

# Kleine Mitteilungen

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **2 (1947)**

Heft 4

PDF erstellt am: **12.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$\alpha$  muß der Schnittwinkel in den Doppelpunkten sein<sup>1)</sup>. Wir zeigen zur Probe, daß allgemein einer der Schnittwinkel in einem Doppelpunkt von (6) ein gleichschenkliges Tangendendreieck  $D_\alpha$  liefert, sofern  $a$  eine ganze Zahl von der Form  $4m \pm 1$  ist. Das mit (6) gebildete Gleichungssystem  $x(\vartheta_1) = x(\vartheta_2)$ ,  $y(\vartheta_1) = y(\vartheta_2)$ ,  $\vartheta_1 \neq \vartheta_2$  erhält nach goniometrischer Umformung die Gestalt

$$(R-r) \sin \frac{1}{2} (\vartheta_1 - \vartheta_2) \cos \frac{1}{2} (\vartheta_1 + \vartheta_2) = r \sin \frac{R-r}{2r} (\vartheta_1 - \vartheta_2) \cos \frac{R-r}{2r} (\vartheta_1 + \vartheta_2)$$

$$- (R-r) \sin \frac{1}{2} (\vartheta_1 - \vartheta_2) \sin \frac{1}{2} (\vartheta_1 + \vartheta_2) = r \sin \frac{R-r}{2r} (\vartheta_1 - \vartheta_2) \sin \frac{R-r}{2r} (\vartheta_1 + \vartheta_2),$$

daraus durch Division

$$- \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\vartheta_1 + \vartheta_2) = \operatorname{tg} \frac{R-r}{2r} (\vartheta_1 + \vartheta_2), \quad \text{also } \vartheta_1 + \vartheta_2 = \frac{2r\pi}{R}.$$

Da  $\sin \frac{r\pi}{R} = \sin \frac{R-r}{R} \pi$ ,  $\vartheta_1 - \vartheta_2 = (a+1)(\varphi_1 - \varphi_2) = (a+1)\bar{\beta}$ , wo  $\bar{\beta}$  einer der Schnittwinkel im Doppelpunkt ist, erhält man

$$- (R-r) \sin \frac{1}{2} (a+1)\bar{\beta} = r \sin \frac{(R-r)(a+1)}{2r} \bar{\beta}$$

oder  $(a-1) \sin \frac{1}{2} (a+1)(\pi - \bar{\beta}) = (a+1) \sin \frac{1}{2} (a-1)(\pi - \bar{\beta})$ .

Setzt man  $\frac{1}{2} (a-1)(\pi - \bar{\beta}) = u$ ,  $\frac{1}{2} (a+1)(\pi - \bar{\beta}) = v$ ,  $\frac{v}{u} = \frac{a+1}{a-1} = k$ ,

so folgt  $\sin ku = k \sin u$

also  $u = \varphi$ , das heißt  $\pi - \bar{\beta} = \beta$ ,  $\alpha = \pi - \beta = \beta$ , w. z. b. w.

ERNST TROST, Zürich.

## Kleine Mitteilungen

### I. Die trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen

P. ROSSIER hat im Heft 5 (Bd. 1) der Elemente die Differentialgleichung der Funktionen  $\sin x$  und  $\cos x$  aus ihren Additionstheoremen hergeleitet. Es ist nicht ohne Interesse, den umgekehrten Weg einzuschlagen, das heißt, aus der Differentialgleichung allein auf die charakteristischen Eigenschaften dieser Funktionen zu schließen. Dies sei im folgenden für die trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen gemeinsam durchgeführt.

Wir gehen aus von der Differentialgleichung

$$y''(x) + k y(x) = 0 \quad \text{mit } k = \pm 1. \quad (1)$$

Bekanntlich besitzt (1) für willkürlich vorgeschriebene Anfangsbedingungen  $y(0)$ ,  $y'(0)$  genau eine Lösung, die sich über den ganzen Bereich  $-\infty < x < +\infty$  erstreckt.

<sup>1)</sup> Die Spitzen der von S beschriebenen ähnlichen Hypozykloide liegen in den Doppelpunkten der ursprünglichen.

Sei  $y = f(x)$  die Lösung von (1) mit den Anfangsbedingungen  $f(0) = 0, f'(0) = 1$ ,  
 $y = g(x)$  die Lösung von (1) mit den Anfangsbedingungen  $g(0) = 1, g'(0) = 0$

(In der üblichen Schreibweise ist also  $f(x) = \sin x$  bzw.  $\text{Sh } x$  und  $g(x) = \cos x$  bzw.  $\text{Ch } x$ , je nachdem  $k = +1$  bzw.  $k = -1$ .)

Auch  $f'(x)$  ist Lösung von (1).  $f'(0) = 1, f''(0) = 0$  Also

$$f'(x) = g(x) \quad (2)$$

Integrieren wir (1) für  $y = g(x)$ , so folgt unter Berücksichtigung von (2)

$$\begin{aligned} g'(x) + k f(x) &= g'(0) + k f(0) = 0 \\ g'(x) &= -k f(x) \end{aligned} \quad (3)$$

Zufolge  $g''(-x) + k g(-x) = 0$  und  $g''(-x) = (g(-x))''$  ist auch  $g(-x)$  Lösung von (1). Die Anfangsbedingungen sind dieselben wie für  $g(x)$ . Also

$$g(-x) = g(x). \quad (4)$$

(4) und (2) ergeben

$$f(-x) = -f(x). \quad (5)$$

Aus (2) und (3) schließt man auf

$$\begin{aligned} 2 g(x) g'(x) + 2 k f(x) f'(x) &= 0, \\ g(x)^2 + k f(x)^2 &= g(0)^2 + k f(0)^2 = 1. \end{aligned} \quad (6)$$

$f(x)$  und  $g(x)$  sind linear unabhängig. Sie bilden ein fundamentales Lösungssystem von (1). Es gilt daher

$$f(x + \xi) = a(\xi) f(x) + b(\xi) g(x)$$

und, wenn wir nach  $x$  differenzieren, unter Berücksichtigung von (2), (3),

$$g(x + \xi) = a(\xi) g(x) - k b(\xi) f(x).$$

Setzen wir in beiden Gleichungen  $x = 0$ , so ergibt sich  $b(\xi) = f(\xi)$ ,  $a(\xi) = g(\xi)$  und die Gleichungen sind nichts anderes als die Additionstheoreme der trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen:

$$f(x + \xi) = f(x) g(\xi) + g(x) f(\xi) \quad (7)$$

$$g(x + \xi) = g(x) g(\xi) - k f(x) f(\xi) \quad (8)$$

Bekanntlich ist die Wronskische Determinante  $y_1 y_2' - y_1' y_2$  zweier Lösungen  $y_1$  und  $y_2$  von (1) nie 0 bzw. identisch 0, je nachdem  $y_1$  und  $y_2$  linear unabhängig bzw. abhängig sind.  $g(x) f'(x) - g'(x) f(x)$  ist +1 für  $x = 0$ , also stets positiv. Für die Funktion

$$\tau(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

gilt also

$$\tau'(x) = \frac{g(x) f'(x) - g'(x) f(x)}{g(x)^2} > 0.$$

$\tau(x)$ , das heißt  $\text{tg } x$  bzw.  $\text{Th } x$ , ist also monoton wachsend und wegen (4) und (5) ungerade.

Dies sind, abgesehen von der Periodizität von  $f(x)$  und  $g(x)$  im Falle  $k = +1$ , die wesentlichen Eigenschaften dieser Funktionen, aus denen alle übrigen leicht folgert werden können.

Um die Nullstellen von  $f(x)$  und  $g(x)$  zu diskutieren, müssen wir die Fälle  $k = +1$  und  $k = -1$  getrennt behandeln.

a)  $k = +1$ 

Hätte  $g(x)$  keine Nullstelle, so wäre  $f'(x)$  stets positiv, wegen (6) also  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$ ,  $0 < l \leq 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) = 0$ , im Widerspruch zu (1). Sei  $x = \frac{a}{2}$  die erste positive Nullstelle von  $g(x)$ .  $f(x)$  besitzt im Intervall  $0 < x \leq \frac{a}{2}$  keine Nullstelle, eine unmittelbare Folgerung aus (2) oder auch aus dem ersten Satz von STURM.  $f\left(\frac{a}{2}\right)$  ist daher positiv und wegen (6)  $f\left(\frac{a}{2}\right) = +1$ .  $f\left(x + \frac{a}{2}\right)$  ist Lösung von (1). Für  $x = 0$  nimmt sie den Wert 1, ihre Ableitung den Wert 0 an. Also ist

$$f\left(x + \frac{a}{2}\right) = g(x), \quad (9)$$

$$f\left(-x + \frac{a}{2}\right) = g(-x) = g(x) = f\left(x + \frac{a}{2}\right).$$

Ersetzen wir in der letzten Gleichung  $x$  durch  $x + \frac{a}{2}$ , so wird

$$f(x + a) = f(-x) = -f(x), \quad (10)$$

$$f(x + 2a) = -f(x + a) = f(x). \quad (11)$$

Die Differentiation von (9), (10), (11) ergibt die entsprechenden Formeln für  $g(x)$ :

$$g\left(x + \frac{a}{2}\right) = -f(x) \quad (9')$$

$$g(x + a) = -g(x) \quad (10')$$

$$g(x + 2a) = g(x) \quad (11')$$

Aus der Eigenschaft von  $\frac{a}{2}$ , die kleinste Nullstelle von  $g(x)$  zu sein, aus (4) und aus (10') folgt, daß  $g(x) = 0$  genau für  $x = \frac{a}{2} + na$ ,  $n$  ganz. Hieraus und aus (9) folgt, daß  $f(x) = 0$  genau für  $x = na$ .

Um zu beweisen, daß  $a = \pi$ , müssen wir  $f(x)$  und  $g(x)$  in Beziehung zum Einheitskreis bringen, mit andern Worten zeigen, daß  $f(x)$  und  $g(x)$  tatsächlich die in der üblichen Weise am Einheitskreis definierten Funktionen  $\sin x$  und  $\cos x$  sind.

Betrachten wir  $u, v$  als kartesische Koordinaten in der Ebene, so ist  $u = g(x)$ ,  $v = f(x)$  wegen (6) eine Parameterdarstellung des Einheitskreises. Für das Bogenmaß  $\varphi$  gilt

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 = \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 = [g'(x)]^2 + [f'(x)]^2 = 1,$$

also bei passender Normierung von  $\varphi$  tatsächlich  $x = \varphi$ .

b)  $k = -1$ 

Vergleichen wir die Differentialgleichung (1) für  $k = 0$  und für  $k = -1$ , so besagt der zweite Satz von STURM, daß  $f(x)$  außer  $x = 0$  keine Nullstellen besitzt. Hieraus und aus den Formeln (2) bis (6) schließt man sehr leicht auf den Verlauf der Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$ .

Der Zusammenhang mit der üblichen Definition der hyperbolischen Funktionen läßt sich folgendermaßen herstellen: Auch  $g(x) + f(x)$  und  $g(x) - f(x)$  sind Lösungen von (1), und zwar sind es diejenigen mit den Anfangsbedingungen  $+1, +1$  bzw.  $+1, -1$ . Das sind aber die mit  $e^x$  bzw.  $e^{-x}$  bezeichneten Funktionen.

Diese Herleitung bringt das Gemeinsame der trigonometrischen und der hyperbolischen Funktionen (und damit auch der Exponentialfunktion) im Reellen am ehesten zum Ausdruck. Ihre gemeinsame Wurzel ist die Differentialgleichung (1).

Naturgemäß tritt dieser Zusammenhang noch stärker in Erscheinung, wenn wir (1) als Differentialgleichung im Komplexen betrachten. Für beliebiges  $k \neq 0$  ist dann  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{k}} \sin \sqrt{k} x$ ,  $g(x) = \cos \sqrt{k} x$ . Also  $\text{Sh } x = \frac{1}{i} \sin i x$ ,  $\text{Ch } x = \cos i x$  usw. Die Formeln (2) bis (8) gelten unverändert für beliebiges  $k \neq 0$ . M. ALTWEGG, Zürich.



## II. Eine Ableitung der Cardanischen Formel mit geometrischen Hilfsmitteln

## I. Die vollständige Gleichung dritten Grades

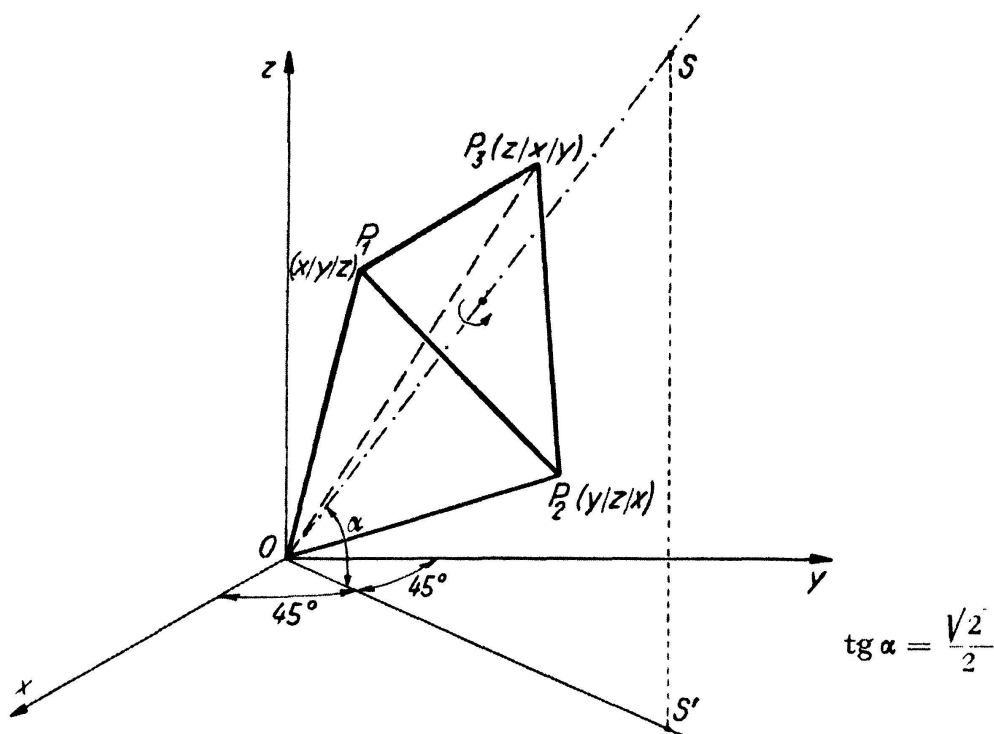
$$\eta^3 + a \cdot \eta^2 + b \cdot \eta + c = 0$$

läßt sich bekanntlich durch die Substitution  $\eta = X - \frac{a}{3}$  auf die reduzierte Form bringen:

$$X^3 + p \cdot X + q = 0. \quad (1)$$

Bei der hier angewandten Methode muß man, wie auch bei den üblichen algebraischen und trigonometrischen Methoden, von dieser Form ausgehen.

II. Wir wählen in einem dreidimensionalen rechtwinkligen Koordinatensystem einen beliebigen Punkt  $P_1(X/Y/Z)$ , der nicht auf der Achse des ersten Oktanten liegt.



Durch zweimalige Drehung dieses Punktes um  $120^\circ$  um die Achse  $OS$  (1/1/1) des ersten Oktanten erhalten wir zwei weitere Punkte  $P_2$  und  $P_3$ . Wie man leicht sieht, entspricht diese Drehung einer zyklischen Vertauschung der Koordinaten des angenommenen Punktes; somit sind die gedrehten Punkte  $P_2(Y/Z/X)$  und  $P_3(Z/X/Y)$ .

Ferner steht die Ebene  $P_1P_2P_3$  normal zur Achse  $OS$  (1/1/1). Ihre Gleichung lautet also:

$$X + Y + Z = k. \quad (2)$$

Andererseits ist das Volumen  $V$  des Tetraeders  $OP_1P_2P_3$  gegeben durch:

$$|6V| = \begin{vmatrix} XYZ \\ YZX \\ ZXY \end{vmatrix} = 3XYZ - X^3 - Y^3 - Z^3. \quad (3)$$

III. Wir setzen nun  $V = 0$ , identifizieren die Gleichungen

$$X^3 + p \cdot X + q = 0 \quad (1)$$

und

$$X^3 - 3YZ \cdot X + (Y^3 + Z^3) = 0 \quad (3)$$

in bezug auf  $X$  und erhalten:

$$\boxed{p = -3YZ} \quad (4) \qquad \boxed{q = Y^3 + Z^3} \quad (5)$$

Da aber  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  nicht auf der Drehachse liegen, verlangt  $V = 0$ , daß die Ebene  $P_1P_2P_3$  durch den Nullpunkt gehe.

Ihre Gleichung (2) wird daher:  $X + Y + Z = 0$ , oder

$$\boxed{X = -Y - Z} \quad (6)$$

Aus der Gleichung (4) folgt noch durch Umformung:

$$\boxed{Y^3 \cdot Z^3 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad (7)$$

Nach VIÈTE sind nun aus (5) und (7)  $Y^3 = t_1$  und  $Z^3 = t_2$  die Wurzeln der Gleichung:

$$\underline{t^2 - q \cdot t - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0,}$$

d. h.:

$$\boxed{t_{1,2} = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} .}$$

Werden ferner unter  $u = -\sqrt[3]{t_1} = \sqrt[3]{-t_1}$  und  $v = -\sqrt[3]{t_2} = \sqrt[3]{-t_2}$  die reellen Wurzeln und unter  $1$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  die dritten Einheitswurzeln verstanden, so ergibt sich:

$$\alpha = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \beta = -\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\underline{u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}}, \qquad \underline{v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} .}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} -Y_1 &= u, & -Y_2 &= u \cdot \alpha, & -Y_3 &= u \cdot \beta, \\ -Z_1 &= v, & -Z_2 &= v \cdot \alpha, & -Z_3 &= v \cdot \beta. \end{aligned}$$

Aus der Gleichung (6) läßt sich nun  $X$  berechnen. Wegen der Gleichung (4) ist das Produkt  $Y \cdot Z$  reell. Daraus folgt, daß von den 9 Möglichkeiten

$$X = -Y_i - Z_j \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

nur die folgenden drei in Betracht kommen:

$$\boxed{X_1 = u + v, \quad X_2 = u \cdot \alpha + v \cdot \beta, \quad X_3 = u \cdot \beta + v \cdot \alpha .}$$

**Bemerkung:** Für den Unterricht an Mittelschulen, wo die Formeln (2) und (3) aus der dreidimensionalen analytischen Geometrie nicht vorausgesetzt werden können, ist es leicht, diese durch stereometrische Betrachtungen und mit Hilfe der einzigen Formel für den Abstand zweier Punkte abzuleiten. (Siehe auch die Herleitung in H. DÖRRIC: Determinanten, Verlag R. Oldenburg, München und Berlin 1940. Neudruck 1944 bei J. W. Edwards, USA., Seite 97. Hier wird aber keine geometrische Deutung gegeben.)

B. BARDE, Küsnacht (Zch.).

III. Zwei merkwürdige Sätze über das vollständige Fünfeit<sup>1)</sup>

Fünf allgemein liegende Geraden zerlegen die Ebene in elf Gebiete, nämlich in ein von einem Fünfeckszug, in fünf von Dreieckszügen und in fünf von Viereckszügen begrenzte Gebiete. Durchläuft man die Begrenzung des fünfseitigen Gebietes, so wird dadurch den fünf Geraden eine natürliche Anordnung aufgeprägt, die durch den Zyklus (1, 2, 3, 4, 5) symbolisiert werde.<sup>2)</sup>

Man betrachte nun die Reihen von Dreiecken  $A_i$  und  $B_i$  in Figur 1:

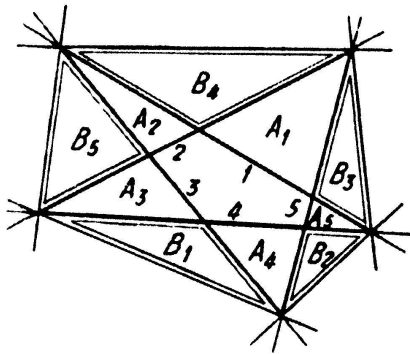


Fig. 1

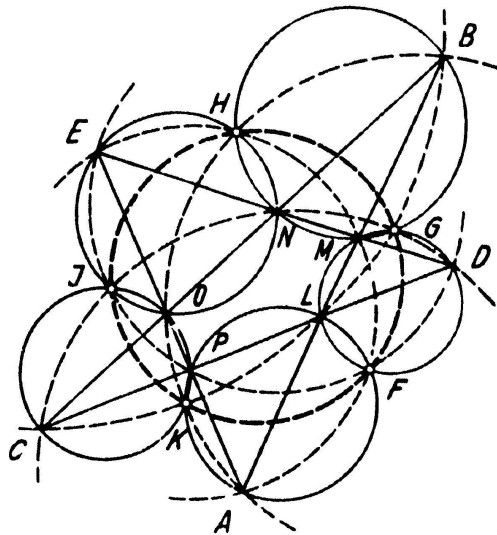


Fig. 2

Es lassen sich die schönen Sätze notieren:

- I. Satz: Die Umkreise der Dreiecke  $A_i$  schneiden sich in den Punkten eines sechsten Kreises (vgl. Fig. 2).
- II. Satz: Die Potenzlinien der Umkreise der Dreiecke  $B_i$  schneiden sich in einem Punkt (vgl. Fig. 3).

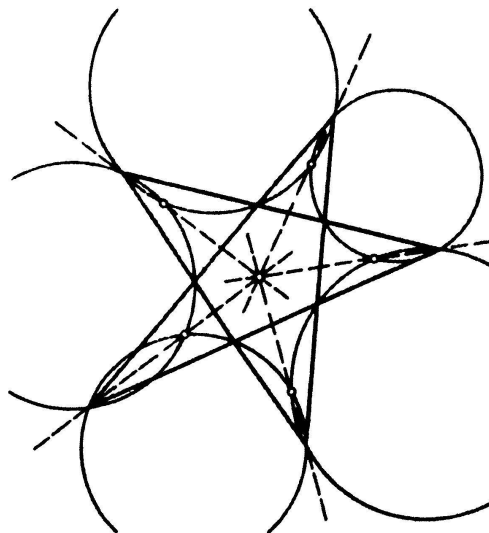


Fig. 3

Die Beweise der genannten Sätze mögen hier kurz skizziert werden:  
Satz 1 ist durchschaubar mit Hilfe des Satzes über die Peripheriewinkel. Man

<sup>1)</sup> Mitteilung an Herrn Prof. FINSLER im Januar 1941.

<sup>2)</sup> Vgl. LOCHER, Projektive Geometrie, Zürich 1940, 1. Kap.

braucht nur auf die fünf Viereckszüge den bekannten Satz anzuwenden:

Die Umkreise der Dreiecke, die durch je drei Geraden eines Vierseits gebildet werden, schneiden sich in einem Punkt.

Daher gilt (vgl. Fig. 2):

$$\sphericalangle HJG = \sphericalangle HJN + \sphericalangle NJG = \sphericalangle HEN + \sphericalangle NDG,$$

$$\sphericalangle HKG = \sphericalangle HKB + \sphericalangle BKG = \sphericalangle HON + \sphericalangle BLG = \sphericalangle HEN + \sphericalangle MDG (= NDG),$$

$$\sphericalangle HFG = \sphericalangle HFM + \sphericalangle MFG = \sphericalangle HEM (= HEN) + \sphericalangle MDG (= NDG),$$

w. z. b. w.

Satz 1 kann daher allgemein auch so ausgesprochen werden: Die Umkreise der Dreiecke, die durch je drei Geraden eines Fünfeits gebildet werden, schneiden sich in den Punkten eines neuen Kreises.

Der zweite Satz liegt tiefer; er wird sich als Spezialfall einer bemerkenswerten projektiven Beziehung herausstellen, die ich nun beschreiben möchte (Fig. 4):

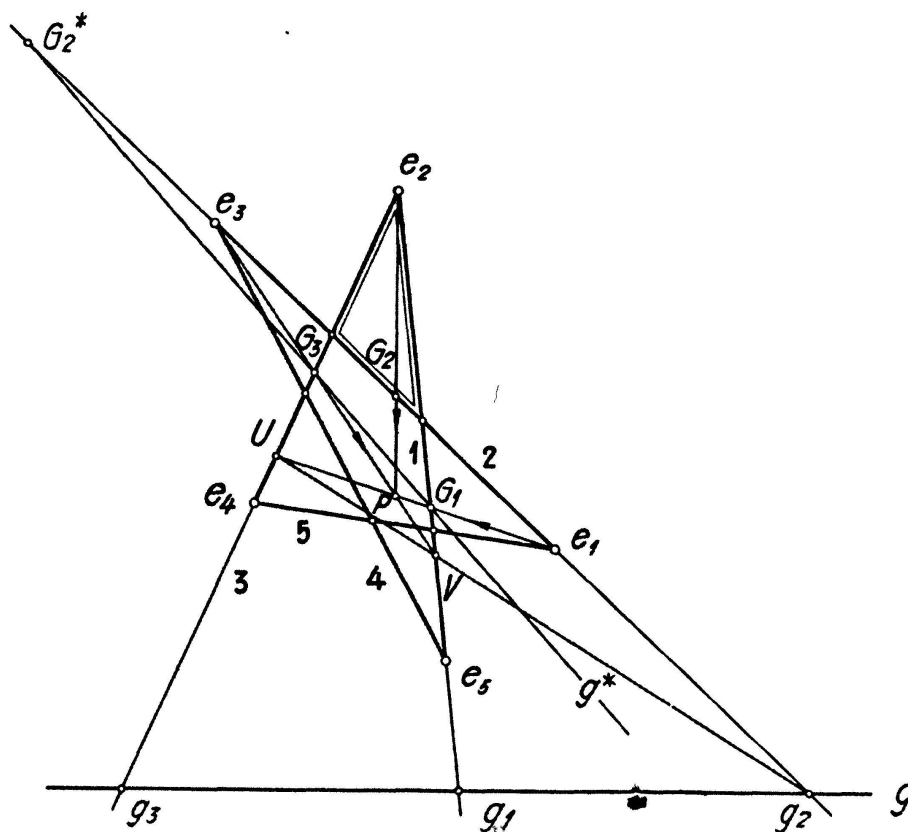


Fig. 4

Den Seiten 1, 2, 3, 4, 5 des Fünfeits ordne man in dieser Anordnung die Punkte  $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$  zu. Die vier Punkte auf jeder Geraden  $i$  des Fünfeits sollen nun als die erzeugenden Elemente einer hyperbolischen Involution aufgefaßt werden, derart aber, daß zugeordnete Paare nicht ineinanderliegen.

Eine beliebige Gerade  $g$  möge die Seiten des Fünfergebildes in den Punkten  $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5$  schneiden. Sucht man auf der Geraden  $i$  den zu  $g_i$  in der Involution gepaarten Punkt  $G_i$  und bildet man die Strahlen  $s_i = (e_i G_i)$ , so laufen diese fünf Strahlen durch einen festen Punkt  $P$ .

Zum Beweis ziehen wir ein Theorem über verbundene Involutionen heran (vgl. R. STURM, Die Lehre der geometrischen Verwandtschaften, Bd. I, S. 101 ff.): «Wenn drei Involutionen auf den Seiten eines Dreiecks so liegen, daß je die Ecken ein Paar bilden und einmal in gerader Linie liegenden Punkten  $U, V, W$  drei wiederum in gerader Linie liegende Punkte  $U', V', W'$  gepaart sind, so geschieht dies durchwegs.»

(Vergleiche Fig. 4.) Betrachten wir jetzt etwa das Dreieck 1, 2, 3 unseres Fünfseits, so wird offenbar durch die verbleibenden Seiten 4, 5 eine verbundene Involution festgelegt im Sinne des angeführten Satzes. Und zwar liegt auf 1 gerade die gewünschte Involution, auf 2 die Involution  $(e_1, e_3)$ .  $((1, 2) (2, 3))$ , auf 3 ist es wieder die verlangte Involution. Die in den genannten Involutionen zu  $g_1, g_2, g_3$  gepaarten Punkte liegen daher auf einer Geraden  $g^*$ . Es sind dies die Punkte  $G_1, G_2^*, G_3$ .

Bedeutet  $U$  und  $V$  die Schnittpunkte der Geraden  $e_1 G_1$  mit 3, respektive der Geraden  $e_3 G_3$  mit 1, so folgt durch Anwendung des Involutionssatzes vom vollständigen Viereck<sup>1)</sup> auf das Viereck  $G_1, G_3, U, V$ :

Die Punkte  $U, V, g_2$  liegen auf einer Geraden.

Nochmalige Anwendung des Involutionssatzes auf das Viereck  $U, P, V, e_2$  (unendliches Vierecksgebiet) liefert die Aussage:

Die Strahlen  $e_1 G_1, e_2 G_2, e_3 G_3$  gehen durch einen Punkt  $P$ . Durch Wiederholung der selben Schlußweise gelangt man zu einem Beweis des Satzes.

Liegt  $g$  im Unendlichen, so ergibt sich der Satz 2.

(Bemerkung: Zu analogen Theoremen gelangt man, wenn man auf den Seiten des Fünfergebildes andere Involutionen setzt.) H. MEIER-WUNDERLI, Rorbas.

## Aufgaben

**Aufgabe 13.** Aus dem Gebiet des Werkzeugmaschinenbaues wird uns die folgende Aufgabe zur möglichst praktischen Lösung auf  $1/100$  mm genau vorgelegt: In eine verlängerte Zyklode soll parallel der Abwälzgeraden ein Streifen konstanter Breite so hineingelegt werden, daß zwei gegenüberliegende Schnittpunkte der gleichen Schleife in einer Senkrechten zum Streifen (das heißt zur Abwälzgeraden) liegen. E. METTLER.

**Lösung:** Es sei  $r$  der Radius des auf der Geraden  $g$  ohne Gleiten rollenden Kreises  $k$ ,  $a$  sei der Abstand des die verschlungene Zyklode beschreibenden Punktes vom Mittelpunkt von  $k$ .

$$x = r\varphi - a \sin \varphi, \quad y = r - a \cos \varphi$$

ist die Parameterdarstellung der Zyklode.  $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$  seien zwei Punkte einer Schleife derart, daß  $P_1 P_2$  senkrecht zu  $g$  und gleich der Breite  $b$  des Streifens wird. Somit gilt  $x_1 = x_2$  und  $y_1 - y_2 = b$ . Für die  $P_1, P_2$  entsprechenden Wälzungswinkel  $\varphi = u$  und  $\varphi = v$  ergibt sich daraus das Gleichungssystem

$$\cos v - \cos u = A, \quad \sin v - \sin u = B(v - u) \text{ mit } A = \frac{b}{a}, \quad B = \frac{r}{a}.$$

Hat man  $u, v$ , so kann man  $y_1$  und  $y_2$  berechnen, womit die Aufgabe gelöst ist. (Probe:  $y_1 - y_2 = b$ .) Zur Lösung des Systems quadriert man die Gleichungen und addiert; man erhält mit  $z = v - u$ :

$$\cos z = 1 - \frac{1}{2} A^2 - \frac{1}{2} B^2 z^2.$$

Diese transzendente Gleichung ist mit wenig Mühe mit der verlangten Genauigkeit zu lösen. (Die Diskussion ist interessant.) Aus  $z = v - u$  ergibt sich  $v + u$  mit Hilfe von  $\operatorname{ctg} \frac{v+u}{2} = -\frac{B}{A} z$ . Damit hat man  $u$  und  $v$ . L. LOCHER, Winterthur.

**Aufgabe 18.** Le rectangle  $ABCD$  est la base d'une pyramide dont le sommet  $S$  est sur la perpendiculaire au plan du rectangle menée par son centre. Trouver le volume du solide commun au parallélépipède dont  $ABCD$  est la section droite et au

<sup>1)</sup> Vgl. LOCHER, Projektive Geometrie, Satz 49, Seite 174.