Bemerkungen zur normalen dimetrischen Axonometrie

Autor(en): **Hess, A.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **1 (1946)**

Heft 6

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-1212

«Ich kann nicht läugnen, daß der Dr. BERNOULLI in dem Calculo sehr wohl versiert seye, aber Er hat, soviel ich weiß, seine Wissenschaft niemahlen auff problemata, die einigen Nutzen haben, appliciert. Es scheinet, Er habe einen sonderbaren zu nichtswerthen Dingen geschickten Geist. Dem eintzigen Theil von des NEWTON Philosophie, der von keiner Wichtigkeit ist, und nicht zeiget, wie die Phaenomena naturae zu explicieren, hat er fleissig gestudirt und examiniert. Wann er wolle seine wissenschaft auff etwas nützliches applicieren, so wünschte ich, daß Ei dieses problema solvirte. Dr Leibnitz hat es tentiert, aber Er hat wüst gefehlt und konnte es nicht solviren etc.»

Aber der blinde Eifer der NEWTONIANER übersah, daß der Fortschritt der mathematischen Wissenschaften unzertrennlich mit der Entwicklung eines zweckmäßigen Kalküls verknüpft ist; und während die englische Mathematik im 18. Jahrhundert in ihrer Versteifung auf NEWTONS Fluxionsmethode in Stagnation verharrte, arbeitete JOHANN BERNOULLI als einer der gefeiertsten Lehrer des Jahrhunderts an der Ausgestaltung derjenigen Form der neuen Analysis, welche die von NEWTON begründete theoretische Physik erst eigentlich fruchtbar machte. J. O. FLECKENSTEIN, Basel

---

Bemerkungen zur normalen dimetrischen Axonometrie

Im folgenden wird eine einfache Konstruktion der Achsen x', y', z' und eine ebenso einfache Konstruktion der Achsen für jene Ellipsen gezeigt, welche (vergrößerte) Bilder jener Kreise sind, die in der xz- oder xy-Ebene, oder parallel dazu liegen.

1. Sind α, β, γ die Winkel der Achsen des räumlichen rechtwinkligen Koordinatensystems mit der Bildebene ABC (Fig. 1), dann bestehen bei dem meist verwendeten dimetrischen System die Beziehungen

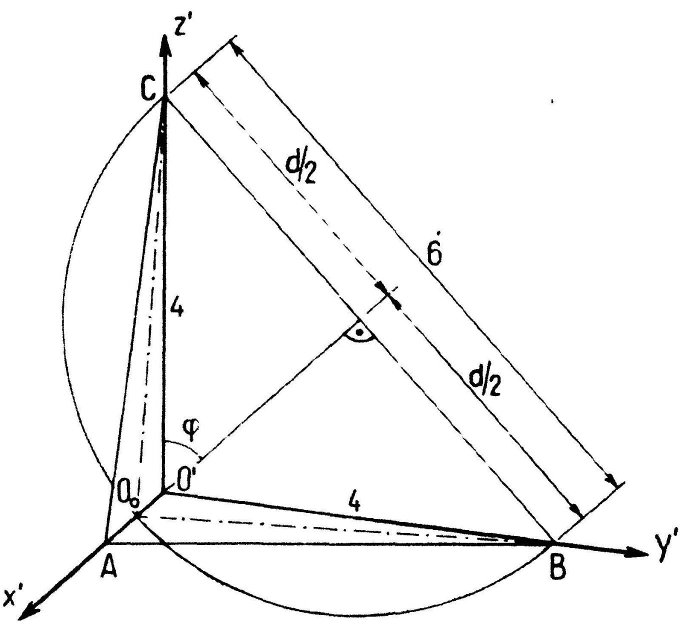

Fig. 1

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = 1:2:2 \quad \text{oder} \quad \cos^2\alpha : \cos^2\beta : \cos^2\gamma = 1:4:4$$

und allgemein

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2\,.$$

Hieraus folgt zum Beispiel:

$$\cos\beta = \frac{2}{3}\sqrt{2}\,. \tag{1}$$

Da für die y'- und z'-Achse die gleiche Bildlänge für die Längeneinheit gewählt werden kann, so können wir die Punkte B und C des Spurendreiecks ABC so legen, daß die Bildlängen $O'B$ und $O'C$ je gleich 4 cm sind. Das Dreieck $O'BC$ ist dann gleichschenklig, die Grundlinie sei d. *Die x'-Achse steht dann, als Höhe des Spurendreiecks, senkrecht dazu und halbiert BC.* Durch Umlegen des räumlichen rechtwinkligen Dreiecks OBC um die Hypotenuse BC in die Bildebene kommt dieses in die Lage BCO_0. Die Raumstrecke OB, die der Bildstrecke $O'B = 4$ cm entspricht, hat somit die Länge $O_0B = \frac{1}{2}\,d\sqrt{2}$. Somit ist $\frac{1}{2}d\sqrt{2}\cdot\cos\beta = 4$ oder (nach (1)) $\frac{1}{2}\,d\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{2} = 4$; somit $d = BC = 6$ cm.

Das heißt also: *Das gleichschenklige Dreieck $O'BC$ mit den Schenkeln $O'B = O'C$*

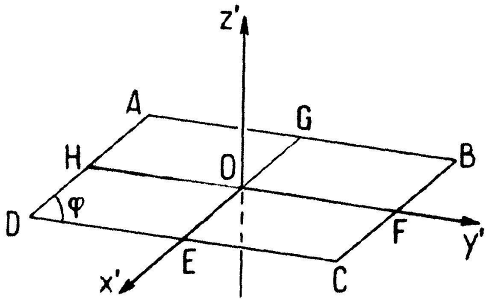

Fig. 2

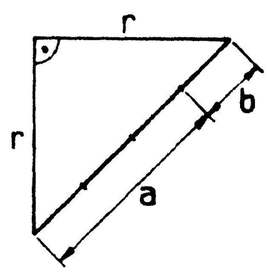

Fig. 3

$= 4$ cm *und der Grundlinie $BC = 6$ cm liefert mit der zur Grundlinie gehörigen Höhe gerade die gesuchten Richtungen der drei Achsen x', y', z'* (Fig. 1).

Bemerkenswert ist noch:

$$\sin\varphi = \frac{3}{4}\,. \tag{2}$$

2. Mit Hilfe der Gleichung (2) läßt sich nun auch eine sehr einfache Konstruktion der Halbachsen a und b jener Ellipsen finden, welche die Bilder von Kreisen in der xy- oder xz-Ebene sind. In Fig. 2 sei zum Beispiel $ABCD$ das Bild eines Quadrates, dessen Seiten zu den Koordinatenachsen parallel sind und das einem Kreise mit dem Radius r umschrieben ist. Die Verbindungslinien HF und EG der Seitenmitten dieses Quadrates sind dann zwei konjugierte Durchmesser der zu zeichnenden Ellipse; sie liegen in der y'- bzw. x'-Achse, und es ist im besonderen

$$HF = 2r \quad \text{und} \quad EG = r.$$

(Es handelt sich ja um «vergrößerte» Bilder.) Jetzt bestehen bekanntlich die Beziehungen

$$a^2 + b^2 = r^2 + \frac{1}{4}r^2 = \frac{5}{4}r^2 \qquad \underline{2ab = 2r\cdot\frac{r}{2}\sin\varphi = \frac{3}{4}r^2}\,,$$

daher

$$(a+b)^2 = 2r^2, \qquad (a-b)^2 = \frac{r^2}{4}\cdot 2\,.$$

Also $a + b = r\sqrt{2}$, $\quad a - b = \frac{1}{2}r\sqrt{2}$, oder $\underline{a = 3\cdot\frac{r}{4}\sqrt{2}}$ und $\underline{b = \frac{r}{4}\sqrt{2}}$. (3)

Die Halbachsen der Ellipse verhalten sich wie 3:1:

$$\underline{a : b = 3 : 1.} \tag{4}$$

Die *Lage* der großen Achse folgt aus $a \perp z'$. Die Längen a und b lassen sich aus (3) leicht konstruieren: *In dem rechtwinkligen Dreieck* (Fig. 3) *mit den Katheten r ist die Hypotenuse* $r\sqrt{2}$, *also a ist drei Viertel und b ein Viertel der Hypotenuse.*

Fig. 4 zeigt das fertige Bild der Ellipse. Macht man noch $O'K$ gleich der ganzen Hypotenuse $r\sqrt{2}$ (von Fig. 3) und $O'L$ gleich der halben Hypotenuse, dann ist KL die Tangente im Schnittpunkte M der einen Diagonale des Parallelogramms mit der Ellipse.

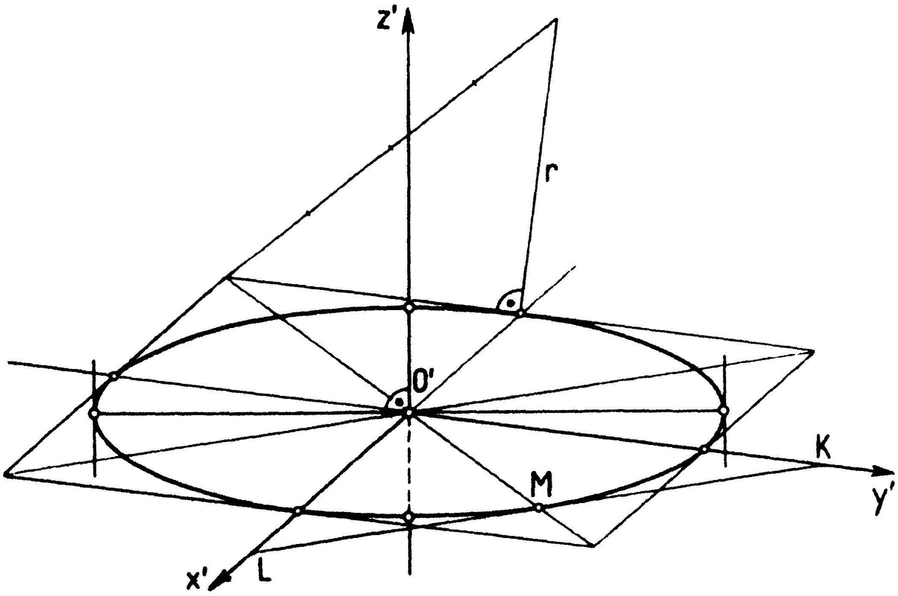

Fig. 4

Die Bilder von Kreisen in der y, z-Ebene, oder parallel dazu, zeigen keine Besonderheit, da sie ja in einen Rhombus mit den Seiten $2r$ eingezeichnet werden, dessen Diagonalen die Achsenrichtungen für die Ellipse liefern. Die kleine Achse fällt in die Richtung der x'-Achse. Trägt man übrigens auf den konjugierten Durchmessern, die zur y'- und z'-Achse parallel liegen, vom Mittelpunkte aus die Strecken $r\sqrt{2}$ ab, dann sind die Endpunkte dieser Strecken die Ecken des der Ellipse umschriebenen Rechtecks mit den Seiten $2a$ und $2b$. a ist natürlich auch hier $\frac{3}{4} r\sqrt{2} = 1{,}06\, r$, während $b = \frac{1}{4} r\sqrt{14} = 0{,}936\, r$ ist.

A. Hess, Zürich

Aufgaben

1. Die Aufgabe lautete: Ein reguläres Fünfeck zu zeichnen, dessen Seiten als gerade Linien (also eventuell in ihrer Verlängerung) der Reihe nach durch fünf in der Ebene gegebene Punkte hindurchgehen. Wann ist die Aufgabe lösbar? P. Finsler

Lösung: Ein Viereck B, C, D, E gestattet i. a. endlich viele umschriebene reguläre Fünfecke, ganz in Analogie mit der entsprechenden Quadrataufgabe (siehe El. Math., Bd. 1, Nr. 1, S. 1). Liegt ein fünfter Punkt A auf der übrigen Fünfeckseite a, so ist er von $BCDE$ abhängig. Man kann jedoch fragen: Wie muß das Viereck $ABCD$ beschaffen sein, damit es eine ganze Schar umschriebener Fünfecke gestattet? In diesem Falle ist die gestellte Aufgabe lösbar.