

# Aufgaben

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **2 (1947)**

Heft 3

PDF erstellt am: **12.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

ren soll, so muß  $P$  mit  $A$  zusammenfallen. Die Basis der speziellen  $E$  wird daher  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . Demnach gilt  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + i \cdot i$ .

Hier lassen sich die üblichen Betrachtungen über die Eigenschaften der Zahl  $e$  anschließen.

5. *Bestimmung der Konstanten  $k$ .* Nachdem dann  $e$  als Basis der natürlichen Logarithmen eingeführt worden ist, kann  $a = e^{\ln a}$  und  $y = a^x = e^{x \ln a}$  geschrieben werden. Durch Differenzieren folgt:  $(a^x)' = \ln a \cdot e^{x \ln a} = \ln a \cdot a^x$ ; also ergibt sich, daß  $k = \ln a$  ist.

6. *Die Logarithmusfunktionen.* Durch Spiegelung an der Geraden  $y = x$  folgt aus  $y = e^x$  die Logarithmusfunktion  $x = e^y$  oder  $y = \ln x$ . Das Differenzieren von  $x = e^y$  ergibt  $1 = e^y \cdot y'$  oder  $y' = (\ln x)' = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$ . Wird aber  $y = a^x$  an der Geraden  $y = x$  gespiegelt, so ergibt sich  $x = a^y$  oder  $y = \log x$  und durch Logarithmieren von  $x = a^y$  folgt

$\ln x = y \ln a$  und durch Differenzieren dieser Gleichung  $\frac{1}{x} = y' \cdot \ln a$ , also  $y' = (\log x)' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}$ .

F. MEYER, Bern.

## Aufgaben

*Eine weitere Lösung zu Aufgabe 1:* Ein reguläres Fünfeck zu zeichnen, dessen Seiten als gerade Linien (also eventuell in ihrer Verlängerung) der Reihe nach durch fünf in der Ebene gegebene Punkte hindurchgehen. Wann ist die Aufgabe lösbar? P. FINSLER.

L'énoncé peut se préciser comme suit sans en altérer le caractère: Etant donnés cinq points numérotés du plan, à quelle condition peut-on tracer un pentagone régulier convexe, dont les côtés (prolongés au besoin) passent successivement par les cinq points donnés, lorsque le polygone est parcouru dans le sens positif, c'est-à-dire en maintenant l'intérieur à gauche?

En cas de possibilité, on demande une construction effective.

1. Nous allons démontrer ce qui suit:

*Il existe en général un et un seul polygone régulier convexe à  $n$  sommets, dont les quatre premiers côtés, dans le sens de parcours positif, passent successivement par quatre points donnés  $P_1, P_2, P_3, P_4$  du plan.*

*A chaque triple  $P_1, P_2, P_3$  correspond cependant un point singulier d'indice  $n$ ; lorsque  $P_4$  est situé en ce point, il existe une infinité de polygones satisfaisant à la condition énoncée; il en est un et un seul dont le cinquième côté passera par un cinquième point donné  $P_5$ , à moins que  $P_5$  ne soit à son tour le point singulier d'indice  $n$  relatif au triple  $P_2, P_3, P_4$ ; en ce cas particulier, on peut faire passer le sixième côté par un sixième point quelconque donné  $P_6$ ; et ainsi de suite indéfiniment.*

*Pour cet énoncé on supposera le polygone parcouru (en sens positif) autant de fois qu'il le faudra, le  $(n+k)^e$  côté étant identique au  $k^e$ . On dit pour abrégé que ce côté passe par un point  $P_k$ , en entendant éventuellement que c'est son prolongement qui passe par ce point. L'indice  $n$  est un entier donné quelconque supérieur à 2.*

On en déduit, pour le cas particulier  $n = 5$ , que la construction du pentagone demandé ne sera possible en général que si le cinquième point,  $P_5$ , est situé sur une droite déterminée par les quatre premiers,  $P_1, P_2, P_3, P_4$ . Elle sera encore possible cependant, quel que soit  $P_5$ , si  $P_4$  est singulier d'indice 5 relatif aux trois points précédents. La réponse sera unique dans les deux cas, à moins que  $P_4$  et  $P_5$  soient tous deux singuliers d'indice 5 relatifs aux trois points qui les précèdent.

2. Voici la construction effective dans le cas général:

(I) Sur la base  $P_k P_{k+1}$ , on cherche le sommet  $S_k$  du triangle isocèle dont l'angle au sommet mesure  $2\pi/n$  radians, dans le sens positif de la mesure des angles, en passant de  $S_k P_k$  à  $S_k P_{k+1}$  ( $k = 1, 2, 3$ ).

(II) Sur la base  $S_k S_{k+1}$ , on cherche le sommet  $A_k$  du triangle isocèle dont l'angle au sommet mesure  $4\pi/n$  radians, dans le sens positif de la mesure des angles, en passant de  $A_k S_k$  à  $A_k S_{k+1}$  ( $k = 1, 2$ ).

(III) Avec centre  $A_k$ , on trace le cercle  $C_k$  passant par  $S_k$  et  $S_{k+1}$  ( $k = 1, 2$ ).

(IV) L'intersection autre que  $S_2$ , des deux cercles  $C_1$  et  $C_2$  est le centre  $C$  du polygone cherché. Au cas où les deux cercles coïncident, tout point de  $C_1 = C_2$  est admissible comme centre. Sinon,  $C$  est unique et bien déterminé.

(V) On mène par le point  $P_1$  la parallèle à la droite  $C S_1$ , puis on la fait tourner autour de  $P_1$  de l'angle complémentaire à  $\pi/n$  radians, dans le sens positif de la mesure des angles. La droite ainsi trouvée est le premier côté, prolongé, du polygone cherché. Il faudra lui donner un sens de parcours maintenant le centre  $C$  à gauche. Pour avoir le  $k^{\text{e}}$  côté du polygone cherché, on n'a qu'à mener par  $P_k$  la droite dirigée faisant avec le premier côté dirigé un angle de  $2(k-1)\pi/n$  radians, dans le sens positif de la mesure des angles.

La construction (V) réussit chaque fois que le centre  $C$  déterminé par (IV) se distingue bien du point  $S_1$ . Il y a exception si  $S_1 = S_2$ :  $P_1, P_2, P_3$  sont alors les trois premiers sommets d'un certain polygone régulier convexe  $\Pi_0$  à  $n$  sommets, dans le sens de parcours positif. En ce cas, on substitue à la construction (V) la construction :

(V') On mène par le point  $P_3$  la parallèle à la droite  $C S_3$ , puis on la fait tourner autour de  $P_3$  de l'angle complémentaire à  $\pi/n$ , dans le sens positif de la mesure des angles. Ce sera le troisième côté du polygone cherché, qu'on dotera du sens de parcours laissant le centre  $C$  à gauche. Le  $k^{\text{e}}$  côté formera avec celui-là un angle de  $2(k-3)\pi/n$  radians dans le sens positif. Si cependant  $P_4$  se trouvait au quatrième sommet du polygone  $\Pi_0$ ,  $S_1 = S_2 = S_3 = C$ , on peut tracer comme premier côté une droite quelconque par  $P_1$ , et en déduire les trois autres côtés.

(VI) Au cas où le centre  $C$  fourni par (IV) n'est pas unique, on pourra se donner un cinquième point  $P_5$ , répéter la construction (I) avec  $k = 4$ , et les constructions (II) et (III) avec  $k = 3$ , pour déterminer le centre  $C$  à l'intersection du cercle  $C_3$  avec le cercle  $C_1 = C_2$ . Si cependant  $C_3$  se trouvait encore confondu avec  $C_1 = C_2$ , on pourrait se donner un sixième point  $P_6$  et continuer de même. Après avoir fixé le centre  $C$  comme ci-dessus, la construction du polygone cherché se fera toujours par les méthodes (V) ou (V'), en remplaçant l'indice 3 qui figure en (V') par l'indice du premier point  $P_k$  non situé au sommet correspondant du polygone  $\Pi_0$ .

On obtiendra de cette façon un polygone unique et bien déterminé, sauf au cas où tous les points  $P_k$  donnés, ou choisis ultérieurement, se trouvent situés aux sommets successifs d'un même polygone régulier convexe  $\Pi_0$  à  $n$  côtés, parcouru autant de fois qu'on le voudra dans le sens positif. La conclusion à laquelle on parvient dans ce cas est du reste évidente a priori, c'est que tout polygone répondant au problème se déduit du polygone  $\Pi_0$  en faisant pivoter chaque côté prolongé d'un même angle arbitraire autour de son premier sommet, la rotation se faisant toujours dans le même sens. Tous les polygones obtenus ont le même centre  $C$ , celui de  $\Pi_0$ .

3. En établissant la validité de la construction indiquée au n° 2, on aura du même coup démontré complètement l'énoncé du n° 1. Il est clair, en effet, que le cas d'exception auquel s'applique la construction (VI) a lieu seulement si le point  $P_4$  occupe une position déterminée, sans ambiguïté possible, par les points  $P_1, P_2, P_3$  supposés donnés. Cette position singulière d'indice  $n$  se trouve en remontant du point  $S_3$  à la base  $P_3 P_4$  du triangle isocèle d'angle  $2\pi/n$  au sommet  $S_3$ ; le point  $S_3$  lui-même aura été déduit de  $S_2$  par une rotation positive d'angle  $4\pi/n$  autour du centre  $A_1 = A_2$ .

*Démonstration.* Nous utilisons pour abrégier la notation complexe. Soit  $z_k$  le point donné  $P_k$ , et  $c$  le centre  $C$  supposé trouvé. Il faut et suffit qu'une rotation de  $2\pi(k-1)/n$  radians dans le sens négatif autour de  $c$  ramène le point  $z_k$  sur le premier côté tracé par  $z_1$ ; c'est-à-dire que les points

$$w_k = (z_k - c) e^{-2\pi i(k-1)/n} \quad (1)$$

soient alignés en ligne droite, laquelle ligne se confond avec le premier côté. Or

$$w_{k+1} - w_k = [z_{k+1} - z_k e^{2\pi i/n} + c (e^{2\pi i/n} - 1)] e^{-2\pi i k/n}, \quad (2)$$

d'où, en posant

$$\zeta_k = \frac{z_{k+1} - z_k e^{2\pi i/n}}{1 - e^{2\pi i/n}}, \quad (3)$$

la relation équivalente

$$w_{k+1} - w_k = (\zeta_k - c) (1 - e^{2\pi i/n}) e^{-2\pi i k/n}. \quad (4)$$

Les points  $S_k$  définis par (3) ne sont autres que les points  $S_k$  de la construction (I), puisqu'on a

$$z_{k+1} - \zeta_k = (z_k - \zeta_k) e^{2\pi i/n}. \quad (5)$$

On demande que les quantités

$$\frac{w_{k+1} - w_k}{w_k - w_{k-1}} = \frac{\zeta_k - c}{\zeta_{k-1} - c} e^{-2\pi i/n} \quad (6)$$

soient réelles (positives ou négatives), c'est-à-dire que

$$\arccos(\zeta_k - c) - \arccos(\zeta_{k-1} - c) = \frac{2\pi}{n} \text{ ou } \frac{2\pi}{n} - \pi. \quad (7)$$

Or, d'après les constructions (II) à (V), le segment  $S_k S_{k+1}$  est vu sous un angle  $4\pi/n$  (dans le sens positif) à partir du centre  $A_k$  d'un cercle comprenant sur sa circonférence le point  $C$ ; le segment  $S_k S_{k+1}$  est donc vu, à partir du point  $C$ , sous un angle soit de  $2\pi/n$  dans le sens positif, soit de  $\pi - 2\pi/n$  dans le sens négatif, ce qui équivaut à (7). On a donc établi que les points  $w_k$  sont alignés. Pour achever, il faut vérifier suivant (V) que cette droite fait avec la demi-droite  $CS_1$  un angle  $\pi/2 - \pi/n$  radians dans le sens positif. Cela résulte immédiatement de (4), qui donne

$$\begin{aligned} w_1 - w_2 &= (\zeta_1 - c) (e^{\pi i/n} - e^{-\pi i/n}) e^{-\pi i/n} \\ &= (\zeta_1 - c) 2i \sin \frac{\pi}{n} e^{-\pi i/n}. \end{aligned}$$

La construction est donc établie.

R. C. YOUNG, London.

**Aufgabe 11.** Gegeben sind zwei konzentrische Kreise mit den Radien  $r$  und  $R$  ( $r < R$ ). Auf dem kleineren Kreis liege ein fester Punkt  $P$ ; durch ihn zieht man die beliebige Sehne  $PA$  ( $A$  ist demnach ein veränderlicher Punkt des kleineren Kreises). Durch  $P$  gehe normal zu  $PA$  die Sehne  $BC$  des größeren Kreises. Es ist zu beweisen, daß

1. die Summe  $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$  einen konstanten Wert hat;
2. die Summe  $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2$  ebenfalls konstant ist.

Auch ist zu bestimmen der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Strecken 3)  $BC$   
4)  $AB$  5)  $AC$ .

E. VOELLMY.

**Lösung:** Man ziehe durch  $A$  die Parallele zu  $BC$ . Ihre Schnittpunkte mit dem größern Kreis seien  $B'$  und  $C'$ , Dann sind die Vierecke  $APBB'$  und  $APCC'$  Rechtecke. Daraus folgen:

1.  $(\overline{BP} + \overline{PC})^2 + \overline{AP}^2 = (\overline{BP} + \overline{PC})^2 + \overline{BB'}^2 = 4R^2$ , also:

$$\overline{BP}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{AP}^2 = 4R^2 - 2 \cdot \overline{BP} \cdot \overline{PC}.$$

$\overline{BP} \cdot \overline{PC}$  ist aber nach dem Sehnensatz konstant und zwar gleich  $(R + r)(R - r) = R^2 - r^2$ ; daher gilt:

$$\overline{BP}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{AP}^2 = \text{konst.} = 2(R^2 + r^2).$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 &= \overline{BP}^2 + \overline{AP}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{AP}^2 + (\overline{BP} + \overline{PC})^2 \\
 &= 2[(\overline{BP} + \overline{PC})^2 + \overline{AP}^2] - 2 \cdot \overline{BP} \cdot \overline{PC}, \\
 \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 &= 8R^2 - 2(R^2 - r^2) = 6 \cdot R^2 + 2 \cdot r^2 = \text{konst.}
 \end{aligned}$$

3. Sei  $D$  der zweite Schnittpunkt der Sehne  $BC$  mit dem kleinern Kreis und  $M$  der Mittelpunkt der beiden Kreise. Dann ist der geometrische Ort des Mittelpunktes von  $\overline{BC}$  zugleich geometrischer Ort des Mittelpunktes von  $\overline{PD}$  und dieser ist das ähnliche Bild des kleinen Kreises bezüglich  $P$  im Maßstab 1:2, d. h. der Kreis über  $\overline{PM}$  als Durchmesser.

Da die Vierecke  $APBB'$  und  $APCC'$  Rechtecke sind, fallen die Mittelpunkte der Strecken  $\overline{AB}$  und  $\overline{AC}$  mit denen der Strecken  $\overline{PB'}$  und  $\overline{PC'}$  zusammen. Ihr geometrischer Ort – die beiden Oerter fallen aus Symmetriegründen in eine Kurve zusammen – ist also das ähnliche Bild des größern Kreises bezüglich  $P$  im Maßstab 1:2.

W. PROKOP, Winterthur.

Weitere Lösungen sandten: L. KIEFFER (Luxembourg), B. SCHENKER (Bern), E. BEERENWINKEL (St. Gallen), K. RIEDER (Riehen).

*Aufgabe 14.*  $P$  sei ein Punkt einer CASSINISCHEN Kurve mit den Polen  $F_1$  und  $F_2$ . Man zeige, daß die Kurvennormale in  $P$  die Symmediane des Dreiecks  $F_1 F_2 P$  ist (d. h. symmetrisch zur Mediane  $m_P$  bezüglich der Winkelhalbierenden  $w_P$ ). W. LÜSSY.

*Lösung:* Sind  $P$  und  $P'$  zwei Kurvenpunkte, so liegen wegen  $\frac{r_1}{r_1'} = \frac{r_2}{r_2'}$  die Punkte  $F_1, F_2$  auf zwei gleichen Apollonischen Kreisen bezüglich der Strecke  $\overline{PP'}$ . Der Grenzübergang  $P' \rightarrow P$  zeigt, daß die Normalen  $n_i$  in  $F_i$  zu  $PF_i$  auf der Kurventangente  $t$  gleiche Abschnitte  $\overline{PT_1} = \overline{PT_2}$  bestimmen. Die Tangente  $t$  ist also parallel zur Diagonalen  $QR$  des Parallelogramms  $PQDR$ , das durch die Ecke  $P$  und die Geraden  $n_i$  bestimmt ist. Die andere Diagonale  $PD$  (Mittelpunkt  $M$ ) ist Umkreisdurchmesser für das Sehnenviereck  $F_1 DF_2 P$ . Aus den gegensinnig ähnlichen Dreiecken  $F_1 F_2 P$  und  $DPR$  erhält man durch Spiegelung des erstern an der Winkelhalbierenden  $w_P$  die gleichsinnig ähnlichen Dreiecke  $F_1' F_2' P$  und  $DPR$ , deren homologe Seiten aufeinander senkrecht stehen. Es entsprechen sich nun die Medianen  $m_P$  und  $MR$ ; folglich ist  $m_P'$  (das Spiegelbild zu  $m_P$  bezüglich  $w_P$ ) identisch mit der Kurvennormalen.

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht.

Der Verfasser teilt mit, daß ihm nachträglich die folgende Literaturstelle bekannt wurde, wo im wesentlichen dasselbe Verfahren (J. STEINER) erwähnt wird: G. LORIA, Ebene Kurven, deutsche Ausgabe, Leipzig 1902, S. 197f. Weitere Lösung (analytisch) von L. KIEFFER (Luxembourg).

*Aufgabe 17.* Deux droites gauches  $a$  et  $b$  sont tangentes à une sphère. Trouver le lieu géométrique des points de contact de toutes les tangentes à la sphère qui coupent  $a$  et  $b$ . L. KOLLROS.

*Lösung:* Die Tangenten  $a$  und  $b$  können als Erzeugende erster Art eines einschaligen Rotationshyperboloids aufgefaßt werden, das von der Kugel berührt wird. Sämtliche Erzeugende zweiter Art sind Tangenten an die Kugel, die  $a$  und  $b$  schneiden; der Ort ihrer Berührungspunkte ist der dem Hyperboloid und der Kugel gemeinsame Kreis, der durch die Berührungspunkte der gegebenen Geraden gehen und diese unter gleichen Winkeln schneiden muß. Es gibt zwei solcher Kreise, die miteinander rechte Winkel bilden.

Demnach gilt: Der gesuchte geometrische Ort ist das Paar der Kugelkreise, die  $a$  und  $b$  unter gleichen Winkeln schneiden. W. LÜSSY.

Herr KOLLROS schreibt dazu: «L'une des 2 solutions élégantes du problème 17 que j'avais envisagées est celle que M. LÜSSY vous communique; l'autre est la suivante: Si  $A$  et  $B$  sont les points de contact de la sphère avec  $a$  et  $b$ ,  $x$  une droite variable coupant  $a$  et  $b$  et touchant la sphère en  $X$ , les plans  $(ax)$  et  $(bx)$  coupent la sphère suivant 2 cercles  $\alpha$  et  $\beta$  tangents en  $X$ . La projection stéréographique de centre  $A$  transforme les cercles  $\alpha \dots$  en droites  $\alpha' \dots$  parallèles à  $a$  et tangentes en  $X' \dots$  aux cercles  $\beta' \dots$  qui ont en  $B'$  une tangente donnée  $b'$ . Le lieu des points de contact  $X'$  se compose de 2 droites rectangulaires passant par  $B'$  dont les projections sur la sphère sont les 2 cercles orthogonaux cherchés.»

26. Beweise für die Fläche eines Dreiecks die Formel

$$F = \frac{(p_a \sin \alpha + p_b \sin \beta + p_c \sin \gamma)^2}{2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}.$$

$\alpha, \beta, \gamma$  sind die Gegenwinkel der Seiten  $a, b, c$  und  $p_a, p_b, p_c$  die mit Vorzeichen versehenen Abstände der Seiten von einem beliebigen Punkt der Ebene. E. TROST.

## Literaturüberschau

### Ein merkwürdiger Kauz unter den Mathematikern des 18. Jahrhunderts

Der König: «Welche Wissenschaft haben Sie besonders studiert?»

Der Gelehrte: «Alle, Sire!»

Der König: «Sie sind also auch ein guter Mathematiker?»

Der Gelehrte: «Jawohl, Sire!»

Der König: «Wer hat Sie in Mathematik unterrichtet?»

Der Gelehrte: «Ich selbst.»

Der König: «Dann sind Sie also ein zweiter Pascal?»

Der Gelehrte: «Jawohl, Sire.»

So berichtet THIÉBAULT über das erste Zusammentreffen des Mathematikers JOHANN HEINRICH LAMBERT mit dem Hohenzollern Friedrich II. in Potsdam, März 1764. «Le plus grand imbécile que j'ai jamais vu!» so faßte der Fürst seinen ersten Eindruck zusammen, und die beabsichtigte Anstellung an der Berliner Akademie schien zu entschwinden. Ganz anders dachte Lambert über seine Aussichten: «Wenn der König mich nicht behält, so wäre es ein Flecken in seiner Geschichte.» Er behielt recht.

Man hat diese Anekdote hauptsächlich als einen Beleg für LAMBERTS eitles Selbstbewußtsein weitergegeben. Es steckt aber mehr Positives darin, vor allem ein prachtvolles Stück von jenem «Männerstolz vor Königsthronen», den der Schweizer mehr besang als ausübte, ein Gefühl für den Wert der Wissenschaft als einer geistigen Macht — gegenüber dem Vertreter des aufgeklärten Despotismus. Das hat auch seinen Eindruck nicht verfehlt: der Kauz wurde vom König immer höher geschätzt und ausgezeichnet, während der doch größere Euler ungeachtet seiner Gefügigkeit es in der königlichen Gunst nicht ganz so weit brachte.

Das *Werk* LAMBERTS wird aus dem *Lebenslauf* verständlicher. JOHANN HEINRICH LAMBERT wurde am 26. April 1728 in Mülhausen als Sohn eines kleinen Stückschneiders geboren und inmitten einer zahlreichen Familie für den Beruf des Vaters bestimmt. Bis zu seinem 12. Jahre besuchte er die öffentlichen Schulen. Den Lehrern fiel er durch seine Fähigkeiten auf, und sie hätten ihm, vereint mit dem umgestimmten Vater,