

# Elementare Ableitung der Coriolisbeschleunigung in der Ebene und im Raume

Autor(en): **Michael, W.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **2 (1947)**

Heft 2

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-12817>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Elementare Ableitung der Coriolisbeschleunigung in der Ebene und im Raume

1. Ein Massenpunkt  $m$  (siehe Fig. 1) bewege sich mit der konstanten Geschwindigkeit  $v_r$  auf einem Strahl  $r$  durch  $O$ , der sich seinerseits mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  dreht. Wir fragen nach der *Beschleunigung*, die  $m$  während dieser Bewegung erfährt.

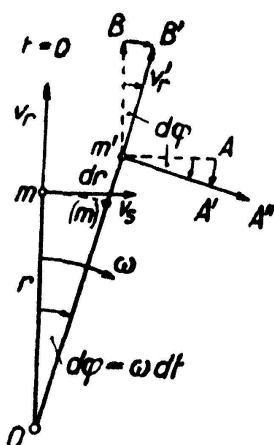


Fig. 1

Nach Fig. 1 hat  $m$  zur Zeit  $t = 0$  die *Radialgeschwindigkeit*  $v_r$  und die *Transversalgeschwindigkeit*  $v_s = \omega r$ . Nach dem Zeitelement  $dt$  hat sich  $m$  nach  $m'$  bewegt, und die entsprechenden Geschwindigkeiten sind jetzt  $v_r'$  und  $v_s' = \omega (r + dr)$ . Wie aus Fig. 1 ersichtlich, hat sich die Transversalkomponente der *Richtung* und der *Größe* nach geändert, während die Radialkomponente nur ihre *Richtung* geändert hat. Diese Änderungen betragen:

$$\begin{aligned} \overline{AA'} &= v_s \omega dt = \omega^2 r dt && \text{(zentripetal gerichtet),} \\ \overline{A'A''} &= v_s' - v_s = \omega dr && \text{(transversal gerichtet),} \\ \overline{BB'} &= v_r \omega dt && \text{(transversal gerichtet).} \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die folgenden Komponenten der Beschleunigung.

1) *Parallel* zu  $r$ : 
$$\frac{\overline{AA'}}{dt} = \omega^2 r \quad (d\varphi \sim 0).$$

Das ist die *Zentripetalbeschleunigung* des mitführenden Strahl- oder Systempunktes, da man den Strahl als ein in der ruhenden Ebene sich drehendes System ansehen kann, relativ zu welchem sich  $m$  bewegt.

2) *Senkrecht* zu  $r$ : 
$$\frac{\overline{A'A''}}{dt} = \omega \frac{dr}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{\overline{BB'}}{dt} = v_r \omega.$$

Da also  $\overline{A'A''} \parallel \overline{BB'}$  ist, addieren sich diese beiden Komponenten, und weil  $\frac{dr}{dt} = v_r$  ist, erhält man:

$$\frac{\overline{A'A''}}{dt} + \frac{\overline{BB'}}{dt} = 2 v_r \omega.$$

Das ist die **CORIOLISbeschleunigung**, die transversal gerichtet ist, und zwar im gezeichneten Fall gleichsinnig mit  $v_s$ . Wäre  $v_r$  nach innen statt nach außen gerichtet, so ergäbe die analoge Konstruktion eine zu  $v_s$  entgegengesetzt gerichtete **CORIOLISbeschleunigung**.

Dieses einfache Beispiel ist recht instruktiv, weil es anschaulich zeigt, daß die **CORIOLISbeschleunigung** zwei verschiedene Ursachen hat: 1. die Änderung des *Be- trages* der Transversalgeschwindigkeit; 2. die Änderung der *Richtung* der Radialgeschwindigkeit.

Da der erhaltene Wert für die **CORIOLISbeschleunigung** nur von den Geschwindigkeiten  $v_r$  und  $\omega$  abhängt, ist zu erwarten, daß sich auch im allgemeineren Fall, wo  $v_r$  und  $\omega$  nicht konstant, sondern Funktionen der Zeit sind, der gleiche Wert ergeben wird. Diese Vermutung läßt sich wie folgt leicht beweisen.

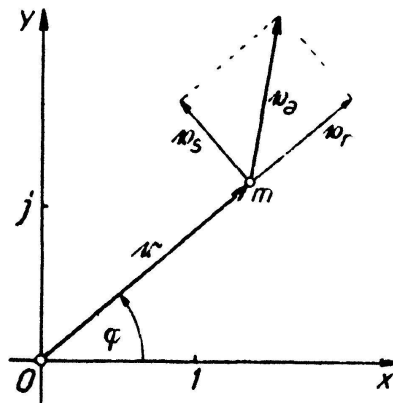


Fig. 2

2. In Fig. 2 ist  $m$  ein Massenpunkt, dessen Lage durch den Vektor  $r$  gegeben ist. Der Beweis wird sehr einfach, wenn man  $r$  als komplexen Vektor (komplexe Zahl) definiert. Wir setzen also  $r = r \cdot e^{i\varphi}$ , wobei sowohl  $r$  als auch  $\varphi$  beliebige Funktionen der Zeit sein sollen. Ihre ersten und zweiten Ableitungen nach der Zeit bezeichnen wir mit  $\dot{r}$ ,  $\ddot{r}$ ,  $\dot{\varphi}$  und  $\ddot{\varphi}$ . Bewegt sich  $m$  in der Ebene, so erhält man für die resultierende Geschwindigkeit

$$v_a = \frac{dr}{dt} = (\dot{r} + j r \dot{\varphi}) e^{i\varphi} = v_r + v_s.$$

Die Ableitung von  $v_a$  nach  $t$  ergibt die *resultierende* oder *absolute Beschleunigung*  $a_a$  von  $m$  in der Ebene. Nach Zusammenfassung und Ordnung der Glieder erhält man den Ausdruck

$$a_a = \dot{v}_a = \frac{d^2 r}{dt^2} = [\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 + j (r \ddot{\varphi} + 2 \dot{r} \dot{\varphi})] e^{i\varphi}.$$

In diesem Ausdruck können wir folgende Komponenten unterscheiden, wobei wir nur die reellen Werte anschreiben:

- $\ddot{r}$  = Radialbeschleunigung (relative Beschleunigung auf  $r$ ),
- $- r \dot{\varphi}^2$  = Zentripetalbeschleunigung des mitführenden Strahlpunktes,
- $r \ddot{\varphi}$  = Transversalbeschleunigung des mitführenden Strahlpunktes,
- $2 \dot{r} \dot{\varphi}$  = **CORIOLISbeschleunigung** (transversal).

Die *Richtung* dieser Komponenten ist jeweils durch den Faktor  $e^{i\varphi}$ , bzw.  $j e^{i\varphi}$  und das Vorzeichen gegeben. Da  $\dot{r}$  und  $\dot{\varphi}$  nichts anderes als  $v_r$  und  $\omega$  bedeuten, ist unsere obige Vermutung bewiesen.

3. Um die **CORIOLISbeschleunigung im Raume** zu veranschaulichen, gehen wir von dem bekannten Satze der Kinematik aus, welcher besagt, daß jede Bewegung eines Systems (zum Beispiel eines starren Körpers) *relativ* zu einem im Raume als ruhend angenommenen System (Koordinatenachsen) in dem Zeitelement  $dt$  als eine unendlich kleine *Schraubung* (in Sonderfällen auch nur Drehung) um die *Momentan-drehachse* des beweglichen Systems betrachtet werden kann. Bewegt sich nun ein Massenpunkt  $m$  relativ zum beweglichen System, so kann man die **CORIOLISbeschleunigung** von  $m$  folgendermaßen ermitteln.

Man denke sich eine Ebene (unsere Ebene nach Fig. 2) durch  $m$  senkrecht zur Momentanachse gelegt. In dieser Ebene denke man sich eine Gerade von der Momentanachse nach  $m$  gezogen; ferner in  $m$  eine Gerade in der Ebene senkrecht zur ersten Gerade und eine weitere Gerade senkrecht zur Ebene, also parallel zur Momentanachse. Alsdann kann man den Vektor der relativen Geschwindigkeit  $v_{rel}$  von  $m$  auf diese drei Geraden projizieren und erhält damit eine *radiale*, eine *transversale* und eine *axiale* Komponente der relativen Geschwindigkeit. Bildet ihr Vektor mit der Momentanachse den Winkel  $\delta$ , so ist die radiale Komponente gleich  $v_{rel} \sin \delta$ . Ist ferner  $\omega$  die momentane Winkelgeschwindigkeit des mitführenden Systems, so erhält man nach dem Ergebnis von Abschnitt 2 für die **CORIOLISbeschleunigung** von  $m$  im betrachteten Augenblick die Größe

$$c = 2 \omega v_{rel} \sin \delta.$$

Diese Beschleunigung ist transversal zur Momentanachse gerichtet. Die übrigen Komponenten der absoluten Beschleunigung von  $m$  setzen sich aus den *relativen* Beschleunigungskomponenten von  $m$  und den Beschleunigungskomponenten des mitführenden Systempunktes zusammen. Zur Veranschaulichung dieses Ergebnisses diene das folgende einfache Beispiel.

4. In den Fig. 3 und 4 sei  $K$  ein unendlich dünner Ring aus Masse, der mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  um die  $x$ -Achse rotiert. Gleichzeitig werde die Ebene von  $K$  um die  $y$ -Achse mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\omega$

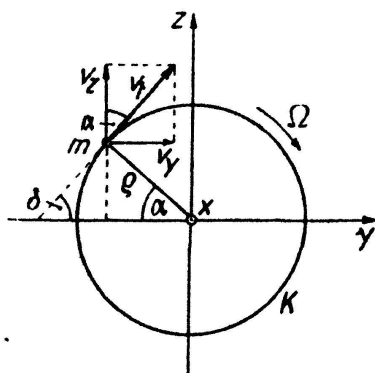


Fig. 3

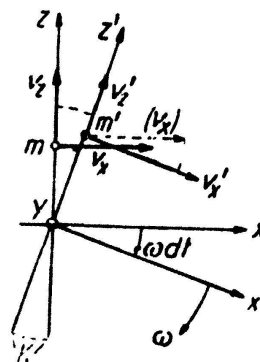


Fig. 4

gedreht. Es soll zunächst untersucht werden, welche Beschleunigungen ein Massenpunkt  $m$  von  $K$  erfährt. Das mitführende System ist hier die Ebene von  $K$ , wobei

die  $y$ -Achse für jeden Zeitpunkt die Momentanachse des Systems ist.  $m$  besitzt eine tangentielle Geschwindigkeit  $v_t$ , die als die *relative* Geschwindigkeit von  $m$  in der Kreisebene zu betrachten ist; es ist also  $v_{rel} = v_t$ . Ferner besitzt  $m$  die (zur  $y$ -Achse) *transversale* Geschwindigkeit  $v_x = \omega \rho \sin \alpha$ .  $v_t$  zerlegen wir in die bezüglich der  $y$ -Achse *radiale* Komponente  $v_z$  und in die *axiale* Komponente  $v_y$ . Wie aus Fig. 4, die  $K$  von der Seite gesehen in zwei um den infinitesimalen Winkel  $\omega dt$  voneinander abweichenden Stellungen zeigt, ersichtlich ist, ändert die transversale Komponente  $v_x$ , während  $m$  nach  $m'$  wandert, ihre *Größe* und *Richtung* und ebenso die radiale Komponente  $v_z$ , während die axiale Komponente  $v_y$  nur ihre *Größe* ändert, ihre *Richtung* aber beibehält. Dabei ist:  $v_t = \Omega \rho = v_{rel}$ ;  $v_x = \omega \rho \sin \alpha$ ;

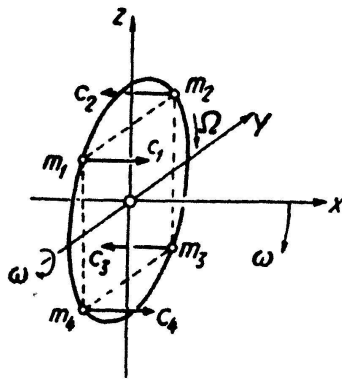


Fig. 5

$v_y = \Omega \rho \sin \alpha$ ;  $v_z = \Omega \rho \cos \alpha = v_{rel} \sin \delta$ . Daraus ergeben sich die folgenden Größen für die Beschleunigungskomponenten von  $m$ :

$$a = \frac{v_t^2}{\rho} = \Omega^2 \rho \quad (\text{Zentripetalbeschleunigung})$$

$$b = \frac{v_x^2}{\rho \cdot \sin \alpha} = \omega^2 \rho \sin \alpha \quad (\text{Axipetalbeschleunigung})$$

und aus der oben abgeleiteten Beziehung  $c = 2 \omega v_{rel} \sin \delta$ , die *CORIO LISbeschleunigung*:

$$c = 2 \omega v_z = 2 \omega \Omega \rho \cos \alpha.$$

Diese Größe kann man auch unmittelbar, analog wie bei Fig. 1 an Hand der Fig. 3 und 4 berechnen, was jedoch etwas umständlicher ist.

Den Beschleunigungen  $a$ ,  $b$ ,  $c$  entsprechen nach dem NEWTONSchen Grundgesetz gleichgerichtete *Kräfte*  $m \cdot a$ ,  $m \cdot b$ ,  $m \cdot c$ . Die Kräfte  $m \cdot a$  und  $m \cdot b$  werden durch den Ring  $K$  selbst aufgebracht, den man sich irgendwie fest auf der  $x$ -Achse gelagert denken muß, und treten nach außen nicht in Erscheinung, da sie durch die inneren Reaktionskräfte des Ringes aufgehoben werden. Der *CORIO LISbeschleunigung* entspricht die aufzuwendende *Kraft*

$$k = m c = 2 m \omega \Omega \cdot \rho \cos \alpha.$$

Dieser Kraft entspricht ein *Drehmoment* um die  $y$ -Achse

$$d_y = k \rho \sin \alpha = 2 m \omega \Omega \rho^2 \cos \alpha \sin \alpha$$

und ein Drehmoment um die  $z$ -Achse:

$$\mathfrak{D}_z = k \rho \cos \alpha = 2 m \omega \Omega \rho^2 \cos^2 \alpha.$$

Betrachten wir vier symmetrische Punkte  $m_1, m_2, m_3, m_4$  des in Fig. 5 perspektivisch gezeichneten Ringes  $K$ , so haben die entsprechenden CORIOLISbeschleunigungen  $c_1, c_2, c_3, c_4$  die dort ersichtlichen Richtungen, weil  $\cos \alpha$  für  $m_1$  und  $m_4$  positiv, für  $m_2$  und  $m_3$  negativ zu setzen ist. Daraus ist schon zu ersehen, daß die Summe der Drehmomente für den ganzen Ring in bezug auf die  $y$ -Achse Null wird, während dies für die  $z$ -Achse nicht der Fall ist. Die Rechnung bestätigt dies und ergibt folgendes Resultat. Ein Element des Ringes hat das Volumen  $q \rho d\alpha$ , wenn  $q$  der (unendlich kleine) Querschnitt des Ringes ist. Ist  $\mu$  die Dichte der Masse, so ist  $m = \mu q \rho d\alpha$ . Somit ist

$$d_y = 2 \mu q \rho^3 \omega \Omega \cos \alpha \sin \alpha d\alpha,$$

$$d_z = 2 \mu q \rho^3 \omega \Omega \cos^2 \alpha d\alpha,$$

$$\mathfrak{D}_y = \sum d_y = 2 \mu q \rho^3 \omega \Omega \int_0^{2\pi} \cos \alpha \sin \alpha d\alpha = 0,$$

$$\mathfrak{D}_z = \sum d_z = 2 \mu q \rho^3 \omega \Omega \int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha d\alpha = \underline{\underline{2 \pi \mu q \rho^3 \omega \Omega}}.$$

$2 \pi \mu q \rho^3$  ist gleich dem *Trägheitsmoment* des Ringes bezüglich der  $x$ -Achse. Bezeichnen wir dieses mit  $\Theta_x$ , so können wir schreiben:

$$\mathfrak{D}_z = \Theta_x \Omega \omega.$$

Bei der Drehung des Ringes  $K$  um die  $y$ -Achse ist also ein Drehmoment um die  $z$ -Achse von der Größe  $\mathfrak{D}_z$  aufzuwenden. Die Formel für  $\mathfrak{D}_z$  gilt auch, wenn statt des unendlich dünnen Ringes ein Ring mit endlichem Querschnitt oder eine Scheibe usw. vorliegt, da man diese Rotationskörper in Elementarringe zerlegen kann. Unter  $\Theta_x$  ist dann das Trägheitsmoment des ganzen Rotationskörpers um die  $x$ -Achse zu verstehen. Auf dem oben abgeleiteten Drehmoment beruht bekanntlich die Wirkung des Kreisels, worauf hier nicht näher eingegangen werden soll. Man erkennt aber aus obiger Elementarableitung deutlich, daß die Kreiselswirkung ihre Ursache in der bei der Bewegung des Kreisels auftretenden CORIOLISbeschleunigung seiner Massenpunkte hat.

W. MICHAEL, Bern

## Über eine symbolisch-topologische Formel

In der vorliegenden Note soll eine elementare topologische Formel der ebenen Geometrie besprochen werden, die an sich keinen dem Topologen unbekanntem Sachverhalt enthüllt, die aber in der nachfolgend erörterten symbolischen Gestalt der Betrachtung wert ist.

In dieser Form umfaßt die Formel verschiedene kombinatorisch-topologische Relationen und Aussagen, wie beispielsweise den EULERSchen Polyedersatz, die Baumrelation, den HELLY-RADONSchen Satz sowie zahlreiche kombinatorische Formeln, wie sie etwa bei der Zerlegung der Ebene durch Geraden auftreten usw.