Ein Satz von Galilei

Autor(en): **Krakowski, Viktor**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **1 (1946)**

Heft 2

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-1201

Ein Satz von Galilei

«Wenn vom untersten Punkte eines Kreises eine Sehne gezogen wird, die weniger als einen Quadranten spannt, und wenn von den Endpunkten dieser Sehne zwei Linien nach irgendeinem Punkte des zwischenliegenden Kreisbogens gezogen werden, so durchläuft ein Körper die beiden letztgenannten Strecken in kürzerer Zeit als die ganze Sehne und auch in kürzerer Zeit als die untere der beiden Strecken allein.»

Dieser heute allerdings nicht mehr merkwürdige, mit «Theorem XXII. Propos. XXXVI» überschriebene Satz ist den berühmten «Discorsi» entnommen und hier in der Übersetzung von Arthur von Oettingen wiedergegeben (OSTWALDS Klassiker, Heft 24, pag. 75, 3. Auflage 1913). In einer Anmerkung (pag. 135) des Übersetzers steht noch folgendes: «Die Genialität GALILEIS leuchtet aus der Handhabung des vorliegenden Theorems in solchem Grade hervor, daß wir den Leser dringend zum Studium der Aufgabe auffordern möchten. Man fasse dieselbe analytisch an; man wird große Mühe haben, während unseres Autors Methode bewundernswert dasteht... Freilich hat GALILEI drei Hilfssätze vorausgehen lassen, die die Beweisführung kürzer erscheinen lassen.» Das Vorlegen eines neuen einfachen Beweises bedarf daher keiner weiteren Rechtfertigung.

Seien A der tiefste, A' der höchste Punkt des in einer Vertikalebene liegend gedachten Kreises mit Mittelpunkt M und Radius r, ferner AB und BC zwei aufeinanderfolgende Sehnen, wobei $\sphericalangle AMC < 90^0$. Bezieht man sich auf die Fig. 1, so entnimmt man ihr folgende Fallzeiten:

1) Längs CB: $$t_{CB} = \sqrt{\frac{2}{g}}\,\frac{y_1}{\sqrt{x_1}},$$

2) längs des Streckenzuges CBA:

$$t_{CBA} = \sqrt{\frac{2}{g}}\left(\frac{y_1}{\sqrt{x_1}} + \frac{y_2}{\sqrt{x_1+x_2}+\sqrt{x_1}}\right),$$

3) längs BA: $$t_{BA} = \sqrt{\frac{2}{g}}\,\frac{y_2}{\sqrt{x_2}}.$$

4) längs CA: $$t_{CA} = \sqrt{\frac{2}{g}}\,\frac{y}{\sqrt{x_1+x_2}}.$$

Der Satz von GALILEI behauptet dann:

$$\text{I) } t_{CBA} < t_{CA} \quad \text{und} \quad \text{II) } t_{CBA} < t_{BA}.$$

Die beiden Fallzeiten t_{CA} und t_{BA} erweisen sich aber wegen $y_2^2 = 2r x_2$ und $y^2 = 2r(x_1+x_2)$ als gleich; es genügt daher, nur einen, zum Beispiel den zweiten Teil des GALILEIschen Satzes zu beweisen. Denkt man sich noch den positiven

Faktor $\sqrt{\frac{2}{g}}$ weggelassen, so bleibt zu zeigen, daß

$$\frac{y_1}{\sqrt{x_1}} + \frac{y_2}{\sqrt{x_1 + x_2} + \sqrt{x_1}} < \frac{y_2}{\sqrt{x_2}}.$$

Zu diesem Zweck untersucht man die Differenz

$$\Delta = \frac{y_2}{\sqrt{x_2}} - \frac{y_2}{\sqrt{x_1 + x_2} + \sqrt{x_1}}.$$

Es muß nun bewiesen werden können, daß $\Delta > \frac{y_1}{\sqrt{x_1}}$ ist.

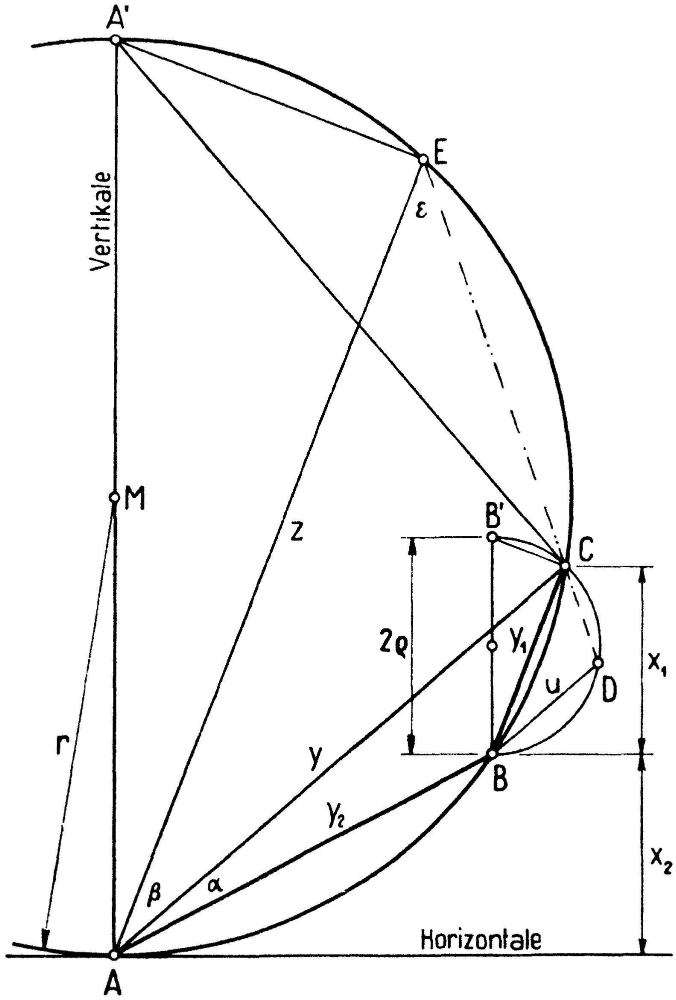

Fig. 1

Man ziehe in Fig. 1 $BB' \| AA'$ und $CB' \perp CB$, ferner zeichne man über BB' den Halbkreisbogen, der C enthält. Sei ϱ der Radius dieses Kreises, dann gilt $y_1^2 = 2\varrho x_1$, also $y_1 = \sqrt{2\varrho x_1}$, folglich

$$\frac{y_2}{\sqrt{x_2}} = \sqrt{\frac{r}{\varrho}} \cdot \frac{y_1}{\sqrt{x_1}}, \text{ daher}$$

$$\Delta = \frac{y_2(\sqrt{x_1 + x_2} + \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})}{\sqrt{x_2}(\sqrt{x_1 + x_2} + \sqrt{x_1})} = \sqrt{\frac{r}{\varrho}} \cdot \frac{y_1}{\sqrt{x_1}} \cdot \frac{\sqrt{x_1 + x_2} + \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1 + x_2} + \sqrt{x_1}}.$$

Wegen $y^2 = 2r(x_1 + x_2)$, also $y = \sqrt{2r(x_1 + x_2)}$, erhält man schließlich

$$\Delta = \frac{y_1}{\sqrt{x_1}} \cdot \frac{y + \sqrt{\frac{r}{\varrho}}\, y_1 - y_2}{\sqrt{\frac{\varrho}{r}}\, y + y_1}.$$

Nun muß gezeigt werden, daß der Zähler des zweiten Faktors größer ist als dessen Nenner. Setze zu diesem Zweck $\frac{r}{\varrho} y_1 = z$ und $\frac{\varrho}{r} y = u$, woraus $z : y = y_1 : u$ (1) folgt. Ferner ziehe in Fig. 1 $AE \parallel BC$ und $BD \parallel AC$ und verbinde A' mit E, dann erweisen sich AE als z und BD als u. Nun ist $\sqrt{\frac{r}{\varrho}}\, y_1 = \sqrt{z y_1}$ und $\sqrt{\frac{\varrho}{r}}\, y = \sqrt{u y}$, also wegen (1) $\underline{\sqrt{z y_1} : \sqrt{u y} = y_1 : u}$ (2), folglich (3) $\underline{\sqrt{z y_1} > \sqrt{u y}}$, weil $y_1 > u$.

Aus $\sphericalangle ACB = \sphericalangle CAE$ folgt $CE = AB$, daher $\varepsilon = \alpha + \beta$. Aus (1) ergibt sich ferner, daß die Dreiecke ACE und BDC ähnlich sind, daß also E, C, D in einer Geraden liegen, daher ist im Trapez $ACDB$ $\sphericalangle ACD = \varepsilon + \beta = 2\beta + \alpha$. Zieht man in der Fig. 2, die

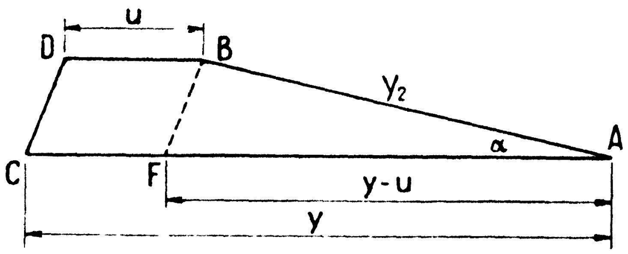

Fig. 2

dieses Trapez allein wiedergibt, $BF \parallel DC$, so muß der Winkel ABF unbedingt stumpf sein, denn $\sphericalangle ABF = 180^0 - \alpha - (2\beta + \alpha) = 180^0 - 2(\alpha + \beta)$ und $\alpha + \beta$ ist wegen der vorausgesetzten Beschränkung auf den ersten Quadranten sicher kleiner als 45^0. Daher $AF > AB$, also $y - u > y_2$ oder $y - y_2 > u$, das heißt aber: es ist der in Rede stehende Zähler $\underline{y + \sqrt{z y_1} - y_2 > \sqrt{z y_1} + u}$ (4).

Wendet man auf die Proportion (2) den Satz von der korrespondierenden Subtraktion an, so folgt $(\sqrt{z y_1} - \sqrt{u y}) : \sqrt{u y} = (y_1 - u) : u$, also wegen $\sqrt{y u} > u$ offenbar $\sqrt{z y_1} - \sqrt{u y} > y_1 - u$, woraus schließlich: $\underline{\sqrt{z y_1} + u > y_1 + \sqrt{u y}}$ (5).

Der Ausdruck rechts vom Ungleichheitszeichen in (5) ist aber der in Rede stehende Nenner. Die Gegenüberstellung von (4) und (5) erbringt das Gewünschte, nämlich daß der betreffende Zähler größer ist als der zugehörige Nenner, und damit ist der ganze Satz bewiesen.

Viktor Krakowski, Zürich

Kleine Mitteilungen

I. *Bemerkung zum Rationalmachen von Gleichungen mit Quadratwurzeln.* Irrationale Gleichungen mit Quadratwurzeln sucht man bekanntlich dadurch rational zu machen, daß man die Wurzeln möglichst auf einer Seite vereinzelt und beide Seiten der Gleichung ins Quadrat erhebt. Man hat nachher bloß zu untersuchen, ob die Lösungen