Ein Nomogramm für die Gleichung

Autor(en): **Hess, A.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **1 (1946)**

Heft 1

PDF erstellt am: **30.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-1194

Ein Nomogramm für die Gleichung

$$\frac{a}{\cos\alpha} + \frac{b}{\sin\alpha} = c$$

Man begegnet dieser Gleichung bei der Aufgabe (Fig. 1): Durch einen Punkt $P(a, b)$ im ersten Quadranten eines rechtwinkligen Koordinatensystems ist eine Gerade so zu legen, daß die Strecke AB zwischen den Koordinatenachsen eine vorgeschriebene Länge c hat.

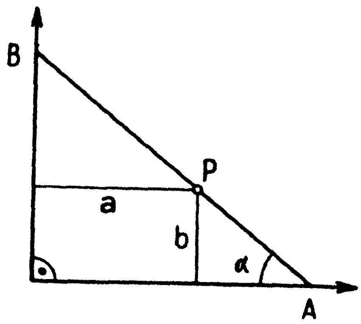

Fig. 1

Im Falle $a \neq b$ wird die Auflösung dieser Gleichung auf eine Gleichung vierten Grades in $\sin\alpha$ oder $\cos\alpha$ führen. Man kann nun aber ein einfaches Nomogramm entwerfen, aus dem gute Näherungswerte für α gefunden werden können, die man dann mit der Regula falsi verbessern kann. Zu diesem Zwecke schreiben wir die Gleichung in der Form

$$\frac{b}{c} + \frac{a}{c} \cdot \operatorname{tg}\alpha = \sin\alpha\,. \tag{1}$$

Dies erinnert an die bekannte «Grundform» in der Nomographie:

$$f_1 + f_2 \cdot f_3 = g_3\,. \tag{2}$$

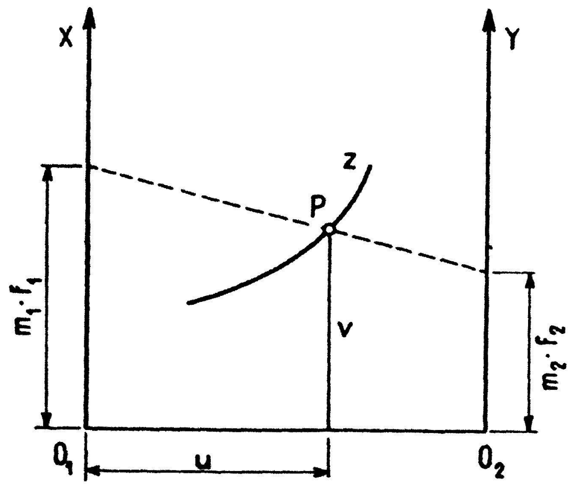

Fig. 2

Darin ist f_1 eine Funktion von x, f_2 eine Funktion von y; f_3 und g_3 sind je Funktionen einer dritten Veränderlichen z. Formen vom Typ (2) können dargestellt werden durch eine Rechentafel mit zwei parallelen geradlinigen Trägern für f_1 und f_2 und einem krummlinigen Träger für f_3, g_3, dessen Punkte die Bezifferung z tragen (Fig. 2). Nach den Lehrbüchern über Nomographie, z. B. LIPKA: Graphical and mechanical computation (Wiley, New York), besteht die Rechenvorschrift zur Herstellung der Tafel im folgenden. Man setzt

$$X = m_1 \cdot f_1 \quad \text{(auf der } X\text{-Achse durch } O_1\text{)}.$$

$$Y = m_2 \cdot f_2 \quad \text{(auf der } Y\text{-Achse durch } O_2\text{)}.$$

Die Punkte der Kurve für z werden bestimmt aus

$$u = \frac{m_1 a f_3}{m_1 f_3 + m_2} \quad \text{und} \quad v = \frac{m_1 m_2 g_3}{m_1 f_3 + m_2}. \tag{3}$$

Darin bedeuten m_1, m_2 die Moduln der Skalen und a die Entfernung $O_1 O_2 = a$, alle drei Größen in cm gemessen.

Vergleichen wir nun (1) mit (2), so erkennen wir: $f_1 = \frac{b}{c}$; $f_2 = \frac{a}{c}$; $f_3 = \operatorname{tg}\alpha$; $g_3 = \sin\alpha$.

Wir wählen $m_1 = m_2 = a = 10$ cm. Jetzt lauten die Gleichungen (3):

$$X = 10 \cdot \frac{b}{c} \qquad u = \frac{10 \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha}$$
$$Y = 10 \cdot \frac{a}{c} \qquad \left. v = \frac{10 \sin\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha} \right\} P. \tag{4}$$

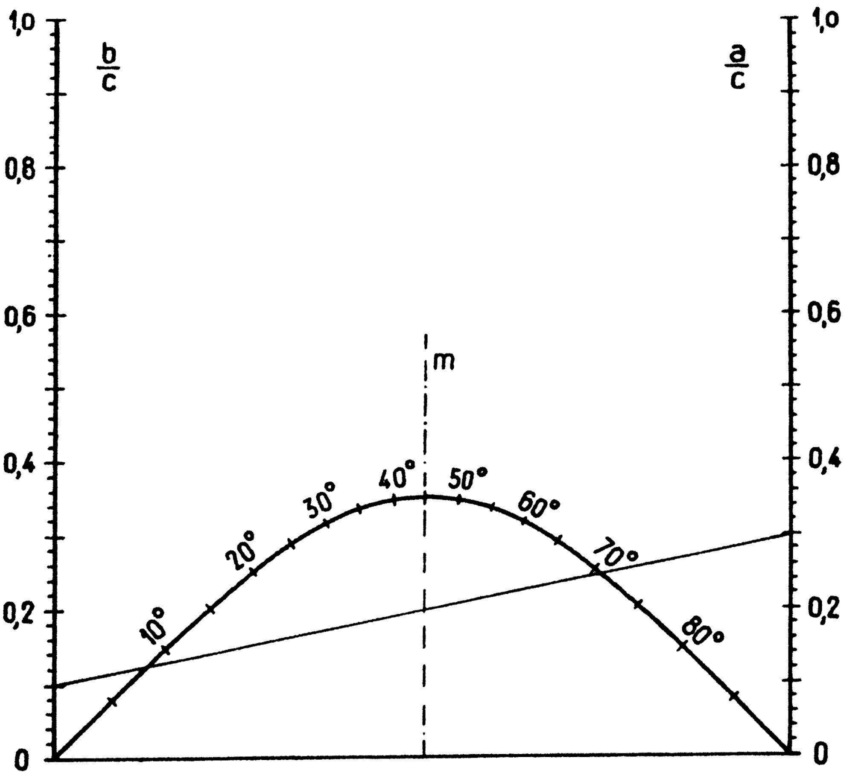

Fig. 3

Mit Hilfe dieser Gleichungen könnte das Nomogramm (Fig. 3, etwas verkleinert) hergestellt werden. Die Punkte (u; v) erhalten die Bezifferung α. Die Kurve hat

aber Eigenschaften, welche die Herstellung erleichtern, im besonderen die Berechnung der Koordinaten (u; v) ersparen.

a) Die Kurve ist *symmetrisch* in bezug auf die mittlere, zur X- und Y-Achse parallelen Linie m; denn berechnet man u_1 und u_2 für die Winkel α und $90^0 - \alpha$, dann erhält man $u_2 = a - u_1$ und $v_1 = v_2$.

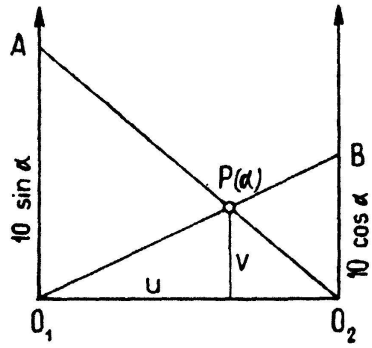

Fig. 4

b) Die Kurve kann durch *zwei Strahlenbüschel* mit den Scheiteln O_1 und O_2 hergestellt werden (Fig. 4). Auf der X-Achse tragen wir von O_1 aus die Strecke $O_1A = 10 \cdot \sin\alpha$ und auf der Y-Achse die Strecke $O_2B = 10 \cdot \cos\alpha$ ab; dann schneiden sich die Strahlen O_1B und O_2A gerade im Punkte $P(\alpha)$, wie man aus der Ähnlichkeit gewisser Dreiecke sofort ersehen kann. Wählt man in der Überlegungsfigur 1 $a = 3$ cm, $b = 1$ cm und $c = 10$ cm, dann heißt die Gleichung $\frac{3}{\cos\alpha} + \frac{1}{\sin\alpha} = 10$. Sie hat die Lösungen $\alpha_1 = 8^0 15'$, $\alpha_2 = 70^0 32'$, wie die eingezeichnete Indexlinie in Figur 3 zeigt.

A. HESS, Zürich

Un problème de géométrie élémentaire

Tracer une droite passant par un point donné et par l'intersection inaccessible de deux droites

Dans les constructions de perspective, les points de fuite sont souvent inaccessibles; il est cependant commode de les utiliser dans les constructions. Voici quelques solutions simples de ce problème.

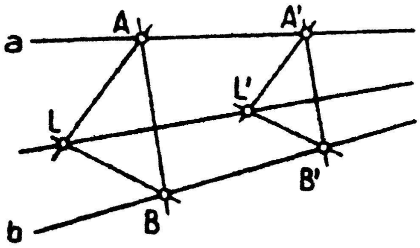

fig. 1

Soient a et b deux droites données d'intersection I inaccessible, et L le point donné par lequel doit passer un rayon du faisceau de sommet I.