Die Sätze von Pascal und Brianchon

Autor(en): **Lüssy, Willi**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **2 (1947)**

Heft 3

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-12819

ELEMENTE DER MATHEMATIK
Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer

El. Math. | Band II | Nr. 3 | Seiten 49–72 | Basel, 15. Mai 1947

Die Sätze von Pascal und Brianchon

Obwohl die Sätze von PASCAL und BRIANCHON ihrer Natur nach in die projektive Geometrie gehören, ist es wegen der mannigfaltigen und schönen Anwendungsmöglichkeiten doch wünschenswert, sie an der Mittelschule verwenden zu können. Dazu sind aber möglichst elementare und durchsichtige Beweise erforderlich. Sind die Sätze für den Kreis bewiesen, so läßt sich ihre Gültigkeit mittels der zentrischen Kollineation leicht auf alle Kegelschnitte ausdehnen.

Der äußerst einfache und elegante Beweis des Satzes von PASCAL für den Kreis, der von JULIUS PETERSEN[1]) stammt, ist es wert, in Erinnerung gerufen zu werden.

Er beruht auf dem leicht zu beweisenden Satz: Schneiden sich zwei Kreise, so bestimmen die Verbindungsgeraden eines beliebigen Punktes der Ebene mit den beiden Schnittpunkten auf diesen Kreisen parallele Sehnen.

Nun sei $ABCDEF$ ein Sehnensechseck. L, M, N seien die Schnittpunkte der drei Paare von Gegenseiten AB und DE, BC und EF, CD und FA. Der Kreis durch A, D und N schneidet die Geraden AB und DE in B_1, bzw. E_1, und nach dem Hilfssatz ist

$$NE_1 \parallel EF, \; NB_1 \parallel BC, \; B_1E_1 \parallel BE.$$

Die Dreiecke E_1NB_1 und EMB sind also ähnlich und in perspektiver Lage, L ist das Ähnlichkeitszentrum, demnach liegen L, M und N in einer Gerade.

Für den Satz von BRIANCHON bezüglich des Kreises ist meines Wissens bisher kein so elementarer Beweis bekannt. Läßt man hingegen noch den Begriff der Inversion zu, so kann sehr einfach folgendermaßen geschlossen werden:

Die Richtigkeit des Hilfssatzes ist wieder leicht einzusehen: Schneiden sich zwei Kreise in Z und U, so liegen die Endpunkte der Durchmesser durch Z in einer Gerade durch U, die senkrecht auf ZU steht.

Nun sei $ABCDEF$ ein Tangentensechseck des Kreises k mit dem Mittelpunkt Z, a sei der Berührungspunkt der Seite AB, b derjenige von BC, ..., f derjenige von FA. Die Kreise $k(A)$ durch f, A und a, $k(B)$ durch a, B und b, ..., $k(F)$ durch e, F und f gehen alle durch Z. Nach dem Hilfssatz geht

AD durch den 2. Schnittpunkt U von $k(A)$ und $k(D)$ und steht $\perp$ auf ZU,
BE durch den 2. Schnittpunkt V von $k(B)$ und $k(E)$ und steht $\perp$ auf ZV,
CF durch den 2. Schnittpunkt W von $k(C)$ und $k(F)$ und steht $\perp$ auf ZW.

[1]) Interm. des Math. 1903, p. 112.

Wenn U, V, W und Z auf einem Kreise liegen, gehen AD, BE und CF nach dem Satz von Thales durch einen Punkt, nämlich durch den zweiten Endpunkt des Durchmessers von Z, was zu beweisen ist.

Durch Inversion der Figur an k gehen die Kreise $k(A)$, $k(B)$, ..., $k(F)$ in Geraden über, die Punkte U, V und W in die Schnittpunkte $\overline{U}$ von fa und cd, $\overline{V}$ von ab und de und $\overline{W}$ von bc und ef. Nach dem Satz von Pascal für das Sehnensechseck $abcdef$ liegen aber diese Punkte auf einer Gerade, deren inverses Bild ein Kreis durch Z ist.

Es soll nun noch an zwei Beispielen gezeigt werden, wie diese Sätze zur Führung von Beweisen benützt werden können.

1. *Jede Hyperbel durch die Ecken A, B, C eines Dreiecks und durch seinen Höhenschnittpunkt H ist gleichseitig.*

Beweis: Um die Hyperbel durch fünf Elemente festzulegen, kann man den einen unendlich fernen Punkt U_∞ noch frei wählen und konstruiert nun mittels des Satzes von Pascal den anderen V_∞, indem man das Sechseck $ABCHU_\infty V_\infty$ benützt. L sei der Schnittpunkt von AB und HU_∞, M_∞ derjenige von BC und der unendlich fernen Gerade $U_\infty V_\infty$; diese beiden Punkte bestimmen die Pascalsche Gerade p, der Schnittpunkt N von p und CH bestimmt mit A die Richtung der zweiten Asymptote. Da $AB \perp HN$ und $NL \perp AH$, so ist L Höhenschnittpunkt des Dreiecks AHN und es ist auch $HL \perp NA$, das heißt, die beiden Asymptoten stehen senkrecht aufeinander.

Die Asymptoten aller dieser gleichseitigen Hyperbeln sind Simsonsche Geraden des Dreiecks ABC und hüllen die Steinersche Hypozykloide dieses Dreiecks ein[1]).

2. Steiner hat 1856 in der Arbeit über die Hypozykloide, die seinen Namen trägt[2]), folgenden Satz ausgesprochen, seiner Gewohnheit gemäß ohne ihn zu beweisen:

Man betrachtet die Schar der Kegelschnitte, die die Seiten a, b, c eines Dreiecks ABC berühren und durch seinen Höhenschnittpunkt H gehen. Man zieht die Tangenten in den Punkten, die dem Höhenschnittpunkt diametral gegenüberliegen. Diese Tangenten hüllen die Steinersche Hypozykloide des Dreiecks ABC ein.

Dieser Satz kann nun so bewiesen werden:

Der Kegelschnitt ist eindeutig bestimmt, wenn in H noch die Tangente t gewählt wird. Man konstruiere die zu t parallele Tangente s mittels des Satzes von Brianchon, unter Benützung des Sechsseits $acbtts$. Andererseits gehen durch A, B, C und H unendlich viele gleichseitige Hyperbeln. Die Richtung einer Asymptote kann noch frei gewählt werden, um eine dieser Hyperbeln festzulegen. Es sei die oben gewählte Gerade t mit dem unendlich fernen Punkte P_∞. Nun konstruiere man diese Asymptote s mit Hilfe des Satzes von Pascal, angewendet auf das Sechseck $HBCAP_\infty P_\infty$. Die beiden Konstruktionen ergeben identische Figuren, womit in Verbindung mit dem oben Gesagten der Satz bewiesen ist.

Willi Lüssy, Winterthur.

---

1) Vergl. hiezu das schöne Büchlein von J. Lemaire, Etude élémentaire de l'hyperbole équilatère et de quelques courbes dérivées. Vuibert 1927.

2) Über eine besondere Curve dritter Classe (und vierten Grades) Werke II, S. 641–647, insb. S. 646.