

Kleine Mitteilungen

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **2 (1947)**

Heft 3

PDF erstellt am: **29.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

<http://www.e-periodica.ch>

Kleine Mitteilungen

Didaktisches zur Behandlung der Exponential- und der Logarithmusfunktion auf der Mittelschule

1. Wenn der Mathematikunterricht der Mittelschule ein einigermaßen abgerundetes Bild dieses Bildungstoffes vermitteln und für die Bedürfnisse des Hochschulstudiums, z. B. der Medizin, genügen soll, so wird die Exponentialfunktion (E) unbedingt einer sorgfältigen Behandlung bedürfen. Wie die trigonometrischen Funktionen findet auch die E sehr oft Verwendung, wenn irgendein Vorgang aus dem Gebiet der Naturwissenschaften mathematisch behandelt werden soll. Der Zugang zur Basis e der speziellen E ist aber auf der Mittelschule nicht ganz leicht, und es soll daher im Folgenden einiges zur Didaktik dieses Kapitels beigetragen werden.

2. Die Durchsicht der bekannten Lehrbuchliteratur zeigt zunächst einmal Werke, welche ganz unvermittelt die Definition $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ zum Ausgangspunkt nehmen¹⁾.

Eine andere Gruppe von Lehrbüchern²⁾ beginnt natürlich und einfach mit der Besprechung der allgemeinen $E a^x$ und leitet dann irgendwie zur speziellen $E e^x$ über. Die erste Methode mag für den Mathematiker zweckmäßig sein; der Schüler dagegen zeigt für derartige unmotivierte Ausgangssituationen im allgemeinen wenig Verständnis, er empfindet sie als willkürlich und geht daher nur widerstrebend darauf ein. Ich möchte daher im Folgenden für das zweite Verfahren eintreten und dann unter Ziffer 4 besonders zeigen, wie ein Übergang von a^x zu e^x auf anschauliche Art vollzogen werden kann. Jüngere Kollegen sind vielleicht, da heute die Beschaffung der in der Anmerkung genannten ausländischen Werke auf Schwierigkeiten stossen dürfte, nicht in der Lage, sich allseitig in der vorhandenen Literatur zu orientieren, so daß ihnen unter Umständen durch die nachfolgenden Hinweise gedient werden kann.

3. Als Ausgangspunkt werden die bereits besprochenen E dienen können, also z. B. die Potenzen der Aufzinsfaktoren, oder die Glieder der geometrischen Folge, usw. Man wird dann an einigen einfachen Zifferbeispielen $\left[2^x, 3^x, \left(\frac{1}{2}\right)^x\right]$ die Hauptmerkmale der Kurven a^x für $a \geq 1$ und $0 < a < 1$ besprechen und zeigen, wie $a < 0$ zu unmöglichen Situationen führt. Es ist recht instruktiv, wie hier mit primitivsten Mitteln die Krümmung der Kurve a^x untersucht werden kann³⁾. Erst wenn alle elementaren Möglichkeiten ausgeschöpft sind, wird man zur Differentialrechnung greifen und den Differenzenquotienten $a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h}$ bilden. Daß der Grenzwert von $\frac{a^h - 1}{h}$ existiert, kann bei dieser ersten Einführung kurz mit der Bemerkung erledigt werden, daß ja andernfalls auch die Steigung der Kurve unbestimmt würde, und daß unsere Annahme später auf keinen Widerspruch führt. Dieser Grenzwert ist von x , also von der Lage des Punktes auf der Kurve, unabhängig, dagegen abhängig von der Basis a der betrachteten E . Für eine bestimmte $E a^x$ ist er also konstant und soll mit k bezeichnet werden. Dann gilt $(a^x)' = a^x \cdot k$, ferner $(a^x)'' = a^x k^2$, $(a^x)''' = a^x \cdot k^3$ usw. Hier lassen sich bereits die bekannten Regeln zur Bestimmung der Extrema und Wendepunkte auf die Kurve a^x anwenden.

4. Mit der Bestimmung der Konstanten k soll nun vorläufig zugewartet werden. Da sie von der Größe a abhängig ist, ändern wir zunächst die Problemstellung und

¹⁾ P. BUCHNER, Leitfaden der Algebra IV, VSM; REINHARDT-ZEISBERG, Math. Unterrichtswerk, Verlag Diesterweg, Frankfurt a. M.; FENKNER-HOLZMÜLLER, Math. Unterrichtswerk, Verlag Otto Salle, Berlin. HUMBERT, Problèmes d'Algèbre, Vuibert Paris.

²⁾ BEHRENDSEN-GÖTTING-HARNACK, Lehrbuch der Math., Verlag Teubner; REIDT-WOLFF-KERST, Elemente der Math., Grothe'sche Buchhandlung, Berlin; FRITZ MALSCH, Zahl und Raum, Verlag Quelle und Meyer, Leipzig.

³⁾ Siehe Aufgabensammlung STÄHLI und MEYER, IV. Teil, S. 132, Nr. 57.

treffen unter den vielen möglichen E eine Auswahl. Wir wollen diejenige E als die einfachste und wichtigste betrachten, für welche $k = 1$ ist. Diese spezielle Basis soll nach Euler mit e bezeichnet werden, und es muß dann gelten: $e^x = (e^x)' = (e^x)'' = \dots$. Zur Bestimmung von e lassen sich folgende Wege beschreiten:

a) *Abschätzung mit Hilfe des Richtungsfeldes*: Wir suchen eine Funktion, die mit ihrer Ableitung übereinstimmt. Die zugehörige Kurve muß also die Eigentümlichkeit besitzen, daß in jedem ihrer Punkte die Steigung mit dem Funktionswert übereinstimmt, oder: die Geschwindigkeit, mit der sich die Funktion ändert, soll proportional sein zur jeweils erreichten Größe. Wir zeichnen nach dieser Vorschrift ein Richtungsfeld und ziehen durch den Punkt A (0/1) eine Kurve, die gemäß diesen Pfeilen verläuft. Durch Vergleich mit den einleitend gezeichneten Kurven 2^x und 3^x wird man leicht feststellen, daß $2 < e < 3$ ist und zwar, daß e näher bei 3 als bei 2 liegt (Fig. 1).

b) *Algebraisches Verfahren*: Eine Funktion, die mit ihrer Ableitung übereinstimmt, hat offenbar die Form¹⁾:

$$y = f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}, \tag{1}$$

denn es ist
$$y' = f'(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}. \tag{2}$$

Durch Subtraktion folgt

$$f(x) - f'(x) = \frac{x^n}{n!}, \quad \text{ferner } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

Wir müssen also in Gleichung (1) die Reihe nicht abbrechen lassen, dann gilt

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots \quad i \cdot i \cdot,$$

speziell für $x = 1$:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \quad i \cdot i \cdot,$$

woraus eine Berechnung von e möglich ist.

c) *Geometrisches Verfahren*: Aus $(a^x)' = k \cdot a^x$ folgt: Weil $k = 1$ sein soll und auch $a^0 = 1$ ist, so muß im Punkte S (0/1) die Steigung der speziellen E $\text{tg } 45^\circ = 1$ sein. Wir gehen von einer E -kurve a^x aus, deren Steigung in A (0/1) zu klein ist, also z. B. von 2^x . Die

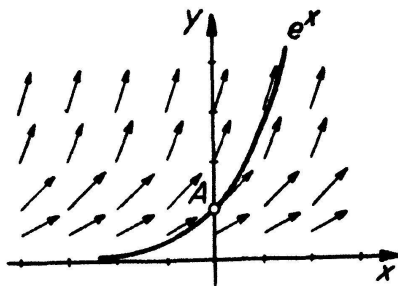


Fig. 1

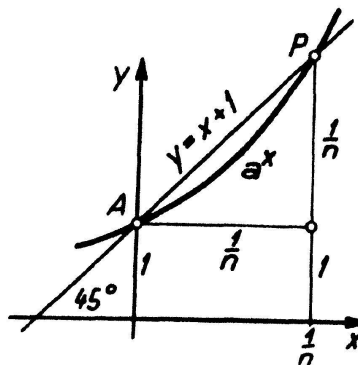


Fig. 2

Kurve wird dann in P mit der Geraden $y = x + 1$ zum Schnitt kommen. Die Abszisse von P sei $\frac{1}{n}$. Dann ist die Ordinate von P einerseits $a^{\frac{1}{n}}$ und andererseits (Fig. 2) $1 + \frac{1}{n}$. Es gilt also $a^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n}$ oder $a = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Da die Kurve in A die Gerade $y = x + 1$ berührt

¹⁾ Gegen dieses Verfahren kann der Vorwurf der Willkür erhoben werden (siehe Abschnitt 2). Man kann es aber, ohne Störung des Zusammenhanges, weglassen, und die Reihenentwicklung für e^x später behandeln

ren soll, so muß P mit A zusammenfallen. Die Basis der speziellen E wird daher $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Demnach gilt $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + i \cdot i$.

Hier lassen sich die üblichen Betrachtungen über die Eigenschaften der Zahl e anschließen.

5. *Bestimmung der Konstanten k .* Nachdem dann e als Basis der natürlichen Logarithmen eingeführt worden ist, kann $a = e^{\ln a}$ und $y = a^x = e^{x \ln a}$ geschrieben werden. Durch Differenzieren folgt: $(a^x)' = \ln a \cdot e^{x \ln a} = \ln a \cdot a^x$; also ergibt sich, daß $k = \ln a$ ist.

6. *Die Logarithmusfunktionen.* Durch Spiegelung an der Geraden $y = x$ folgt aus $y = e^x$ die Logarithmusfunktion $x = e^y$ oder $y = \ln x$. Das Differenzieren von $x = e^y$ ergibt $1 = e^y \cdot y'$ oder $y' = (\ln x)' = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$. Wird aber $y = a^x$ an der Geraden $y = x$ gespiegelt, so ergibt sich $x = a^y$ oder $y = \log x$ und durch Logarithmieren von $x = a^y$ folgt

$\ln x = y \ln a$ und durch Differenzieren dieser Gleichung $\frac{1}{x} = y' \cdot \ln a$, also $y' = (\log x)' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}$.

F. MEYER, Bern.

Aufgaben

Eine weitere Lösung zu Aufgabe 1: Ein reguläres Fünfeck zu zeichnen, dessen Seiten als gerade Linien (also eventuell in ihrer Verlängerung) der Reihe nach durch fünf in der Ebene gegebene Punkte hindurchgehen. Wann ist die Aufgabe lösbar? P. FINSLER.

L'énoncé peut se préciser comme suit sans en altérer le caractère: Etant donnés cinq points numérotés du plan, à quelle condition peut-on tracer un pentagone régulier convexe, dont les côtés (prolongés au besoin) passent successivement par les cinq points donnés, lorsque le polygone est parcouru dans le sens positif, c'est-à-dire en maintenant l'intérieur à gauche?

En cas de possibilité, on demande une construction effective.

1. Nous allons démontrer ce qui suit:

Il existe en général un et un seul polygone régulier convexe à n sommets, dont les quatre premiers côtés, dans le sens de parcours positif, passent successivement par quatre points donnés P_1, P_2, P_3, P_4 du plan.

A chaque triple P_1, P_2, P_3 correspond cependant un point singulier d'indice n ; lorsque P_4 est situé en ce point, il existe une infinité de polygones satisfaisant à la condition énoncée; il en est un et un seul dont le cinquième côté passera par un cinquième point donné P_5 , à moins que P_5 ne soit à son tour le point singulier d'indice n relatif au triple P_2, P_3, P_4 ; en ce cas particulier, on peut faire passer le sixième côté par un sixième point quelconque donné P_6 ; et ainsi de suite indéfiniment.

Pour cet énoncé on supposera le polygone parcouru (en sens positif) autant de fois qu'il le faudra, le $(n+k)^e$ côté étant identique au k^e . On dit pour abrégé que ce côté passe par un point P_k , en entendant éventuellement que c'est son prolongement qui passe par ce point. L'indice n est un entier donné quelconque supérieur à 2.

On en déduit, pour le cas particulier $n = 5$, que la construction du pentagone demandé ne sera possible en général que si le cinquième point, P_5 , est situé sur une droite déterminée par les quatre premiers, P_1, P_2, P_3, P_4 . Elle sera encore possible cependant, quel que soit P_5 , si P_4 est singulier d'indice 5 relatif aux trois points précédents. La réponse sera unique dans les deux cas, à moins que P_4 et P_5 soient tous deux singuliers d'indice 5 relatifs aux trois points qui les précèdent.

2. Voici la construction effective dans le cas général:

(I) Sur la base $P_k P_{k+1}$, on cherche le sommet S_k du triangle isocèle dont l'angle au sommet mesure $2\pi/n$ radians, dans le sens positif de la mesure des angles, en passant de $S_k P_k$ à $S_k P_{k+1}$ ($k = 1, 2, 3$).