

Aufgaben

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **1 (1946)**

Heft 6

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Die Halbachsen der Ellipse verhalten sich wie 3:1:

$$\underline{a : b = 3 : 1.} \quad (4)$$

Die Lage der großen Achse folgt aus $a \perp z'$. Die Längen a und b lassen sich aus (3) leicht konstruieren: In dem rechtwinkligen Dreieck (Fig. 3) mit den Katheten r ist die Hypotenuse $r\sqrt{2}$, also a ist drei Viertel und b ein Viertel der Hypotenuse.

Fig. 4 zeigt das fertige Bild der Ellipse. Macht man noch $O'K$ gleich der ganzen Hypotenuse $r\sqrt{2}$ (von Fig. 3) und $O'L$ gleich der halben Hypotenuse, dann ist KL die Tangente im Schnittpunkte M der einen Diagonale des Parallelogramms mit der Ellipse.

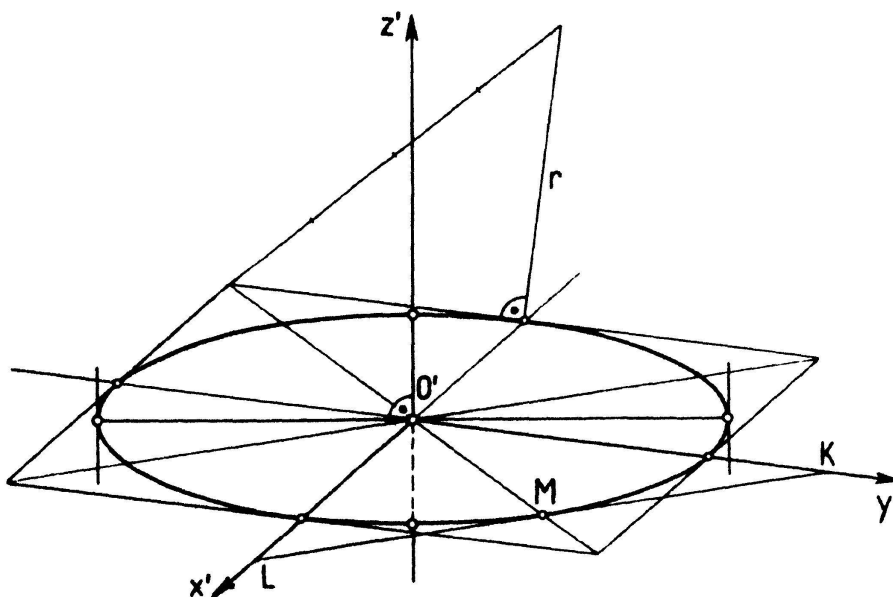


Fig. 4

Die Bilder von Kreisen in der y, z -Ebene, oder parallel dazu, zeigen keine Besonderheit, da sie ja in einen Rhombus mit den Seiten $2r$ eingezeichnet werden, dessen Diagonalen die Achsenrichtungen für die Ellipse liefern. Die kleine Achse fällt in die Richtung der x' -Achse. Trägt man übrigens auf den konjugierten Durchmessern, die zur y' - und z' -Achse parallel liegen, vom Mittelpunkte aus die Strecken $r\sqrt{2}$ ab, dann sind die Endpunkte dieser Strecken die Ecken des der Ellipse umschriebenen Rechtecks mit den Seiten $2a$ und $2b$. a ist natürlich auch hier $\frac{3}{4}r\sqrt{2} = 1,06r$, während $b = \frac{1}{4}r\sqrt{14} = 0,936r$ ist.

A. HESS, Zürich

Aufgaben

1. Die Aufgabe lautete: Ein reguläres Fünfeck zu zeichnen, dessen Seiten als gerade Linien (also eventuell in ihrer Verlängerung) der Reihe nach durch fünf in der Ebene gegebene Punkte hindurchgehen. Wann ist die Aufgabe lösbar? P. FINSLER

Lösung: Ein Viereck B, C, D, E gestattet i. a. endlich viele umschriebene reguläre Fünfecke, ganz in Analogie mit der entsprechenden Quadrataufgabe (siehe *El. Math.*, Bd. 1, Nr. 1, S. 1). Liegt ein fünfter Punkt A auf der übrigen Fünfeckseite a , so ist er von $BCDE$ abhängig. Man kann jedoch fragen: Wie muß das Viereck $ABCD$ beschaffen sein, damit es eine ganze Schar umschriebener Fünfecke gestattet? In diesem Falle ist die gestellte Aufgabe lösbar.

(I) *Hilfssatz*: 3 Kreise K_1, K_2, K_3 mögen sich in einem Punkte Z schneiden. Die drei übrigen Schnittpunkte seien Z_{12}, Z_{23}, Z_{31} . Man verbinde einen Punkt P_i auf K_i mit Z_{ik} und Z_{il} . Die Schnitte dieser Sekanten mit K_k und K_l seien P_k und P_l . Dann liegen P_k, Z_{kl}, P_l in einer Geraden. Durchläuft P_i ganz K_i , so sind alle Dreiecke $P_i P_k P_l$ ähnlich und haben denselben Umlaufsinn. In Z schrumpft das Dreieck auf einen Punkt zusammen. (I ergibt sich aus der bekannten Winkeleigenschaft des Sehnenvierecks $Z P_i Z_{ik} Z_{il}$.)

Wir benutzen auch die Umkehrung des Satzes, speziell für gleichschenklige Dreiecke:

(II) K_i und K_k mögen sich schneiden in $Z_{ik} = B$ und Z . P_i, P_k seien die Endpunkte einer gemeinsamen Sekante durch B ; C ein weiterer Punkt auf K_k . Bewegt sich P_k auf K_k und bestimmt man auf $P_k C$ die Strecke $P_k P_l = P_k P_i$ derart, daß der Winkel $P_i P_k P_l$ immer gleich bleibt, so beschreibt P_l einen Kreis K_l durch $C = Z_{kl}$ und Z . $P_i P_l$ geht durch den Schnittpunkt Z_{il} von K und K_l . Die Geraden $Z Z_{ik}$ und $Z Z_{kl}$ bilden den konstanten Winkel $P_i P_k P_l$ und $Z Z_{il}$ halbiert den Nebenwinkel (der zweite Schnitt mit K_k ist Mitte M_k des einen Bogens BC).

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Viereck $ABCD$ ergeben sich jetzt folgendermaßen:

Seien $a = P_5 P_1, b = P_1 P_2, c = P_2 P_3, d = P_3 P_4$ die gesuchten Fünfeckseiten durch A, B, C, D . Über AB errichte man einen der Ortskreise mit Winkel $\frac{3\pi}{5}$ ($= K_1$). Derjenige Ortskreis über BC , welcher Träger der Ecke P_2 ist, bestimmt sich dann eindeutig nach der Vorschrift: Man lege durch C die Parallele zur Tangente im Punkte B von K_1 . K_2 geht durch $B = Z_{12}, C$ und den Schnittpunkt R_2 der Parallelen mit der Geraden AB (aus dem Spezialfall $P_1 = A$).

Z sei der zweite Schnittpunkt von K_1 und K_2 . Nach (II) ist der Ort von P_3 ein Kreis K_3 durch $C = Z_{23}, Z$ und Z_{13} , wobei Z_{13} auf K_1 sich aus der Forderung bestimmt: $\text{arc } B Z_{13} = \frac{1}{2} \text{arc } Z_{13} A = \frac{2\pi}{5}$. Es ist daher notwendige und hinreichende Bedingung für $ABCD$, daß, ausgehend von mindestens einem Ortskreis über einer Seite, der dritte Ortskreis (durch C und D) sowohl durch Z als durch Z_{13} geht, wobei Kreise und Punkte nach Wahl des ersten Kreises eindeutig sind.

Ein derartiges Viereck hat bemerkenswerte Eigenschaften. Zunächst liegen P_5 und P_4 nach (II) auf Kreisen K_5 und K_4 durch A, Z, Z_{25} und D, Z, Z_{24} . Die Peripheriewinkel in beiden Ecken sind $\frac{3\pi}{5}$ und je ein Schenkel dieser Winkel geht durch einen festen Punkt (A bzw. D), also notwendig auch der gemeinsame Schenkel e durch den Schnittpunkt E^* der beiden Kreise K_5 und K_4 . Nach (I) schrumpft das Fünfeck in Z auf einen Punkt zusammen, wobei die Winkel erhalten bleiben. Dreht man daher eine Gerade von ZA aus schrittweise um $\frac{2\pi}{5}$ mit geeignetem festen Drehsinn und Drehpunkt Z , so geht sie der Reihe nach durch A, B, C, D, E^* . Die Gerade $Z Z_{il}$ halbiert den spitzen Winkel der Geraden $Z Z_{ik}$ und $Z Z_{kl}$. Daher liegen jeweils der Punkt Z , ein Diagonalschnittpunkt Z_{il} , eine Ecke Z_{mn} und die Bogenmitte M_k in gerader Linie.

Eine weitere Folge ist, daß die Mittelpunkte O_i der Kreise K_i ein reguläres Fünfeck bilden. Denn $O_i O_k$ steht senkrecht $Z Z_{ik}$, $O_i O_l$ senkrecht $Z Z_{il}$. Seiten und Diagonalen des Fünfecks $O_1 O_2 O_3 O_4 O_5$ haben also die geforderten Winkel. Das Mittelpunktseck läßt sich aus $O_1 O_2$ unmittelbar und wegen $O_2 O_3$ senkrecht ZC eindeutig zeichnen; ferner sind $O_1 O_2$ und Z durch die drei Punkte A, B, C allein (mehrdeutig) festgelegt. Die Fünfkreisfigur kann man sich aus einer regulären fünfzähligen Rosette entstanden denken, deren Zentrum aus dem Mittelpunkt des Fünfecks verschoben wurde.

Zusammenfassend können wir feststellen: Ein Viereck der Art $ABCD$ bestimmt einen fünften Punkt E^* . Die Ecken des umschriebenen Fünfecks wandern auf 5 Kreisen, die alle durch einen Punkt Z gehen und deren Mittelpunkte ein reguläres Fünfeck bilden. Jede Seite dreht sich um einen der Punkte A, B, C, D, E^* , jede Diagonale um den Schnittpunkt entsprechender Kreise. Einem Umlauf einer Ecke auf ihrem Kreise entspricht eine halbe Drehung jeder dieser Geraden. Daher gibt es genau ein Fünfeck

aus der Schar, für welches die fünfte Seite durch einen beliebigen fünften Punkt geht. Es sei noch bemerkt, daß das Fünfeck durch vier beliebige (nicht wie vorher speziell liegende) Punkte mit Hilfe des beweglichen Fünfecks durch drei der Punkte konstruierbar ist.

G. BALASTER

Teillösungen sandten ein: E. BEERENWINKEL (St. Gallen), H. SCHÜEPP (Zollikon). Letzterer löst die interessante Verallgemeinerung der von P. BUCHNER in Bd. 1, S. 1, behandelten Aufgabe. Der wesentliche Umstand der gestellten Aufgabe lag in der Frage: *Wann* ist sie lösbar? — Zur oben gegebenen Lösung bemerkt P. FINSLER noch: Das durch die Punkte A, B, C, D, E gehende reguläre Fünfeck kann konstruiert werden, wenn A, B, C, D die besprochene spezielle Lage haben und E beliebig gegeben wird. Analog kann auch ein Fünfeck von beliebig gegebener Gestalt durch fünf Punkte gelegt werden, wenn vier unter ihnen eine spezielle Lage besitzen. Es ergibt sich noch, daß bei der oben betrachteten Bewegung *jede* mit der Figur verknüpfte Gerade der Ebene sich um einen ihrer Punkte dreht und *jeder* Punkt auf einem durch Z gehenden Kreis wandert.

Literaturüberschau

LOUIS KOLLROS: *Cours de Géométrie projective*

rédigé par J. P. Sydler, éditions du Griffon, Neuchâtel 1946, 112 p., 35 fig.

Il y a près d'un siècle, les géomètres, quelque peu grisés par les succès de la géométrie projective, s'efforçaient de construire l'édifice de leur science en se piquant de renoncer à tout recours à la méthode analytique. Dans son ouvrage, au contraire, M. KOLLROS n'hésite pas à faire appel aux coordonnées, homogènes ou pas. Mais il s'attache plus à la forme des expressions qu'au calcul: il gagne ainsi une place considérable et au bout de peu de pages, commence l'étude des théorèmes.

Les anciens Indous, dit-on, se contentaient d'effectuer les démonstrations de géométrie en soumettant à leurs disciples des figures habilement choisies en leur disant: «Vois». C'est, toutes proportions gardées, un peu la méthode de M. KOLLROS qui, systématiquement, montre le caractère projectif des propriétés à étudier ou applique des correspondances collinéaires ou réciproques. Les nombreuses applications aux coniques, aux quadriques, aux cubiques gauches, aux surfaces d'ordre trois notamment, montrent la puissance de la méthode projective. Le lecteur partage avec l'auteur le plaisir de voir, souvent établies en quelques lignes, des propriétés dont la démonstration par le calcul est longue.

De nombreuses pierres d'attente sont posées et laissent soupçonner l'intérêt qu'aurait une étude plus poussée de la théorie des groupes et de diverses transformations non projectives telles que l'involution ternaire, les correspondances quadratiques et cubique.

Une collection d'exercices gradués et variés termine l'ouvrage. Le lecteur y trouvera l'occasion de trouver des analogies souvent inattendues et aussi celle d'user de perspicacité.

En conclusion, nous ne saurions que recommander la lecture du Cours de Géométrie projective aux maîtres de l'enseignement qui désirent conserver le contact avec la science et aux étudiants de première année de nos écoles supérieures. En un petit nombre de pages, peu d'ouvrages leur ouvriront autant d'horizons. P. ROSSIER

Mitteilungen

Mitteilungen der Redaktion: Wir dürfen Herrn Dr. E. VOELLMY, Basel, als neuen ständigen Mitarbeiter begrüßen.

Ab Januar 1947 treten folgende Änderungen ein: 1. Vom Autorenhonorar wird abgesehen, dafür erhält der Autor 30 Separata (ohne Umbruch) gratis. 2. Der Umfang wird erweitert, indem drei der sechs Hefte des Jahrganges statt 16 Seiten nunmehr 24 Seiten zählen. 3. Der Abonnementspreis wird *nicht* erhöht. 4. Für 1947 sind zwei *Beihefte* mit besonderen Arbeiten vorgesehen.