Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 2 (1947)

Heft: 2

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

Download PDF: 03.01.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Die in der normalen Infinitesimalrechnung gültigen Sätze:
Aus 1. folgt die gleichmäßige Stetigkeit,
aus 1. und 2. folgt die Existenz eines Extremums im Intervall $\langle 0, 2 \rangle$,
aus 3. folgt der Mittelwertsatz sowie die monotone Zunahme im ganzen Intervall, lassen sich daher ohne das CANTORsche oder ein ihm äquivalentes Axiom nicht beweisen.

HANS LIEBL, Basel

Aufgaben

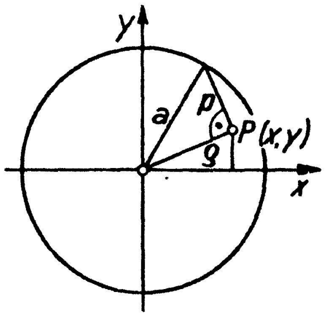
Bemerkungen. Zu Aufgabe 1 sendet Frl. R. C. YOUNG (London) eine schöne Arbeit ein. Ferner behandelt H. SCHÜEPP (Zürich) im Anschluß an Aufgabe 1 ein allgemein interessantes Problem. Beide Einsendungen werden hier publiziert. –

Die Redaktion bittet, für die Lösung jeder Aufgabe ein besonderes, mit dem Namen des Autors versehenes Blatt zu benützen. Manche Lösungen wurden direkt an die Aufgabensteller gesandt. Da dies der Redaktion im allgemeinen nicht zur Kenntnis gelangt, können diese Lösungen hier nicht angezeigt werden.

Aufgabe 2. Von einer Ellipse kennt man zwei Punkte, den Mittelpunkt und die Länge der großen Hauptachse. Es ist eine planimetrische Konstruktion der Hauptachsen verlangt. W. LÜSSY.

Die Lösungen von L. KIEFFER (Luxemburg), J. BRUNNER (Zürich) und P. GLUR (Bern) benützen den Raum, indem sie die Ellipse als Normalprojektion eines Kreises betrachten. Herr P. GLUR gibt auch noch eine schöne Lösung einer etwas allgemeineren Aufgabe mit Hilfe des Desarguesschen Involutionssatzes. Diese entspricht der Forderung nach einer planimetrischen Konstruktion. Wir geben hier die völlig elementare Lösung des Aufgabenstellers:

P sei ein Punkt der Ellipse mit den Halbachsen a und b (siehe Figur): $p^2 = a^2 - \varrho^2 = a^2 - x^2 - y^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2) - y^2 = y^2\left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right) = y^2 \frac{c^2}{b^2}$. Somit $p = \frac{c}{b} y$.



Aus dem Umstand, daß p proportional y ist, ergibt sich folgende Konstruktion: Man teile die Strecke $P_1 P_2$ im Verhältnis $p_1 : p_2$, die beiden Teilpunkte sind Punkte der großen Achsen der beiden Lösungen. Die Aufgabe hat stets zwei Lösungen, wenn P_1 und P_2 im Innern des Hauptkreises gewählt werden.

Aufgabe 3. Ein schiefer Kreiskegel ist durch die längste und die kürzeste Mantellinie und den Radius des Grundkreises bestimmt. Irgendeine Mantellinie sei festgelegt durch den Winkel, den ihr Radius mit demjenigen der längsten Mantellinie bildet. Die Länge dieser Mantellinie ist unabhängig vom Grundkreisradius. W. LÜSSY.

Ist l die längste und k die kürzeste Mantellinie, so liefert eine einfache Rechnung für die Mantellinie x, die zum Winkel φ gehört:

$$x^2 = l^2 \cos^2\frac{\varphi}{2} + k^2 \sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}(l^2 + k^2) + \frac{1}{2}(l^2 - k^2)\cos\varphi.$$

B. SCHENKER (Bern) gibt den Ausdruck links, E. BEERENWINKEL (St. Gallen) und L. KIEFFER (Luxemburg) geben den Ausdruck rechts.

Aufgabe 4. $y = f(x)$ sei eine eindeutige, stetige, differenzierbare Funktion. Ein Parallelstreifen konstanter Breite a, dessen Ränder stets parallel zur y-Achse sind, bewegt sich über die Ebene des Bildes von $y = f(x)$. Wann hat die Fläche zwischen x-Achse und Kurve, die vom Streifen überdeckt wird, einen extremalen Wert? W. LÜSSY.

Lösung. Ohne das Hilfsmittel der Differentiation eines bestimmten Integrals nach einem Parameter explizit zu benützen, läßt sich die Aufgabe durch direkte geometrische Überlegungen lösen:

1. Der Streifen liege zwischen den Stellen $x = t$ und $x = t + a$. Verschiebt man ihn um eine kleine Strecke Δx, so wird die Änderung der Fläche in erster Näherung durch $\Delta x\,[f(t+a) - f(t)]$ gegeben. Ist die Ordinatendifferenz $\neq 0$, so kann Δx so klein gewählt werden, daß der Fehler infolge Näherung dem absoluten Wert nach kleiner wird als $|\Delta x\,[f(t+a) - f(t)]|$. Die Fläche erfährt dann also bei Verschiebung des Streifens in der einen Richtung einen Zuwachs, während sie bei der andersgerichteten Verschiebung abnimmt. Die notwendige Bedingung für das Vorliegen eines Extremums ist also $f(t) = f(t+a)$, das heißt, Anfangs- und Endordinate der Fläche müssen gleich groß sein.

2. Wir finden noch eine hinreichende Bedingung für ein Maximum oder Minimum, wenn wir nun unter der Voraussetzung $f(t) = f(t+a)$ die Änderungen der Fläche genauer berechnen, indem wir die Kurve in den Schnittpunkten mit den Streifenenden durch ihre Tangente ersetzen. Die beidseitigen Teiländerungen werden in zweiter Näherung durch Trapeze gegeben, die gleiche Höhe und *eine* gleiche Grundlinie haben. Für das Größenverhältnis ihrer Flächen ist dann die Neigung ihres obern Schenkels maßgebend. Steigt nun die Tangente rechts stärker als links, resp. fällt sie schwächer, das heißt ist $f'(t+a) > f'(t)$, so erfährt die Fläche eine Zunahme, gleichgültig, ob der Streifen nach rechts oder links verschoben wird, wenn nur die Verschiebung genügend klein gehalten wird, damit der Fehler infolge der Näherung am Vorzeichen der Änderung nichts mehr ändern kann. Es liegt also ein Minimum vor.

Analog findet man als hinreichende Bedingung für ein Maximum:

$$f(t) = f(t+a) \text{ und } f'(t+a) < f'(t).$$

Die Bedingungen unter 2. sind natürlich nicht notwendig. Auch im Fall $f(t+a) = t(t)$, $f'(t+a) = f'(t)$ kann ein Extremum auftreten. W. PROKOP, Zürich.

Eine weitere Lösung ging von K. RIEDER (Riehen) ein.

Aufgabe 5. Eine Kugel vom Radius R liegt auf einer horizontalen Ebene und wird von einer punktförmigen Lichtquelle L beleuchtet. Die Schlagschattenellipse ist gegeben durch ihre kleine Achse b und die lineare Exzentrizität e. Bestimme die Koordinaten von L in bezug auf das räumliche Koordinatensystem, dessen Ursprung im Berührungspunkt der Kugel mit der Ebene liegt und dessen x-Achse die Richtung der großen Achse der Ellipse hat. E. TROST.

Eine einfache Rechnung liefert für L die Koordinaten $\dfrac{2\,e\,R^2}{b^2 - R^2}$, 0, $\dfrac{2\,R\,b^2}{b^2 - R^2}$.

Lösungen sind eingegangen von L. KIEFFER (Luxemburg), B. SCHENKER (Bern) und E. BEERENWINKEL (St. Gallen).

Aufgabe 12. MASCHERONI hat gezeigt, daß man mit dem Zirkel allein die Mitte M zwischen zwei Punkten A und B durch Zeichnen von 6 Kreisen finden kann. Es fehlt ein Beweis, daß es mit weniger als 6 Kreisen nicht geht. P. BUCHNER.

(Die Aufgabe findet sich auch in dem anregenden Büchlein von G. SCHEFFERS: Allerhand aus der zeichnenden Geometrie. Quelle und Meyer, Leipzig 1930, S. 45.)

Lösung. Die Punkte ± 1 der x-Achse seien gegeben, der Punkt O gesucht. Wenn eine Konstruktion mit weniger als 6 Kreisen möglich wäre, so müßte spätestens der vierte Kreis durch O gehen. Werden nur Kreise mit bekanntem Mittelpunkt und Radius verwendet, so hat der erste und zweite Kreis den Abstand 1 von O, der dritte den Abstand $2\sqrt{3}$ oder $2 - \sqrt{3}$ von O. Der Abstand des vierten Kreises von O ist dann, wie eine Durchsicht der verschiedenen Möglichkeiten an Hand einer Zeichnung sofort ergibt, mindestens gleich $2 - \sqrt{3}$, also nicht Null.

Läßt man noch die Konstruktion zu, um einen gegebenen Punkt einen Kreis zu schlagen, der einen Kreis mit anderem Mittelpunkt berührt, und so den Berührungspunkt zu bestimmen, so hat der vierte Kreis mindestens den Abstand $\sqrt{13} - \sqrt{12}$ von O.

Kommen in der Konstruktion Kreise mit willkürlichem Mittelpunkt oder Radius vor, so kann man für diese, sofern keine Ungleichungen entgegenstehen, speziell die schon betrachteten Kreise wählen und erhält dasselbe Resultat.

Werden aber Ungleichungen vorgeschrieben, so müssen diese, damit die Konstruktion einen genauen Sinn hat, durch gegebene oder konstruierbare Gleichheiten begrenzt sein. Wenn zum Beispiel ein Radius kleiner als die Hälfte eines andern sein soll, so muß diese Hälfte erst konstruiert werden. Daraus folgt, daß man die willkürlichen Elemente (Punkte oder Radien) so nahe bei den bisher betrachteten festen Elementen wählen kann, daß auch die entstehenden Kreise sich von den schon betrachteten beliebig wenig unterscheiden. Dabei sind zu diesen festen Kreisen auch ihre Schnitt- und Berührungspunkte zu zählen, die als feste Punkte und zugleich als Kreise mit verschwindendem Radius gelten sollen. Die Behauptung stimmt dann zunächst für die drei ersten Kreise; man kann sie je nach der vorliegenden Konstruktionsvorschrift nahe bei (oder übereinstimmend mit) bestimmten unter den ersten festen Kreisen so wählen, daß auch ihre Schnittpunkte nur wenig von bestimmten festen Punkten verschieden sind. Wenn die approximierten Kreise verschieden sind, ergibt sich dies von selbst; wenn aber zwei Kreise demselben festen Kreis naheliegen, der dann als einer der beiden ersten notwendig zur x-Achse symmetrisch ist, so kann man sie so wählen, daß sie sich höchstens in der Nähe der x-Achse treffen (ihre Mittelpunkte können dabei nahe der x-Achse nahezu senkrecht zu ihr gegeneinander verschoben und ihre Radien sehr nahe gleich sein; dies gilt auch, wenn die Mittelpunkte auf gegebenen Kreisbogen liegen müssen). Nunmehr kann auch der vierte Kreis nach Mittelpunkt und Radius nahe bei einem der festen Kreise gewählt werden, und zwar (bei hinreichend guter Wahl der andern Kreise) so nahe, daß sein Abstand von O wenigstens $\frac{1}{2}(\sqrt{13} - \sqrt{12})$ beträgt.

Läßt man als Konstruktion zu, zwei sich berührende Kreise mit gegebenen Mittelpunkten und gleichen Radien zu zeichnen, so ist die Aufgabe schon mit zwei Kreisen zu lösen.

P. Finsler, Zürich.

Literaturüberschau

L. Euler: *Rechenkunst* ac Commentationes ad physicam generalem pertinentes et miscellanea. Ediderunt E. Hoppe †, K. Matter, J. J. Burckhardt
L. Euleri Opera omnia III/2.

Unter den «Klassikern» der Mathematik ist Leonhard Euler (geb. 1707 in Basel, gest. 1783 in Petersburg) zweifellos der bedeutendste. Die unübertreffliche Klarheit in der Darstellung macht das Studium seiner grundlegenden Abhandlungen vor allem für die Jünger der Mathematik, die nicht nur Resultate, sondern mathematisches Denken lernen wollen, zu einem großen Gewinn. Aber auch in der Vermittlung elementaren Stoffes liegen gewisse Schwierigkeiten, und man ist gespannt, wie ein großer Mathematiker diese meistert. Es ist deshalb sehr zu begrüßen, daß das von Euler für die russischen Schulen verfaßte elementare Rechenbuch in der Gesamtausgabe seiner Werke seinen Platz gefunden hat und in dem neuerschienenen Band allgemein zugänglich geworden ist. Diese Einleitung in die Arithmetik, in der die vier Rechnungsarten mit vielen trefflichen Beispielen und Anwendungen gelehrt werden, ist ein Kabinettstück Eulerscher Darstellungskunst. Sie ist ein Pendant zu Eulers «Anleitung zur Algebra», deren Aufnahme in die Universal-Bibliothek Reclams am besten die allgemeine Bedeutung eines wirklich klaren Lehrbuches zeigt.

Während die «Rechenkunst» also besonders für Primarschulen von größtem Interesse ist und in keiner Schulbibliothek fehlen sollte, sind die übrigen in diesem Bande zusammengefaßten Abhandlungen mehr für die Mittelschulen wertvoll, weil sie sich auf die Frage nach der allgemeinen Bedeutung der Mathematik beziehen. Neben einem