Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **2 (1947)**

Heft 5

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Wie in Fig. 2a veranschaulicht, kann man diese beiden Komponenten zur ***resultierenden Coriolisbeschleunigung*** zusammensetzen:

$$c = \sqrt{c_r^2 + c_t^2} = 2\,\omega\, v' = 2\,\omega\, v_{rel} \sin\delta .$$

Damit ist die allgemeine Gültigkeit der obigen Formel für die Coriolisbeschleunigung im Raume bewiesen. Aus Fig. 2a ist zugleich ersichtlich, daß der Vektor der Coriolisbeschleunigung senkrecht zur Projektion des Vektors der Relativgeschwindigkeit auf eine zur Momentanachse senkrecht gelegten Ebene steht. W. MICHAEL, BERN.

Kleine Mitteilungen

I. *Lehrerfehler*

Daß damit nicht Charakterfehler gemeint sein können, folgt aus der Einordnung dieser Zeilen unter den «Kleinen» Mitteilungen. Vielmehr handelt es sich um die inverse Funktion jener Schülerfehler, wie sie LIETZMANN und TRIER seinerzeit in einem bekannten Bändchen der Mathematisch-physikalischen Bibliothek zusammengestellt haben.

Wir heutigen Lehrer pflegen über den ehrwürdigen EDUARD HEIS mitleidig zu lächeln (also doch Charakterfehler ?), der in seiner trotz allem immer noch wertvollen Aufgabensammlung beispielsweise berechnen läßt, daß die Entfernung zwischen Aachen und Köln 8,514739 Meilen betrage oder eine schwimmende Hohlkugel mit dem spezifischen Gewicht 7,5 g/cm^3 und der Wanddicke 1 cm einen Halbmesser von 21,4682 cm haben müsse.

Wie steht es in dieser Beziehung mit unseren «modernen» Aufgaben? Wir geben etwa einer Klasse die beiden parallelen Seiten eines Trapezes $a = 25{,}4$ m und $c = 37{,}5$ m sowie die Fläche $F = 449{,}5$ m^2 und erwarten dann als Ergebnis der Höhenberechnung $h = 14{,}293$ m. Oder wir muten einem Schüler zu, uns 5,5646 m als berechnete Kantenlänge eines Würfels anzugeben, welcher aus den 1344000 kg Eisen vom spezifischen Gewicht 7,8 kg/dm^3 gegossen werden könnte, die zum Bau der Kirchenfeldbrücke in Bern benötigt wurden. Oder wir veranlassen einen Kandidaten, für π den Näherungswert 22/7 zu verwenden, und brechen dann den Stab über ihn, wenn er als Gewicht eines durch weitere vernünftige Angaben bestimmten Drahtes nicht, wie wir, 24,492 kg, sondern aus Trägheit oder auf Grund unverbildeten Empfindens «nur» 24,5 kg erhält. Schließlich lassen wir zur Krönung unseres Trigonometrieunterrichtes ganze Generationen über die Eleganz des Halbwinkelsatzes und die Präzision der von Mathematikern erfundenen Logarithmen staunen, wenn bei der Berechnung der drei Winkel eines Dreiecks aus den Seiten $a = 4{,}356$ m, $b = 5{,}673$ m und $c = 7{,}239$ m für $\alpha = 36^0 58' 52''$, $\beta = 51^0 34' 30''$, $\gamma = 91^0 26' 38''$ herauskommt, was auf die Sekunde genau eine Winkelsumme von $180^0 0' 0''$ ergibt.

Aus Bescheidenheit habe ich diese Beispiele nicht der eigenen Werkstatt entnommen, sondern häufig verwendeten Aufgabensammlungen prominenterer Kollegen. Sie sollen bestätigen, daß von Zeit zu Zeit auch HOMER zu schlafen pflegt, und uns veranlassen, folgende Zusammenhänge gelegentlich aus dem Dunkel scheinbarer Bedeutungslosigkeit ans Lampenlicht unserer Studierstube und von dort ins helle Licht der Schulstube zu ziehen:

1. Es gibt genaue und ungenaue Zahlen.
2. Jedes Messungsergebnis ist eine ungenaue Zahl.
3. Von den drei Angaben:
   Mittlere Entfernung Erde–Sonne = 149504200 km
   Länge des Simplon-Tunnels = 19,73 km
   Kernabstand beim Cl-Molekül = 0,000198 μ

ist die erste die genaueste, weil ihr relativer Fehler $3{,}3 \cdot 10^{-4}\,{}^0/_{00}$ beträgt, die letzte, mit einem relativen Fehler von $2{,}5^0/_{00}$, die ungenaueste.

4. Hat man für die Genauigkeit der vier Messungen:

4,3 Lichtjahre
0,43 ÅE
43 kg
0,00043 sek

keine weiteren Anhaltspunkte, so ist man berechtigt, anzunehmen, daß sie gleich genau sind.

5. Weil es also für die Genauigkeit einer Zahl weder auf die Einheiten, noch den Ort des Kommas, sondern lediglich auf die Anzahl der verläßlichen Ziffern ankommt, ist es vorteilhaft, sich einen praktischen Maßstab für Genauigkeiten von Maßzahlen zuzulegen, also beispielsweise zu verabreden, der Angabe 9,81 m/sek² einen Genauigkeitswert von 981, der Angabe 0,000198 μ einen solchen von 198 zuzuordnen usw. Je kleiner der relative Fehler einer Maßzahl ist, desto größer wird dann ihr Genauigkeitswert, und umgekehrt.

6. Wie viele Ziffern im Resultat einer Rechnung mit ungenauen (und genauen) Zahlen verantwortet werden können, ist nur auf Grund einer sorgfältigen Fehlerabschätzung entscheidbar.

7. In der Praxis genügen jedoch meistens folgende Faustregeln:

a) Eine Kette ist nie stärker als ihr schwächstes Glied, d. h.: das Ergebnis einer Rechnung ist im allgemeinen nicht genauer als die gegebenen Ausgangsgrößen.

b) Die Genauigkeit (der relative Fehler) einer 3ziffrigen ungenauen Zahl (einer sogenannten Rechenschieberzahl) schwankt um $1^0/_{00}$ herum. Von dieser Marke aus merkt man sich leicht, daß die Genauigkeit einer

4ziffrigen Zahl um $0{,}1^0/_{00}$,
5ziffrigen Zahl um $0{,}01^0/_{00}$,
2ziffrigen Zahl um $1^0/_0$

herum liegt.

c) Wenn im Zuge einer Tabellenrechnung nicht interpoliert werden mußte, so darf man im allgemeinen beim Aufschlagen des Resultates die letzte, durch Interpolieren bestimmbare Ziffer höchstens zum Runden der vorletzten Ziffer benützen.

W. HONEGGER, Zürich.

II. *A propos de la construction de* RENALDINI, *relative aux polygones réguliers inscrits dans un cercle*

Divisons un quart de cercle de rayon unité en un nombre entier de parties; choisissons un centre de projection sur l'un des rayons de ce quadrant, distant de $\sqrt{3}$ du centre, du côté de la concavité de l'arc et projetons sur le second rayon. La règle de RENALDINI revient à admettre l'équidistance des projections des points de division de l'arc.

La construction est proposée pour les polygones réguliers; sa théorie a généralement été faite en partant de la division uniforme du rayon; elle est plus simple en opérant en sens inverse, comme ci-dessus.

Appelons α l'arc compté à partir du rayon portant le centre, et x sa projection; on a, en posant $a = \sqrt{3}$,

$$x = \frac{a \sin\alpha}{a + \cos\alpha}.$$

Si la règle était exacte, on aurait $x = \frac{2\alpha}{\pi}$. L'erreur est $z = \frac{2\alpha}{\pi} - x$. Elle est évidemment nulle pour $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi/2$; le calcul montre qu'elle l'est encore pour $\alpha = \pi/6$. Le tableau en donne quelques valeurs

	x	z
10°	0,110704	+ 0,000407
20°	0,221726	+ 0,000494
30°	0,333333	0
40°	0,445676	− 0,001232
50°	0,558702	− 0,003146
60°	0,672028	− 0,005361
70°	0,784736	− 0,006958
80°	0,895072	− 0,006183

L'erreur possède deux extrema vers 20° et 70°. Le second est plus de dix fois plus considérable que le premier.

Supposons que l'on utilise la règle pour construire un polygone régulier. Les divers arcs ainsi construits ne sont pas rigoureusement égaux. Le meilleur est celui qui encadre l'extremum de la courbe d'erreur ayant la moindre courbure, donc celui voisin de 20°.

Pour déterminer la position des extrema, annulons la dérivée de z; il vient

$$2\cos^2\alpha + (4a - \pi a^2)\cos\alpha + 2a^2 - \pi a = 0$$

et, avec $a = \sqrt{3}$, les deux valeurs de α sont 17°1′25,5″ et 73°1′36″. Elles sont presque complémentaires. De ce qui précède, il résulte que le meilleur côté de polygone déterminé par la construction de Renaldini est celui qui contient à son intérieur l'arc de 17°, ou plus rigoureusement l'arc de 13619/72000 d'angle droit. Le fait que ces fractions ne sont pas simples implique que ce n'est que pour des polygones ayant un nombre énorme de côtés que la règle peut présenter de l'ambiguité. Remarquons enfin que l'angle critique est très voisin de 3/16 d'angle droit, soit 16°52,5′, angle facile à construite avec le compas.

Inversement, on pourrait se proposer de donner une valeur simple à l'angle critique et déterminer a en conséquence. L'équation relative à la dérivée donne la solution de ce problème. Il ne semble pas qu'il existe de valeurs plus simples que celles ci-dessus, facilement constructibles avec le compas et satisfaisant aux conditions proposées avec plus d'exactitude.

Paul Rossier, Genève.

Aufgaben

Aufgabe 6. In un piano si considerano due cerchi fissi K_1, K_2 ed un cerchio variabile K secante K_1 nei punti P_1, Q_1 et K_2 nei punti P_2, Q_2. Determinare il luogo del centro di K nell'ipotesi che le corde P_1Q_1 e P_2Q_2 abbiano lunghezze costanti assegnate. A. Longhi.

Soluzione: Siano $2s_1$ e $2s_2$ le lunghezze costanti di P_1Q_1 e P_2Q_2; e siano O_1 e O_2 i centri di K_1 e K_2. Il centro O di K è l'intersezione delle rette perpendicolari per O_1 a P_1Q_1 e per O_2 a P_2Q_2. Si tratta di trovare il luogo $\mathfrak{L}$ di O, al variare di K passante per P_1, Q_1, P_2, Q_2. Si può allora ricorrere al principio di corrispondenza di Chasles, considerando una retta g e cercando quanti sono i punti O che appartengono a g.

Se M è un punto variabile di g esistono *due* corde $P_1Q_1 = 2s_1$ di K_1 perpendicolari alla retta O_1M; ciascuna di esse incontra l'asse radicale t di K_1 e K_2 in un punto: dal quale escono *due* rette intercettanti ognuna su K_2 una corda $P_2Q_2 = 2s_2$. Infine la perpendicolare per O_2 ad una qualunque delle *quattro* corde P_2Q_2 suddette interseca g in un punto M' che assumo come omologo di M.

La corrispondenza fra M et M' ha, per quanto precede, il secondo indice eguale a 4; analogamente si vede che è pure 4 il primo indice. È pertanto 8 il numero dei suoi punti uniti: e quindi è pure 8 il numero dei punti O di $\mathfrak{L}$ situati su g. In altri termini il luogo $\mathfrak{L}$ è una curva di ordine 8.

Si deve però notare che quando M è l'intersezione M_0 di g con la retta O_1O_2 tutti e quattro i corrispondenti punti M' coincidono con M_0: e più precisamente (come si potrebbe dimostrare applicando la regola di Zeuthen) M_0 è quadruplo nel gruppo degli 8 punti uniti della corrispondenza (4,4) sopra considerata. Ne consegue che della curva $\mathfrak{L}$