

L'espace vectoriel  $\mathbb{H}^n(\psi_t(\mathbb{Q}_{\mathcal{X}_\Delta}))$  correspond à la cohomologie de la fibre proche canonique, et cette suite exacte est celle qui permet de comparer la cohomologie de la fibre centrale et des fibres proches.

La théorie de Hodge donne des informations supplémentaires sur cette suite exacte. La cohomologie de la fibre singulière  $H^n(X_f, \mathbb{Q})$  porte la structure de Hodge mixte canonique de Deligne [10], et la cohomologie de la fibre proche  $\mathbb{H}^n(\psi_t(\mathbb{Q}_{\mathcal{X}_\Delta}))$  peut également être munie d'une structure de Hodge : la structure de Hodge limite au sens de Schmid et Steenbrink [45]. On la notera  $H_{lim}^n(X_\infty, \mathbb{Q})$ . Le morphisme de spécialisation  $H^n(X_f, \mathbb{Q}) \rightarrow H_{lim}^n(X_\infty, \mathbb{Q})$  apparaissant dans la suite exacte longue (4.2.2) est un morphisme de structures de Hodge mixtes.

La théorie de Hodge de cette suite exacte longue est en fait définie au niveau du triangle distingué lui-même, d'après la théorie des modules de Hodge mixtes de Saito [38]. Ceci peut se voir en deux étapes. Tout d'abord, on sait [15, 5.2.21] que les foncteurs de cycles proches et évanescents convenablement décalés induisent des foncteurs  ${}^p\psi_t := \psi_t[-1]$  et  ${}^p\phi_t := \phi_t[-1]$  de la catégorie  $\text{Perv}(\mathbb{Q}_{\mathcal{X}_\Delta})$  dans  $\text{Perv}(\mathbb{Q}_{X_f})$ . Le triangle distingué (4.2.1) peut se réécrire, après décalage, comme la suite exacte courte de faisceaux pervers sur  $X_f$

$$0 \rightarrow \mathbb{Q}_{X_f}[n] \rightarrow {}^p\psi_t(\mathbb{Q}_{\mathcal{X}_\Delta}[n+1]) \rightarrow {}^p\phi_t(\mathbb{Q}_{\mathcal{X}_\Delta}[n+1]) \rightarrow 0. \quad (4.2.3)$$

Ensuite, cette suite exacte est elle-même sous-jacente à une suite exacte courte de modules de Hodge mixtes. Le formalisme de Saito redonne en cohomologie la suite exacte longue de structures de Hodge mixtes (4.2.2).

Dans le cas particulier où  $X_f$  n'a que des singularités ADE, on peut être plus précis. En effet, les groupes de monodromie des singularités de  $X_f$  sont finis, et après revêtement fini, la monodromie de la famille  $\mathcal{X}_{\Delta^*} \rightarrow \Delta^*$  devient non seulement unipotente mais en fait triviale. La structure de Hodge limite  $H_{lim}^n(X_\infty, \mathbb{Q})$  est alors pure, de même que  $H^n(X_f, \mathbb{Q})$  par le paragraphe précédent, et le morphisme de spécialisation est un morphisme de structures de Hodge pures. Plus généralement, la description de la suite exacte longue (4.2.2) en termes de modules de Hodge est la suivante.

Par hypothèse sur les singularités de  $X_f$ , on a  $\mathbb{Q}_{X_f}[n] = IC_{X_f}\mathbb{Q}$ . Ce complexe est donc sous-jacent à un module de Hodge polarisable de poids  $n$  [37, cor. 1, p. 856]. D'autre part,  ${}^p\psi_t(\mathbb{Q}_{\mathcal{X}_\Delta}[n+1]) = {}^p\psi_t(IC_{\mathcal{X}_\Delta}\mathbb{Q})$  et comme la dégénérescence  $t : \mathcal{X} \rightarrow \Delta$  est à monodromie finie,  ${}^p\psi_t(IC_{\mathcal{X}_\Delta}\mathbb{Q})$  est lui aussi sous-jacent à un module de Hodge polarisable de poids  $n$  [37, (0.7), p. 852]. La suite exacte (4.2.3) provient donc d'une suite exacte de modules de Hodge polarisables de poids  $n$ , et



elle est donc scindée car la catégorie abélienne des modules de Hodge polarisables de poids donné est semisimple [37, Lemme 5, p. 854].

Ceci fournit en hypercohomologie une suite exacte (courte) de structures de Hodge pures :

$$0 \rightarrow H^n(X_f, \mathbb{Q}) \rightarrow H_{lim}^n(X_\infty, \mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{H}^n(\phi_t(\mathbb{Q}_{\mathcal{X}_\Delta})) \rightarrow 0. \tag{4.2.4}$$

Le dernier terme peut se calculer à l'aide de la suite spectrale d'hypercohomologie. Comme les singularités sont isolées, on a  $\mathbb{H}^n(\phi_t(\mathbb{Q}_{\mathcal{X}_\Delta})) \simeq \bigoplus_{p \in |\Sigma|} \mathcal{H}^n(\phi_t \mathbb{Q}_{\mathcal{X}_\Delta})_p$ .

**4.3. Comparaison avec la variation de structure de Hodge des variétés singulières.** Faisons maintenant varier  $[f]$  dans la strate isosingulière  $Z_k$ . Soit avec les notations du paragraphe 3.2 un germe de disque analytique  $j : (\Delta, 0) \rightarrow \prod_{p \in |\Sigma|} \text{Def}(X_f, p)$  tel que  $j(\Delta^*) \subset \prod_{p \in |\Sigma|} (\text{Def}(X_f, p) - \overline{Z_1^p})$  et dont la monodromie est nulle.

On définit un germe  $T := (|L|, [f]) \times_{\lambda, j} \Delta$  muni de la famille d'hypersurfaces  $X \times T \supset \mathcal{X}_T \xrightarrow{\pi} T$ .

La projection naturelle  $t : T \rightarrow \Delta$  définit une fonction holomorphe et  $S := \{t = 0\}$  est exactement le germe en  $[f]$  de la strate isosingulière  $Z_k$  de  $X_f$ . Notons enfin  $g$  la composée  $\mathcal{X}_T \xrightarrow{\pi} T \xrightarrow{t} \Delta$ ,  $d_{\mathcal{X}_T} = \dim \mathcal{X}_T$ ,  $d_{\mathcal{X}_S} = \dim \mathcal{X}_S$ ,  $d_S = \dim S$  et  $d_T = \dim T$ .

On a sur  $\mathcal{X}_S$  une suite exacte courte de faisceaux pervers

$$0 \rightarrow \mathbb{Q}_{\mathcal{X}_S}[d_{\mathcal{X}_S}] \rightarrow {}^p\psi_g(\mathbb{Q}_{\mathcal{X}_T}[d_{\mathcal{X}_T}]) \xrightarrow{can} {}^p\phi_g(\mathbb{Q}_{\mathcal{X}_T}[d_{\mathcal{X}_T}]) \rightarrow 0. \tag{4.3.1}$$

Comme  $\mathcal{X}_S$  est localement isomorphe à un produit de variété d'homologie rationnelle par un germe de variété lisse, on a  $\mathbb{Q}_{\mathcal{X}_S}[d_{\mathcal{X}_S}] = IC_{\mathcal{X}_S}\mathbb{Q}$ . Par le même argument que plus haut,  ${}^p\psi_g(\mathbb{Q}_{\mathcal{X}_T}[d_{\mathcal{X}_T}]) = {}^p\psi_g(IC_{\mathcal{X}_T}\mathbb{Q})$  est pur et la suite exacte (4.3.1) est sous-jacente à une suite exacte (scindée) de modules de Hodge polarisables.

Appliquons maintenant le foncteur de cohomologie perverse  ${}^pR^0\pi_* = {}^p\mathcal{H}^0R\pi_*$  à cette suite exacte. On obtient une suite exacte de modules de Hodge purs sur  $S$

$$0 \rightarrow {}^pR^0\pi_*\mathbb{Q}_{\mathcal{X}_S}[d_{\mathcal{X}_S}] \rightarrow {}^pR^0\pi_*{}^p\psi_g(\mathbb{Q}_{\mathcal{X}_T}[d_{\mathcal{X}_T}]) \xrightarrow{can} {}^pR^0\pi_*{}^p\phi_g(\mathbb{Q}_{\mathcal{X}_T}[d_{\mathcal{X}_T}]) \rightarrow 0. \tag{4.3.2}$$

Simplifions l'écriture de ces trois termes.

- (1) Au-dessus de  $S$  qui est lisse, le morphisme  $\pi$  est topologiquement localement trivial donc

$${}^pR^0\pi_*\mathbb{Q}_{\mathcal{X}_S}[d_{\mathcal{X}_S}] = R^n\pi_*\mathbb{Q}_{\mathcal{X}_S}[d_S].$$

- (2) D'autre part,  $\pi$  est propre donc  $R\pi_*$  commute aux cycles proches [15, 4.2.11]. Ceci joint à la  $t$ -exactitude de  ${}^p\psi$  donne alors  ${}^pR^0\pi_*{}^p\psi_g(\mathbb{Q}_{\mathcal{X}_T}[d_{\mathcal{X}_T}]) = {}^p\psi_t({}^pR^0\pi_*\mathbb{Q}_{\mathcal{X}_T}[d_{\mathcal{X}_T}])$ , puis  ${}^p\psi_t({}^pR^0\pi_*\mathbb{Q}_{\mathcal{X}_T}[d_{\mathcal{X}_T}]) = {}^p\psi_t(R^n\pi_*\mathbb{Q}_{\mathcal{X}_T}[d_T])$



car les cycles proches ne dépendent que de la restriction aux fibres proches. Finalement, on a

$${}^p R^0 \pi_* {}^p \psi_g(\mathbb{Q}_{\mathcal{X}_T}[d_{\mathcal{X}_T}]) = {}^p \psi_t (R^n \pi_* \mathbb{Q}_{\mathcal{X}_T}[d_T]).$$

(3) Enfin et surtout, le troisième module de Hodge  ${}^p R^0 \pi_* {}^p \phi_g(\mathbb{Q}_{\mathcal{X}_T}[d_{\mathcal{X}_T}])$  est constant. En effet,  ${}^p \phi_g(\mathbb{Q}_{\mathcal{X}_T}[d_{\mathcal{X}_T}])$  est supporté sur le lieu singulier de  $g$  qui est une union finie de sections étales de  $\mathcal{X}_S \rightarrow S$  qui décrivent les différents points singuliers des variétés  $X_s$  lorsque  $s$  varie dans  $S$ . La restriction de  $\pi$  à ce support est donc étale sur  $S$  et  ${}^p R^0 \pi_* {}^p \phi_g(\mathbb{Q}_{\mathcal{X}_T}[d_{\mathcal{X}_T}]) = \pi_* ({}^p \phi_g(\mathbb{Q}_{\mathcal{X}_T}[d_{\mathcal{X}_T}]))$  est une somme directe pour  $p \in |\Sigma|$  de complexes de cycles évanescents de chaque singularité de  $X_s$  lorsque  $s$  varie dans  $S$ . Or ces singularités sont de type ADE donc rigides.

Chacun des facteurs de cette somme directe est donc constant sur  $S$  car il s'obtient par tiré en arrière d'un faisceau de cycles évanescents sur la déformation universelle locale  $\text{Def}(X_f, p)$  de chaque singularité  $p \in |\Sigma|$  de  $X_f$ .

Si le faisceau pervers sous-jacent à un module de Hodge est à décalage près un système local, alors ce système local est une VSH [37, lemme 3]. Après décalage, la suite exacte (4.3.2) est donc une suite exacte de variations de structure de Hodge sur le germe  $S$  dont le troisième terme est constant. Les applications des périodes des deux premiers termes ont donc des différentielles en  $[f]$  qui ont le même noyau.

Par ailleurs, le second terme tiré en arrière par  $\widetilde{S} \rightarrow S$ , où  $\widetilde{S}$  est le germe de  $\widetilde{Z}_k$  dans  $\widetilde{U}_k$ , est isomorphe à  $\mathbb{V}_{\widetilde{S}} \oplus H^n(X, \mathbb{Q})_{\widetilde{S}}$ .

Finalement, en tout point de  $\widetilde{S}$ , le noyau de  $Gr_F(\nabla)$  pour  $\mathbb{V}_{\widetilde{S}}$  est le même que pour (le tiré en arrière à  $\widetilde{S}$  de)  $R^n \pi_* \mathbb{Q}_{\mathcal{X}_S}$ .

Compte tenu de la comparaison entre  $H^n(X_f, \mathbb{Q})$  et  $Gr_W^{n+2} H^{n+1}(X - X_f, \mathbb{Q})$  établie en (4.1.1), on sait déjà que le noyau de  $Gr_F(\nabla)$  pour  $R^n \pi_* \mathbb{Q}_{\mathcal{X}_S}$  est le même que pour  $Gr_W^{n+2} R^{n+1}(p_1)_* \mathbb{Q}_{(S \times X - X_S)}$ . Ceci établit la proposition 4.0.3.  $\square$

**4.4. Interprétation dans le cas  $n = 2$ .** Donnons un argument alternatif permettant de démontrer la proposition 4.0.3 dans le cas  $n = 2$ .

Si on applique le théorème de résolution simultanée des singularités Du Val [4], [6], cf. [29, p. 135] à la famille universelle  $p_1 : \mathcal{X} \rightarrow U$  on trouve un revêtement ramifié  $r : U^* \rightarrow U$  et une application holomorphe propre et lisse  $\bar{u} : \mathcal{X}^* \rightarrow U^*$  avec un morphisme  $\pi : \mathcal{X}^* \rightarrow \mathcal{X} \times_U U^*$  qui est une résolution simultanée, c'est à dire que pour tout  $s \in U^*$ ,  $\pi_s : \mathcal{X}_s^* \rightarrow \mathcal{X}_s$  est une résolution. De plus, ces résolutions peuvent être supposées minimales. Le morphisme  $r$  factorise par un morphisme fini  $r' : U^* \rightarrow \widetilde{U}$ . L'existence globale de  $r$  n'est pas évidente et il n'est pas clair pour nous que  $r$  puisse être choisi de façon à ce que  $r'$  soit étale. Toutefois, cf [8], c'est le cas si on restreint  $u$  à un petit voisinage d'un point de  $U$ . Ceci implique que  $\mathbb{V}_{\widetilde{U}, [f]} \simeq H^2(X'_f, \mathbb{Q})$  comme structures de Hodge où  $X'_f \rightarrow X_f$  est la résolution

minimale mais aussi que  $r'^*\mathbb{V}_{\widetilde{U}} \simeq R^2\bar{u}_*\mathbb{Q}_{\mathcal{X}^*}$  comme variations de structure de Hodge polarisables.

Notons  $Z_k^* = r^{-1}(Z_k)$  et appelons  $\mathcal{X}_k^*$ , respectivement  $\mathcal{X}_k$  la restriction de  $\mathcal{X}^*$ , respectivement  $\mathcal{X}$  au-dessus de  $Z_k^*$ , respectivement  $Z_k$ . Alors  $\mathcal{X}_k^*$  est lisse sur  $Z_k$  et, quitte à faire un revêtement étale de  $Z_k^0$ , on peut supposer que sur chaque composante connexe  $Z_k^0$  de  $Z_k^*$  l'ensemble singulier de  $\mathcal{X}_k$  est un produit de  $Z_k^0$  par un ensemble fini. L'ensemble exceptionnel de  $\pi_k : \mathcal{X}_k^* \rightarrow \mathcal{X}_k$  est globalement un produit de  $Z_k^0$  par une réunion de configurations de courbes rationnelles du type A-D-E adéquat.

Ceci donne des suites exactes de variations de structure de Hodge :

$$0 \rightarrow \mathbb{Q}(-1)_{Z_k^0}^{\oplus k} \rightarrow R^2\bar{u}_*\mathbb{Q}_{\mathcal{X}_k^*}|_{Z_k^0} \simeq (r')^*\mathbb{V}_{\widetilde{U}}|_{Z_k^0} \rightarrow R^2(p_1)_*\mathbb{Q}_{\mathcal{X}_k} \rightarrow 0$$

Notons  $v : U^* \times X - \mathcal{X}^* \rightarrow U^*$  la première projection. La suite exacte (4.1.1) implique que  $R^2(p_1)_*\mathbb{Q}_{\mathcal{X}_k}(-1) \simeq Gr_W^4 R^3 v_*\mathbb{Q}(U^* \times X - \mathcal{X}^*)|_{Z_k^0}$ , puis par le théorème de semisimplicité :

$$(r')^*\mathbb{V}_{\widetilde{U}}|_{Z_k^0} \simeq \mathbb{Q}(-1)_{Z_k^0}^{\oplus k} \oplus Gr_W^4 R^3 v_*\mathbb{Q}(1)_{(U^* \times X - \mathcal{X}^*)}|_{Z_k^0}$$

Ceci implique que sur  $Z_k^0$ , les VSH  $Gr_W^4 R^3 v_*\mathbb{Q}(U^* \times X - \mathcal{X}^*)|_{Z_k^0}$  et  $\mathbb{V}_{\widetilde{U}}|_{Z_k^0}$  ne diffèrent que par un système local de monodromie finie donc d'application de périodes constante. En particulier, Torelli infinitésimal pour  $\mathbb{V}_{\widetilde{U}}|_{Z_k^0}$  équivaut à Torelli infinitésimal pour  $Gr_W^4 R^3 v_*\mathbb{Q}_{X \times U^* - \mathcal{X}}|_{Z_k^0}$  ce qui équivaut à la proposition 4.0.3 dans ce cas.

### 5. Théorème de Macaulay avec singularités modérées

Claire Voisin nous a signalé qu'une variante du théorème de Macaulay autorisant un peu de singularités devrait suivre en adaptant [46, pp. 427-428]. Mettons en œuvre cette suggestion : après quelques généralités sur le complexe de Koszul, nous obtenons la propriété d'injectivité 5.2.2 en corollaire du résultat de dualité 5.2.1. Cela est suffisant pour montrer l'injectivité de l'application des périodes de  $\mathbb{V}_{\widetilde{U}}$  sur certaines strates de  $\widetilde{U}$ .

#### 5.1. Un lemme sur le complexe de Koszul d'une presque-intersection complète.

Soit  $D \in \mathbb{N}^*$  un entier positif. Soit  $G \subset H^0(X, L^D)$  un sous-espace de dimension  $n + 2$ . Notons  $\mathcal{G} \subset \mathcal{O}_X$  le faisceau d'idéaux engendré par  $G$ , et  $\Sigma \subset X$  le sous-schéma tel que  $\mathcal{O}_{\Sigma} = \mathcal{O}_X/\mathcal{G}$ .

Posons  $A = A(X, L) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} H^0(X, L^k)$ . On appelle  $I$  l'idéal gradué de  $A(X, L)$  défini en degré  $k$  par  $I_k = H^0(\mathcal{G}(k))$ . On a  $(G) \subset I$ .

Soit  $K(G)_m^\bullet$  le complexe de Koszul en degré  $m$  :

$$H^0(L^{m-(n+2)D}) \otimes \Lambda^{n+2}G \rightarrow \dots \rightarrow H^0(L^{m-D}) \otimes G \rightarrow H^0(L^m)$$

où le premier terme du complexe est par convention en degré 0.

Considérons également, avec la même convention, sa version faisceautique  $\mathcal{K}(G)_m^\bullet$  :

$$\mathcal{O}_X(L^{m-(n+2)D}) \otimes \Lambda^{n+2}G \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{O}_X(L^{m-D}) \otimes G \rightarrow \mathcal{O}_X(L^m)$$

L'hypercohomologie de ce complexe de faisceaux est décrite par le lemme suivant.

**Lemme 5.1.1.** *Si  $\Sigma \subset X$  est artinien et localement d'intersection complète, alors, pour tout  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{H}^i(\mathcal{K}(G)_m^\bullet) = 0$  pour  $i \neq n + 2, n + 1$  et*

$$\mathbb{H}^{n+2}(\mathcal{K}(G)_m^\bullet) \simeq \mathbb{H}^{n+1}(\mathcal{K}(G)_m^\bullet) \simeq \bigoplus_{P \in |\Sigma|} \mathcal{O}_{\Sigma,P}. \tag{5.1.1}$$

*Démonstration.* Le support  $|\Sigma|$  de  $\Sigma$  consiste en un nombre fini de points de  $X$  et

$$\mathcal{O}_\Sigma = \bigoplus_{P \in |\Sigma|} \mathcal{O}_{\Sigma,P}$$

est une somme de faisceaux gratte-ciel. Par abus de langage on identifie  $\mathcal{O}_{\Sigma,P}$  et l'algèbre artinienne locale de  $\Sigma$  en  $P$ . Ensuite, pour tout  $P \in |\Sigma|$ , désignant par  $\mathfrak{m}_P \subset \mathcal{O}_{X,P}$  l'idéal maximal, on a  $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{G}_P/\mathfrak{m}_P \mathcal{G}_P = n + 1$  et toute famille  $(g_0, \dots, g_n)$  dans  $\mathcal{G}_P$  induisant une base de  $\mathcal{G}_P/\mathfrak{m}_P \mathcal{G}_P$  est une suite régulière dans  $\mathcal{O}_{X,P}$  engendrant  $\mathcal{G}_P$  voir par exemple [28, Thm 129]. On peut donc choisir une base  $(g_1, \dots, g_n, g_{n+1})$  de  $G$  de sorte que  $(g_1, \dots, g_n)$  est une suite régulière engendrant  $\mathcal{G}_P$ . Dans la catégorie dérivée  $D^b(\text{Mod}(\mathcal{O}_{X,P}))$  on a donc

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(G)_{0,P}^\bullet &= \mathcal{K}(g_{1,P}, \dots, g_{n+1,P})_0^\bullet \otimes \mathcal{K}(g_{n+2,P})_0^\bullet \\ &\simeq \mathcal{O}_{\Sigma,P}[-n-1] \otimes^L \mathcal{K}(g_{n+2,P})^\bullet \\ &\simeq (\mathcal{O}_{\Sigma,P}[-n-1] \xrightarrow{0} \mathcal{O}_{\Sigma,P}[-n-2]) \end{aligned}$$

puis  $H^{n+1}(\mathcal{K}(G)_{0,P}^\bullet) \simeq H^{n+2}(\mathcal{K}(G)_{0,P}^\bullet) \simeq \mathcal{O}_{\Sigma,P}$  comme  $\mathcal{O}_{X,P}$ -modules, les autres faisceaux de cohomologie étant nuls. Par suite, les faisceaux de cohomologie non nuls de  $\mathcal{K}(G)_m^\bullet$  sont les gratte-ciels  $H^{n+1}(\mathcal{K}(G)_m^\bullet) \simeq H^{n+2}(\mathcal{K}(G)_m^\bullet) \simeq \bigoplus_{P \in |\Sigma|} \mathcal{O}_{\Sigma,P}$  puisque  $\mathcal{K}(G)_0^\bullet$  est acyclique hors de  $|\Sigma|$ . La suite spectrale d'hypercohomologie de  $\mathcal{K}(G)_m^\bullet$  n'a donc qu'un seul terme non nul en  $E_1$  qui est  $d_1 : H^0(H^{n+1}(\mathcal{K}(G)_m^\bullet)) \rightarrow H^0(H^{n+2}(\mathcal{K}(G)_m^\bullet))$  et  $d_1 = 0$  car c'est le cas après localisation. Donc, pour tout  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{H}^i(\mathcal{K}(G)_m^\bullet) = 0$  pour  $i \neq n + 2, n + 1$  et

$$\mathbb{H}^{n+2}(\mathcal{K}(G)_m^\bullet) \simeq \mathbb{H}^{n+1}(\mathcal{K}(G)_m^\bullet) \simeq \bigoplus_{P \in |\Sigma|} \mathcal{O}_{\Sigma,P}. \tag{5.1.2} \quad \square$$

Par ailleurs, on a la filtration bête de  $\mathcal{K}(G)_0$  définie par

$$\sigma_{\geq p} \mathcal{K}(G)^\bullet = \mathcal{O}_X(L^{-(n+1-p)D}) \otimes \Lambda^{n+1-p}G \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{O}_X.$$

Cette filtration décroissante induit une filtration sur  $\mathbb{H}^*(\mathcal{K}(G)_m^\bullet)$  et la suite spectrale correspondante a un terme  $E_1^{p,q} = H^q(Gr_\sigma^p(\mathcal{K}(G)_m^\bullet))$ . Elle dégénère en  $E_{n+3}$ . On remarque également que  $(E_1^{\bullet,0}, d_1) = K(G)_m^\bullet$ , de sorte que  $E_2^{p,0} = H^p(K(G)_m^\bullet)$ . Notamment,  $E_2^{n+2,0} = H^{n+2}(K(G)_m^\bullet) = (R/(G))_m$  et une variation légère de la preuve du lemme 5.1.1 permet de voir que  $G$  a une suite régulière de longueur  $n + 1$  et donc que  $E_2^{p,0} = H^p(K(G)_m^\bullet) = 0$  pour  $p \leq n$ .

**5.2. Dualité de Macaulay pour des hypersurfaces de  $\mathbb{P}^{n+1}$  à singularités isolées quasihomogènes.** On se place dans le cas particulier  $X = \mathbb{P}^{n+1}$ . Soit  $f \in H^0(\mathbb{P}^{n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(d)) - \{0\}$  telle que l'hypersurface  $X_f := \{f = 0\}$  n'ait que des singularités isolées quasi-homogènes. On considère  $G \subset H^0(\mathbb{P}^{n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(d - 1))$  le sous-espace vectoriel engendré par les dérivées partielles de  $f$ , et  $(G) = J$  est alors l'idéal jacobien de  $f$ . Avec les notations précédentes,  $D = d - 1$ , et  $\Sigma \subset X_f$  s'identifie au sous-schéma artinien de  $X$  de support  $X_f^{sing}$  défini par l'annulation du premier jet de  $f$ ,  $I$  à l'idéal de  $A$  s'annulant sur  $\Sigma$  et  $\mathcal{G} = \mathcal{J}_\Sigma$  s'identifie, après introduction de coordonnées locales, à l'idéal de Tjurina de la fonction correspondant à  $f$ . Puisque les singularités de  $X_f$  sont quasi-homogènes, les idéaux de Milnor et de Tjurina coïncident et donc  $\Sigma$  est intersection complète locale.

Si  $l \in \mathbb{Z}$ , on note

$$ev_l : H^0(\mathbb{P}^{n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(l)) \rightarrow H^0(\mathbb{P}^{n+1}, \mathcal{O}_\Sigma(l))$$

la flèche induite par la surjection de faisceaux  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}} \rightarrow \mathcal{O}_\Sigma$ .

On note enfin  $\sigma = (n + 2)(d - 2)$ .

Sur l'espace projectif  $\mathbb{P}^{n+1}$ , les faisceaux inversibles n'ont de cohomologie qu'en degré 0 ou  $n + 1$ , on en déduit l'annulation de la plupart des termes de la suite spectrale introduite en 5.1 : on a  $E_r^{p,q} = 0$  sauf si  $q = 0$  ou  $q = n + 1$ , et donc les seules flèches  $d_r$  non nulles sont les flèches  $d_1$  et la flèche  $d_{n+2} : E_{n+2}^{0,n+1} \rightarrow E_{n+2}^{n+2,0}$ .

**Lemme 5.2.1.** *La flèche  $d_{n+2} : E_{n+2}^{0,n+1} \rightarrow E_{n+2}^{n+2,0}$  induit un isomorphisme entre  $(I/(G))_{\sigma-m}^\vee$  et  $(I/(G))_m$ .*

*Démonstration.* Cette flèche induit un isomorphisme entre sa coimage et son image. Il suffit de calculer ces deux espaces.

*Première étape : l'image de  $d_{n+2}$  dans  $E_{n+2}^{n+2,0} = R/(G)_m$  est  $(I/(G))_m$ .*

On a

$$\begin{aligned} \text{Im}d_{n+2} &= \ker \left( E_{n+2}^{n+2,0} \twoheadrightarrow E_{n+3}^{n+2,0} \right) = \frac{\ker \left( E_1^{n+2,0} \twoheadrightarrow E_{n+3}^{n+2,0} \right)}{\ker \left( E_1^{n+2,0} \twoheadrightarrow E_{n+2}^{n+2,0} \right)} \\ &= \frac{\ker \left( E_1^{n+2,0} \twoheadrightarrow E_{n+3}^{n+2,0} \hookrightarrow \mathbb{H}^{n+2}(\mathcal{K}(G)_m^\bullet) \right)}{\ker \left( E_1^{n+2,0} \twoheadrightarrow E_{n+2}^{n+2,0} \right)} \end{aligned}$$

Or, la flèche composée

$$E_1^{n+2,0} \twoheadrightarrow E_2^{n+2,0} = E_{n+2}^{n+2,0} \twoheadrightarrow E_{n+3}^{n+2,0} \hookrightarrow \mathbb{H}^{n+2}(\mathcal{K}(G)_m^\bullet)$$

apparaissant au numérateur coïncide avec  $H^0(\mathcal{O}(m)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}/\mathcal{G}(m))$ . Son noyau est donc  $H^0(\mathcal{G}(m)) = I_m$ . D'autre part, au dénominateur, on a

$$\ker \left( E_1^{n+2,0} \twoheadrightarrow E_{n+2}^{n+2,0} \right) = \ker \left( E_1^{n+2,0} \twoheadrightarrow E_2^{n+2,0} \right) = \text{Im } d_1.$$

On en déduit

$$\text{Im } d_{n+2} = \frac{I_m}{\text{Im } d_1} = \frac{I_m}{(G)_m}.$$

Deuxième étape : la coimage de  $d_{n+2} : E_{n+2}^{0,n+1} \rightarrow E_{n+2}^{n+2,0}$  s'identifie par dualité de Serre à  $(I/(G))_{-m+(n+2)(d-2)}^\vee = (I/(G))_{\sigma-m}^\vee$ .

La suite spectrale duale  $((E_r^{p,q})^\vee, {}^t d_r)$  s'identifie par dualité de Serre à une renumérotation de la suite spectrale de la filtration bête de :

$$\omega_{\mathbb{P}^{n+1}}(L^{-m}) \rightarrow \omega_{\mathbb{P}^{n+1}}(L^{-m+d-1}) \otimes G^\vee \rightarrow \dots \rightarrow \omega_{\mathbb{P}^{n+1}}(L^{-m+(n+2)(d-1)}) \otimes \Lambda^{n+2}G^\vee$$

Le complexe obtenu en tensorisant par la droite complexe  $\Lambda^{n+2}G \simeq \mathbb{C}$  s'identifie à  $\mathcal{K}(G)_{-m+\sigma}^\bullet$  en utilisant  $\omega_{\mathbb{P}^{n+1}} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(n+2)$ . La première étape permet alors de conclure. □

**Corollaire 5.2.2.** Soit  $d > n + 2$ . Supposons que  $I/J_{\geq d-(n+2)}$  soit engendré en degré  $d - (n + 2)$ , en tant que module gradué. L'application linéaire induite par la multiplication

$$I/J_d \rightarrow \text{Hom}(A/J_{d-(n+2)}, I/J_{2d-(n+2)})$$

est injective.

*Démonstration.* Soit  $P$  un élément du noyau. On a, pour tout  $Q''' \in (A/J)_{d-n-2}$ ,  $PQ''' = 0 \pmod J$ . De là  $PQ'''Q'' = 0 \pmod J$  pour tout  $Q'' \in A/J_{\geq 0}$ . Puisque  $A/J_{\geq d-(n+2)}$  est engendré en degré  $d - (n + 2) > 0$ , il suit que  $PQ' = 0 \pmod J$  pour tout  $Q' \in A/J_{\geq d-(n+2)}$ . Comme  $\sigma - 2d + n + 2 = (n + 2)(d - 1) - 2d = nd - n - 2 \geq d - (n + 2)$  on a

$$\forall Q \in I/J_{d-n-2} \quad \forall Q' \in I/J_{\sigma-2d+n+2} \quad \langle Q; PQ' \rangle_{d-(n+2)} = 0$$

où  $\langle -; - \rangle_d$  désigne l'accouplement de dualité défini par  $d_{n+1}$  entre  $I/J_d$  et  $I/J_{\sigma-d}$  au lemme 5.2.1. Or on a, par functorialité de la dualité de Serre,

$$\langle Q; PQ' \rangle_{d-(n+2)} = \langle QQ'; P \rangle_{\sigma-d}.$$

Puisque  $I/J_{\geq d-(n+2)}$  est engendré en degré  $d - (n + 2)$ ,  $P$  est orthogonal à l'espace  $I/J_{\sigma-d}$  entier. Donc  $P = 0 \pmod J$ . □

Une preuve plus courte du corollaire 5.2.2 valable dans le cas d'une hypersurface avec un seul nœud nous a été communiquée par A. Otwinowska au moment où nous finissions la présente preuve.

Enfin, mentionnons pour terminer les résultats similaires suivants :

**Lemme 5.2.3.** *Si la flèche d'évaluation  $ev_m : H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(m)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_\Sigma(m))$  est surjective,  $H^{n+1}(K(G)_{\sigma-m}^\bullet) = 0$ .*

*Démonstration.* Au vu du lemme 5.1.1, reprenant les notations de la première étape de la preuve du lemme 5.2.1, on a aussi surjectivité de  $E_{n+3}^{n+2,0} \rightarrow \mathbb{H}^{n+2}(\mathcal{K}(G)_m^\bullet)$ . De ceci suit que  $E_2^{1,n+1} = 0$ . Or, par la seconde étape de la preuve du lemme 5.2.1,  $E_2^{1,n+1} \simeq H^{n+1}(K(G)_{\sigma-m}^\bullet)^\vee$ . □

**Corollaire 5.2.4.** *Soit  $m_0$  tel que  $ev_{m_0} : H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(m_0)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_\Sigma(m_0))$  soit surjective. Pour tout  $m \leq \sigma - m_0$ ,  $H^{n+1}(K(G)_m^\bullet) = 0$ .*

*Démonstration.* Soit  $m \leq \sigma - m_0$ . La flèche  $ev_{\sigma-m} : H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(\sigma - m)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_\Sigma(\sigma - m))$  est surjective. On peut donc conclure avec le lemme 5.2.3. □

Plus généralement, on a  $h^{n+1}(K(G)_m^\bullet) = h^1(\mathcal{J}_\Sigma(\sigma - m))$ .

## 6. Théorème de Torelli local sur les strates isosingulières

Soit  $n$  un entier pair strictement positif et  $X_f \subset \mathbb{P}^{n+1}$  une hypersurface de degré  $d$  à singularités isolées simples, de nombre de Tjurina total  $\tau(f) \leq d$ . Comme dans le cas où  $X_f$  est lisse, une déformation isosingulière de  $X_f$  fournit une variation de structure de Hodge dont la tige en  $X_f$  est  $H^{n+1}(\mathbb{P}^{n+1} - X_f)$ . Rappelons que  $H_f := H^{n+1}(\mathbb{P}^{n+1} - X_f)$  est pur de poids  $n + 2$  par la discussion de la section 4 et que sa filtration de Hodge vérifie

$$0 = F^{n+2} \subset F^{n+1} \subset \dots \subset F^1 = H^{n+1}(\mathbb{P}^{n+1} - X_f, \mathbb{C}).$$

La variation de structure de Hodge infinitésimale correspondante a été étudié par Dimca et Saito [18] et avec plus de détails dans le cas nodal par ces mêmes auteurs et Wotzlaw [20]. Dans cette section, nous extrayons de leur travail tous les renseignements dont nous aurons besoin en ajoutant quelques petits points supplémentaires. Ceci permet d'appliquer le résultat d'injectivité 5.2.2 et d'aboutir à la démonstration du théorème 1.



**6.1. Formule de Dimca–Saito–Wotzlaw pour les deux premiers termes de la filtration de Hodge.** Si  $y$  est un point singulier de  $X_f$ , on note comme [20, section 1.1]  $\tilde{\alpha}_{X_f,y}$  le plus petit zéro de la  $b$ -fonction de la singularité. Dans notre cas, la singularité est quasihomogène et on note  $w_1, \dots, w_{n+1}$  les poids correspondants. Alors, il est connu que  $\tilde{\alpha}_{X_f,y} = \sum_i w_i$ . Par exemple, pour une singularité  $A_1$ , on a  $\tilde{\alpha}_{X_f,y} = (n + 1)/2$ . Un examen des équations des singularités simples [2] montre que l'on a toujours  $\tilde{\alpha}_{X_f,y} > 1$ . Plus précisément, si  $n \geq 4$ , alors  $[\tilde{\alpha}_{X_f,y}] > 1$ , et si  $n = 2$ , alors  $[\tilde{\alpha}_{X_f,y}] = 1$ .

Lorsque  $n = 2$  on définit un idéal homogène  $I'$  de l'anneau des polynômes de  $n + 2$  variables de la façon suivante. Définissons d'abord comme [20, (2.1.4)] le faisceau d'idéaux  $\mathcal{I}'_{(1)} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$  cosupporté aux points singuliers  $y$  de  $X_f$  par

$$F_1 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3,y}(*X_f) = \mathcal{I}'_{(1)} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2X_f),$$

où le membre de gauche désigne la filtration de Hodge du  $\mathcal{D}$ -module  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(*X_f)$  correspondant au module de Hodge mixte sous-jacent à  $Rj_* \mathbb{Q}_{\mathbb{P}^3-X_f}$ . On pose alors  $I'_k = \Gamma(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}'_{(1)}(k))$  puis  $I' = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} I'_k$ .

Par [20, Theorem 2.2], on a :

**Proposition 6.1.1.**

$$Gr_F^{n+1} H^{n+1}(\mathbb{P}^{n+1} - X_f, \mathbb{C}) = A/J_{d-n-2},$$

$$Gr_F^n H^{n+1}(\mathbb{P}^{n+1} - X_f, \mathbb{C}) = \begin{cases} A/J_{2d-n-2} & \text{si } n \geq 4 \\ I'/J_{2d-n-2} & \text{si } n = 2 \end{cases}$$

Dans [20, Lemma 1.5] est énoncé que, pour les surfaces nodales,  $\mathcal{I}'_{(1)}$  est l'idéal des fonctions qui s'annulent sur les points singuliers de  $X_f$  (avec structure réduite). Il est facile de généraliser :

**Lemme 6.1.2.** *L'idéal  $\mathcal{I}'_{(1)}$  coïncide avec l'idéal de Tjurina :  $\mathcal{I}'_{(1)} = \mathcal{J}_\Sigma$ .*

*Démonstration.* Il s'agit de voir que  $F_1 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3,y}(*X_f) = (\frac{\partial h}{\partial x_1} \dots \frac{\partial h}{\partial x_n})h^{-2} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3,y}$  où  $h$  est une équation locale de  $X_f$  près de  $y$ . Or, d'après [20, (1.3.2)] (qui réfère à [39]), la filtration de Hodge sur  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3,y}(*X_f)$  est dans ce cas donnée par :

$$F_1 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3,y}(*X_f) = F_1 \mathcal{D}_{\mathbb{P}^3,y}(h^{-1} \mathcal{O}),$$

où  $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^3,y}$  est filtré par l'ordre de l'opérateur. En effet, suivant les notations de loc. cit.  $k_0 = 0$  et  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3,y}^{\geq 1} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3,y}$ . □

**Corollaire 6.1.3.** *L'idéal  $I'$  coïncide avec l'idéal  $I$  de la section 5.2.*

**6.2. Formule de Dimca–Saito pour le premier gradué de la connexion de Gauss–Manin de  $\mathbb{P}^{n+1} - X_f$ .** Il y a également une seconde filtration sur  $H^{n+1}(\mathbb{P}^{n+1} - X_f, \mathbb{C})$  la filtration par l'ordre du pôle notée  $P^\bullet$  et l'on a  $F^i \subset P^i$  [11].

Comme  $d \geq \tau(f)$ , le fibré  $L := O_{\mathbb{P}^{n+1}}(d)$  est  $\tau(f)$ -jet ample et par 3.4, la strate isosingulière  $S$  de  $X_f$  dans l'espace projectif  $|L|$  paramétrisant les hypersurfaces de degré  $d$  a pour espace tangent  $T_{[f]}S$  le noyau de  $ev_{[f]}$ , c'est-à-dire  $I/(f)_d$ . Le long de cette strate, la connexion de Gauss et Manin vérifie  $\nabla P^i \subset P^{i-1} \otimes \Omega_S^1$  du moins si  $\dim P^i$  est localement constante près de  $[f]$  ce qui est vrai sur un ouvert dense  $S' \subset S$  et [18] donne une formule pour  $Gr_P \nabla_\xi$  si  $\xi \in T_{[f]}S$  en termes de la partie libre du module de Brieskorn.

Ceci est exploité dans [20, Remarks 3.9] dont nous tirons la proposition suivante :

**Proposition 6.2.1.** *Le morphisme*

$$Gr_F \nabla : \xi \in T_{[f]}S \mapsto (Gr_F \nabla_\xi : Gr_F^{n+1} H_f \rightarrow Gr_F^n H_f)$$

*s'identifie par l'isomorphisme de la proposition 6.1.1 à  $-1$  fois la multiplication  $I/(f)_d \otimes A/J_{d-n-2} \rightarrow A/J_{2d-n-2}$  si  $n \geq 4$ .*

*Si  $n = 2$ , il s'identifie à  $-1$  fois la multiplication  $I/(f)_d \otimes A/J_{d-n-2} \rightarrow I/J_{2d-n-2}$ .*

*Démonstration.* En prenant garde au fait que la notation  $n$  correspond ici à ce qui est noté  $n - 1$  dans [20], cela résulte de [18] de la même façon que dans [20, Remarks 3.9], au moins sur l'ouvert  $S'$ . On conclut par passage à la limite.  $\square$

**6.3. Fin de la preuve du théorème 1.** Rappelons l'énoncé de la partie (2) du théorème 1.

**Proposition 6.3.1.** *Soit  $k > 0$ . Si  $d \geq n + 2 + k$ , la différentielle de la restriction de l'application de périodes de  $\mathbb{V}_{\widetilde{U}}$  à la strate  $\widetilde{Z}_k$  a pour noyau le tangent de l'orbite de  $PGL(n + 2)$ .*

*Démonstration.* Soient  $k$  et  $d$  comme dans l'énoncé et notons  $L = O_{\mathbb{P}^{n+1}}(d)$ .

On commence par se ramener de  $\widetilde{Z}_k$  à  $Z_k$ . Si  $[f] \in Z_k \subset |L|$ , l'espace tangent en  $[f]$  à  $Z_k$  est  $I/(f)_d$ .

— Par la proposition 4.0.3, il suffit de montrer que sur  $Z_k$ , l'application des périodes de la variation de structure de Hodge de poids  $n + 2$

$$R^{n+1}(p_1)_* \mathbb{Q}_{(Z_k \times X - \mathcal{X}_{Z_k})}$$

a une différentielle en  $[f]$  dont le noyau est l'espace tangent à la  $PGL(n + 2)$ -orbite de  $[f]$  dans  $|L|$ , c'est-à-dire  $J/(f)_d$ .

— Par 6.2.1, cette différentielle est donnée au signe près par une multiplication dans des algèbres de polynômes adéquates.

— Par le corollaire 5.2.2, son noyau est  $J/(f)_d$  dès lors que  $I/J$  est engendré en degré  $d - (n + 2)$ . Montrons donc ce dernier point.

Comme le faisceau  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(k - 1)$  est  $(k - 1)$ -jet-ample et que  $\text{long}(\mathcal{O}_\Sigma) = k$ , on a une surjection

$$H^0(\mathbb{P}^{n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(k - 1)) \rightarrow H^0(\mathbb{P}^{n+1}, \mathcal{O}_\Sigma(k - 1)),$$

et donc, puisque  $d \geq n + 2 + k$ , une surjection

$$H^0(\mathbb{P}^{n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(d - n - 3)) \rightarrow H^0(\mathbb{P}^{n+1}, \mathcal{O}_\Sigma(d - n - 3)),$$

ce qui entraîne l'annulation  $H^1(\mathbb{P}^{n+1}, \mathcal{I}_\Sigma(d - n - 3)) = 0$ . Comme le sous-schéma défini par  $\mathcal{I}_\Sigma$  est de dimension zéro, ceci entraîne par [31, 1.8.29] que  $\mathcal{I}_\Sigma$  est  $(d - n - 2)$ -régulier au sens de Castelnuovo-Mumford, et en particulier [31, 1.8] que  $\mathcal{I}_\Sigma(d - n - 2)$  est engendré par ses sections globales. Autrement dit, avec les notations de 5.2 et en particulier du corollaire 5.2.2, l'idéal  $I$  de  $A$  est engendré en degré  $d - (n + 2)$ , et donc  $I/J$  est engendré en degré  $d - (n + 2)$ . Par conséquent, le corollaire 5.2.2 s'applique : le noyau de la multiplication

$$I_d \rightarrow \text{Hom}(A/J_{d-(n+2)}, I/J_{2d-(n+2)})$$

est  $J_d$ . □

## 7. Application à la conjecture de Shafarevich sur l'Uniformisation

**7.1. Variétés propres sur  $\tilde{U}$ .** Dans ce paragraphe on reprend les notations de 3.1 et on ne suppose pas que  $X = \mathbb{P}^{n+1}$ . Rappelons qu'une variété complexe est holomorphiquement convexe si elle admet une *réduction de Cartan–Remmert*, à savoir un morphisme propre surjectif à fibres connexes de cette variété vers un espace complexe de Stein, voir [24].

Soit  $Y$  une variété connexe projective lisse,  $\phi : Y \rightarrow \tilde{U}$  un morphisme,  $y \in Y$  un point base dont l'image  $u := \phi(y)$  est dans  $\tilde{U}_0 \subset \tilde{U}$ , et  $X_u \subset X$  l'hypersurface lisse correspondante. La représentation  $\tilde{\rho} : \pi_1(\tilde{U}, u) \rightarrow O(H^n(X_u, \mathbb{Q}))$  construite à la proposition 3.1.1 induit une représentation

$$\phi^*\tilde{\rho} := \rho \circ \phi_* : \pi_1(Y, y) \rightarrow O(H^n(X_u, \mathbb{Q})).$$

Notons  $\tilde{Y}^{un} \rightarrow Y$  le revêtement universel de  $Y$  et

$$\tilde{Y}^\rho := \ker(\phi^*\tilde{\rho}) \backslash \tilde{Y}^{un}$$

le revêtement topologique de  $Y$  attaché à la représentation  $\phi^*\tilde{\rho}$ .

**Proposition 7.1.1.** *La variété  $\widetilde{Y}^\rho$  est holomorphiquement convexe.*

*Démonstration.* Ceci résulte des résultats de [23] modulo le fait que  $\{\phi^*\widetilde{\rho}\}$  est constructible absolu. Dans le cas présent, on peut simplement utiliser l’application des périodes pour construire la réduction de Cartan–Remmert.

La représentation  $\phi^*\widetilde{\rho}$  est sous-jacente à une VSH polarisable définie sur  $Y$  qui est  $\phi^*\mathbb{V}_{\widetilde{U}}$ . Notons  $\Gamma' = \phi^*\rho(\pi_1(Y, y))$ . L’application des périodes attachée à  $\phi^*\mathbb{V}_{\widetilde{U}}$  se relève à une application  $\Gamma'$ -équivariante  $\mathcal{P} : \widetilde{Y}^\rho \rightarrow \mathcal{D}$ . Comme  $\Gamma'$  agit proprement discontinûment sur  $\mathcal{D}$  puisque  $\Gamma'$  est discret, il suit que  $\mathcal{P}$  est propre. Considérons sa factorisation de Stein

$$\widetilde{Y}^\rho \xrightarrow{\alpha} R \xrightarrow{\beta} \mathcal{D},$$

où  $R$  est un espace complexe normal,  $\alpha$  est propre surjective à fibres connexes, et  $\beta$  finie.

Comme il n’existe pas d’application holomorphe horizontale  $M \rightarrow \mathcal{D}$  où  $M$  est compacte complexe ([27]), les fibres de  $\alpha$  sont les sous-espaces analytiques connexes fermés maximaux de  $\widetilde{Y}^\rho$  et donc  $R$  n’a pas de sous-espace complexe analytique compact de dimension positive.

Pour montrer que  $R$  est de Stein, on utilise la solution de Narasimhan du problème de Levi. On peut construire des fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  positives et exhaustives sur  $\mathcal{D}$  dont le hessien complexe est défini positif le long de la distribution horizontale de  $\mathcal{D}$  et il est aisé de les modifier pour construire une fonction d’exhaustion strictement plurisousharmonique sur  $R$ , voir [23] pour plus de détails.  $\square$

**Corollaire 7.1.2.** *Le revêtement universel  $\widetilde{Y}^{un}$  de  $Y$  est de Stein si l’application des périodes  $\mathcal{P} : \widetilde{Y}^\rho \rightarrow \mathcal{D}$  est finie.*

*Démonstration.* En effet dans ce cas  $\widetilde{Y}^\rho \xrightarrow{\sim} R$  est de Stein et tout revêtement topologique d’une variété de Stein est Stein.  $\square$

La discussion peut être résumée comme suit : si  $\phi : Y \rightarrow \widetilde{U}$  est finie, le revêtement universel de  $Y$  est de Stein sauf si  $Y$  contient une courbe  $C$  telle que  $\mathbb{V}_C$  a monodromie finie.

Notons  $m : \widetilde{U} \rightarrow U$  et  $m' : [\Gamma \backslash \mathcal{D}] \rightarrow \Gamma \backslash \mathcal{D}$  les applications canoniques vers les espace des modules grossiers des champs considérés. Notons qu’il existe une application holomorphe induite  $\mathcal{P}_{mod} : U \rightarrow \Gamma \backslash \mathcal{D}$  entre espaces de modules. Si  $\phi : Y \rightarrow \widetilde{U}$  est finie, alors  $\mathcal{P}$  est finie si et seulement si la restriction de  $\mathcal{P}_{mod}$  à  $Y_m := m \circ \phi(Y) \subset U$  est finie.

Cette observation fournit un premier critère élémentaire pour prouver que  $\widetilde{Y}^{un}$  est de Stein sans supposer que  $X = \mathbb{P}^{n+1}$  et sans donc utiliser le théorème 1, mais seulement pour des variétés  $Y$  très particulières.

**Proposition 7.1.3.** *Soit  $\phi : Y \rightarrow \widetilde{U}$  finie. Supposons que :*

- (1) *l'application des périodes  $\mathcal{P} : \widetilde{Y}^\rho \rightarrow \mathcal{D}$  n'est pas constante ;*
- (2)  *$Y_m \subset U \subset |L|$  est un sous-espace projectif de  $|L|$  ou plus généralement a la propriété que toute application holomorphe de  $Y_m$  vers un espace complexe est constante ou finie.*

*Alors,  $\widetilde{Y}^{un}$  est de Stein.*

*Démonstration.* Considérons la restriction de  $\mathcal{P}_{mod} : U \rightarrow \Gamma \backslash \mathcal{D}$  à  $Y_m$ . Elle n'est pas constante car alors l'application des périodes  $\mathcal{P} : \widetilde{Y}^\rho \rightarrow \mathcal{D}$  serait également constante. Elle est donc finie et donc  $\mathcal{P}$  aussi. On conclut par le corollaire 7.1.2.  $\square$

Cette proposition s'applique par exemple dans le cas suivant, qui est celui étudié dans [34]. Soit  $3 \leq k \leq 6$ . Si  $L$  est  $k$ -jet ample, le complémentaire de  $U_k$  dans  $|L|$  est de codimension  $k + 1$  donc un sous-espace projectif générique de dimension au plus  $k$  de  $|L|$  est inclus dans  $U_k$ . Prenons pour  $Y_m$  un tel sous-espace projectif, et pour  $Y$  l'image réciproque de  $Y_m$  par le revêtement ramifié  $\eta : U'_k \rightarrow U_k$ . Alors  $Y$  est une sous-variété compacte lisse de  $U'_k$  portant une variation de structure de Hodge  $\mathbb{V}_Y$ . Son application des périodes n'est pas constante car elle est par exemple génériquement immersive par les théorèmes de Torelli infinitésimaux génériques classiques. La proposition s'applique donc et le revêtement universel de  $Y$  est de Stein.

**7.2. Cas où  $X = \mathbb{P}^{n+1}$  et preuve du corollaire 2.** Pour des variétés  $Y$  plus générales, on s'assure que l'application des périodes ne contracte pas de courbes en utilisant le théorème 1. Pour cela on doit supposer que  $X = \mathbb{P}^{n+1}$ . Rappelons l'énoncé du corollaire 2 :

**Corollaire 7.2.1.** *(corollaire 2) Hypothèses et notations comme au théorème 1. Soit  $Y$  une variété projective lisse et  $\phi : Y \rightarrow \widetilde{U}_k$  un morphisme fini. Alors le revêtement universel de  $Y$  est une variété de Stein.*

*Démonstration.* Par le corollaire 7.1.2, il suffit de montrer que la composée

$$P : Y \rightarrow \widetilde{U} \rightarrow \Gamma \backslash \mathcal{D}$$

est finie. Par le théorème 1, une courbe  $C \subset Y$  contractée par  $P$  est nécessairement dans une orbite de  $PGL(n + 2)$ . Or celles-ci sont affines car le groupe des automorphismes birationnels d'une variété de type général est fini et on déduit qu'elles ne peuvent pas contenir de courbe complète. Ceci implique que  $P$  est finie et le corollaire 7.1.2 permet de conclure.  $\square$

**Références**

- [1] J. Amorós, M. Burger, K. Corlette, D. Kotschick and D. Toledo, *Fundamental groups of compact Kähler manifolds*, Mathematical Surveys and Monographs, 44, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996. Zbl 0849.32006 MR 1379330
- [2] V. Arnold, Normal forms of functions near degenerate critical points, the Weyl groups of  $A_k$ ,  $D_k$ , and  $E_k$  and Lagrangian singularities, *Functional Analysis and its applications*, **6** (1972), 254–272. Zbl 0278.57011 MR 356124
- [3] V. Arnold, S. Gusein-Zade and A. Varchenko, *Singularités des applications différentiables I*. Éditions Mir, 1986.
- [4] M. Artin, Algebraic construction of Brieskorn's resolutions, *Journ. of Alg.* **29** (1974), 330–348. Zbl 0292.14013 MR 354665
- [5] A. Beauville, Le groupe de monodromie des familles universelles d'hypersurfaces et d'intersections complètes in *Complex analysis and Algebraic Geometry*, 8–18, Lect. Notes in Math., 1194, Springer, Berlin, 1986. Zbl 0603.14011 MR 855873
- [6] E. Brieskorn, Singular elements of semi-simple algebraic groups, *Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970)*, 2, 279–284. Gauthier-Villars, Paris, 1971. Zbl 0223.22012 MR 437798
- [7] M. Burger, Fundamental Groups of Kähler Manifolds and Geometric Group Theory, Séminaire Bourbaki, *Astérisque* **339**, (2011), Exp. No. 1022. MR 2906358
- [8] D. M. Burns and J. M. Wahl, Local contributions to global deformations of surfaces, *Inv. Math.* **26** (1974), 67–88. Zbl 0288.14010 MR 349675
- [9] J. Carlson and D. Toledo, Discriminant complements and kernels of monodromy representations, *Duke Math. J.* **97** (1999), 621–648. Zbl 0978.14007 MR 1682991
- [10] P. Deligne, Théorie de Hodge, II, *Publ. Math. IHES* **40** (1971), 5–58 ; Théorie de Hodge, III, *Publ. Math. IHES* **44** (1975), 5–77. Zbl 0219.14007 MR 498551 ; Zbl 0237.14003 MR 498552
- [11] P. Deligne and A. Dimca, Filtration de Hodge et par l'ordre du pôle pour les hypersurfaces singulières, *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup.* **23** (1990), 645–656. Zbl 0743.14028 MR 1072821
- [12] P. Deligne, P. Griffiths, J. Morgan and D. Sullivan, Real Homotopy Theory of Kähler Manifolds, *Invent. math.* **29** (1975), 245–274. Zbl 0312.55011 MR 382702
- [13] P. Deligne and G. D. Mostow, Monodromy of hypergeometric functions and non-lattice integral monodromy, *Publ. Math. I.H.E.S* **63** (1986), 5–89. Zbl 0615.22008 MR 849651
- [14] A. Dimca, *Singularities and Topology of Hypersurfaces*, Springer, 1992. Zbl 0753.57001 MR 1194180
- [15] A. Dimca, *Sheaves and Topology*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. Zbl 1043.14003 MR 2050072
- [16] A. Dimca, Syzygies of Jacobian ideals and defects of linear systems, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie*, **56** (104) (2013), no. 2, 191–203. Zbl 1299.14001 MR 3098166
- [17] A. Dimca and R. Rosian, The Samuel stratification of the discriminant is Whitney regular, *Geometriae Dedicata* **17** (1984), no. 2, 181–184. Zbl 0557.57010 MR 771194
- [18] A. Dimca and M. Saito, A generalization of Griffiths' theorem on rational integrals, *Duke Math. J.* **135** (2006), 303–326. Zbl 1117.14012 MR 2267285



- [19] A. Dimca and M. Saito, *Graded duality of Koszul complexes associated with certain homogeneous polynomials*, 2014. arxiv:1212.1081
- [20] A. Dimca, M. Saito and L. Wotzlaw, A generalization of Griffiths' theorem on rational integrals, II, *Michigan Math. J.* **58** (2009), 603–625. Zbl 1192.14009 MR 2595556
- [21] A. Dimca and G. Sticlaru, Koszul complexes and pole order filtrations, *Proc. Edinb. Math. Soc. (2)*, **58** (2015), no. 2, 333–354. Zbl 06443147 MR 3341443
- [22] P. Eyssidieux, La caractéristique d'Euler du complexe de Gauss–Manin, *J. reine angew. Math* **490** (1997), 155–212. Zbl 0886.32013 MR 1468929
- [23] P. Eyssidieux, Sur la convexité holomorphe des revêtements linéaires réductifs d'une variété projective algébrique complexe, *Inv. Math.* **156** (2004), 503–564. Zbl 1064.32007 MR 2061328
- [24] P. Eyssidieux, Lectures on the Shafarevich Conjecture on uniformization dans *Uniformisation des variétés complexes*, M. Brunella, S. Dumitrescu, L. Meersseman, A. Glutsyuk, M. Nicolau, (éditeurs). Panoramas et Synthèses, 34–35, Société Mathématique de France, 101–148 (à paraître), 2011. Zbl 1288.32025 MR 3088903
- [25] W. Goldman and J. Millson, The deformation theory of representations of fundamental groups of compact Kähler manifolds, *Publ. Math. I.H.E.S* **67** (1988), 43–96. Zbl 0678.53059 MR 972343
- [26] P. Griffiths, On the periods of certain rational integrals, I, II, *Annals of Math.* **90** (1969), 460–541. Zbl 0215.08103 MR 260733
- [27] P. Griffiths, Periods of integrals on algebraic varieties, III, *Publ. Math. IHES* **43** (1973), 125–180. Zbl 0212.53503 MR 282990
- [28] I. Kaplansky, *Commutative Rings*, 2nd ed., The University of Chicago Press, 1974. Zbl 0296.13001 MR 345945
- [29] J. Kollár and S. Mori, *Birational geometry of algebraic varieties*, Cambridge Tracts in Math., 134, Cambridge Univ. Press, 1998. Zbl 1143.14014 MR 1658959
- [30] R. Laza, The moduli space of cubic fourfolds via the period map, *Annals of Math.* **172** (2010), no. 1, 673–711. Zbl 1201.14026 MR 2680429
- [31] R. Lazarsfeld, *Positivity in Algebraic Geometry I, II*, Ergebnisse der Mathematik, Springer-Verlag, 2004. Zbl 1093.14501 MR 2095471
- [32] E. Looijenga, *Isolated singular points in complete intersection singularities* London Math. Soc. Lecture Notes Series, 77, Cambridge University Press, 1984. Zbl 1272.14002 MR 747303
- [33] E. Looijenga, The period map for cubic fourfolds, *Invent. Math.* **177** (2009), no. 1, 213–233. Zbl 1177.32010 MR 2507640
- [34] D. Mégy, Sections hyperplanes à singularités simples et exemples de Variations de Structure de Hodge, *Math. Ann.* **353** (2012), 633–661. Zbl 1254.14013 MR 2915551
- [35] B. Noohi, Fundamental groups of algebraic stacks, *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu* **3** (2004), 69–103. Zbl 1052.14001 MR 2036598
- [36] B. Noohi, *Foundations of topological stacks*, 2005. arXiv:math/0503247
- [37] M. Saito, Modules de Hodge Polarissables, *Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto* **24** (1988), 849–995. Zbl 0691.14007 MR 1000123

- [38] M. Saito, Mixed Hodge Modules, *Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto* **26**, 221–333. Zbl 0727.14004 MR 1047415
- [39] M. Saito, On the Hodge filtration of Hodge Modules, *Moscow Math. J.* **9** (2009), 151–181. Zbl 1196.14015 MR 2567401
- [40] A. Selberg, On discontinuous groups in higher-dimensional symmetric spaces in *Contributions to Function Theory*, 161–183, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1960. Zbl 0201.36603 MR 130324
- [41] C. Simpson, Constructing variations of Hodge structures using Yang-Mills theory and applications to uniformization, *Journal of the A.M.S.* **1** (1988), 867–918. Zbl 0669.58008 MR 944577
- [42] C. Simpson, Higgs bundles and local systems, *Publ. Math. I.H.E.S* **75** (1992), 5–95. Zbl 0814.32003 MR 1179076
- [43] C. Simpson, Some Families of Local Systems Over Smooth Projective Varieties, *Annals of Math.* **138** (1993), 337–425. Zbl 0813.14014 MR 1240576
- [44] C. Simpson, The construction problem in Kähler geometry in *Different faces of geometry*, 365–402, Springer, 2004. Zbl 1064.32013 MR 2103668
- [45] J. Steenbrink, Limits of Hodge Structures, *Invent. Math.* **31** (1976), 229–257. Zbl 0303.14002 MR 429885
- [46] C. Voisin, *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*, Cours Spécialisés, 10, Soc. Math. Fr., 2002. Zbl 1032.14001 MR 1988456

Received December 02, 2013

P. Eyssidieux, Institut Universitaire de France, Université de Grenoble, Institut Fourier.  
100 rue des Maths, BP 74, 38402 Saint Martin d’Hères Cedex, France  
E-mail: philippe.eyssidieux@ujf-grenoble.fr

D. Mégy, Université de Lorraine, CNRS. Institut Élie Cartan de Lorraine, UMR 7502,  
Vandoeuvre-lès-Nancy, 54506, France  
E-mail: damien.megy@univ-lorraine.fr

