Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **2 (1947)**

Heft 5

PDF erstellt am: **30.06.2024**

	x	z
10^0	0,110704	+ 0,000407
20^0	0,221726	+ 0,000494
30^0	0,333333	0
40^0	0,445676	− 0,001232
50^0	0,558702	− 0,003146
60^0	0,672028	− 0,005361
70^0	0,784736	− 0,006958
80^0	0,895072	− 0,006183

L'erreur possède deux extrema vers 20^0 et 70^0. Le second est plus de dix fois plus considérable que le premier.

Supposons que l'on utilise la règle pour construire un polygone régulier. Les divers arcs ainsi construits ne sont pas rigoureusement égaux. Le meilleur est celui qui encadre l'extremum de la courbe d'erreur ayant la moindre courbure, donc celui voisin de 20^0.

Pour déterminer la position des extrema, annulons la dérivée de z; il vient

$$2\cos^2\alpha + (4a - \pi a^2)\cos\alpha + 2a^2 - \pi a = 0$$

et, avec $a = \sqrt{3}$, les deux valeurs de α sont $17^0 1' 25{,}5''$ et $73^0 1' 36''$. Elles sont presque complémentaires. De ce qui précède, il résulte que le meilleur côté de polygone déterminé par la construction de RENALDINI est celui qui contient à son intérieur l'arc de 17^0, ou plus rigoureusement l'arc de 13619/72000 d'angle droit. Le fait que ces fractions ne sont pas simples implique que ce n'est que pour des polygones ayant un nombre énorme de côtés que la règle peut présenter de l'ambiguité. Remarquons enfin que l'angle critique est très voisin de 3/16 d'angle droit, soit $16^0 52{,}5'$, angle facile à construite avec le compas.

Inversement, on pourrait se proposer de donner une valeur simple à l'angle critique et déterminer a en conséquence. L'équation relative à la dérivée donne la solution de ce problème. Il ne semble pas qu'il existe de valeurs plus simples que celles ci-dessus, facilement constructibles avec le compas et satisfaisant aux conditions proposées avec plus d'exactitude. PAUL ROSSIER, Genève.

Aufgaben

Aufgabe 6. In un piano si considerano due cerchi fissi K_1, K_2 ed un cerchio variabile K secante K_1 nei punti P_1, Q_1 et K_2 nei punti P_2, Q_2. Determinare il luogo del centro di K nell'ipotesi che le corde P_1Q_1 e P_2Q_2 abbiano lunghezze costanti assegnate. A. LONGHI.

Soluzione: Siano $2s_1$ e $2s_2$ le lunghezze costanti di P_1Q_1 e P_2Q_2; e siano O_1 e O_2 i centri di K_1 e K_2. Il centro O di K è l'intersezione delle rette perpendicolari per O_1 a P_1Q_1 e per O_2 a P_2Q_2. Si tratta di trovare il luogo $\mathfrak{L}$ di O, al variare di K passante per P_1, Q_1, P_2, Q_2. Si può allora ricorrere al principio di corrispondenza di CHASLES, considerando una retta g e cercando quanti sono i punti O che appartengono a g.

Se M è un punto variabile di g esistono *due* corde $P_1Q_1 = 2s_1$ di K_1 perpendicolari alla retta O_1M; ciascuna di esse incontra l'asse radicale t di K_1 e K_2 in un punto: dal quale escono *due* rette intercettanti ognuna su K_2 una corda $P_2Q_2 = 2s_2$. Infine la perpendicolare per O_2 ad una qualunque delle *quattro* corde P_2Q_2 suddette interseca g in un punto M' che assumo come omologo di M.

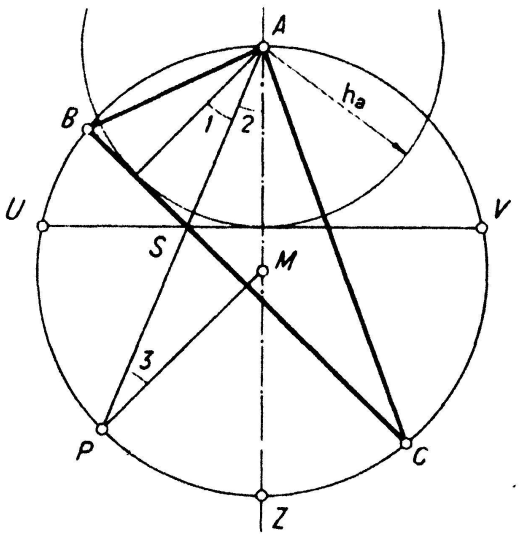
La corrispondenza fra M et M' ha, per quanto precede, il secondo indice eguale a 4; analogamente si vede che è pure 4 il primo indice. È pertanto 8 il numero dei suoi punti uniti: e quindi è pure 8 il numero dei punti O di $\mathfrak{L}$ situati su g. In altri termini il luogo $\mathfrak{L}$ è una curva di ordine 8.

Si deve però notare che quando M è l'intersezione M_0 di g con la retta O_1O_2 tutti e quattro i corrispondenti punti M' coincidono con M_0: e più precisamente (come si potrebbe dimostrare applicando la regola di Zeuthen) M_0 è quadruplo nel gruppo degli 8 punti uniti della corrispondenza (4,4) sopra considerata. Ne consegue che della curva $\mathfrak{L}$

di ottavo ordine fa parte l'asse centrale O_1O_2 di K_1 et K_2 contato 4 volte; onde si conclude che *il luogo richiesto del centro di K è una quartica*.

Tale quartica è interessante sotto vari aspetti: e sarà oggetto di studio in un articolo a parte. NORA CATTANEO, Lugano.

Aufgabe 21. Man konstruiere ein Dreieck aus einer Höhe, dem Umkreisradius und dem Inkreisradius. VIKTOR KRAKOWSKI.



Lösung: Schlage um A den Kreis mit dem Radius h_a und ziehe an diesen die Tangente UV, die senkrecht zum Durchmesser AZ steht. Ziehe die Sehne AP durch den Schnittpunkt S von BC und UV. Nun ist

$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$, weil BC und UV Tangenten an denselben Kreis sind,

$\sphericalangle 3 = \sphericalangle 2$, weil das ΔPAM gleichschenklig ist; demnach

$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3$; d. h. MP steht senkrecht auf BC und AP ist folglich Winkelhalbierende von ΔABC. Daraus folgt, daß der Inkreis von ΔABC auch UV berührt.

Aus der Umkehrung des Satzes von EULER über den Zentralabstand von In- und Umkreis des Dreiecks folgt, daß es ein Dreieck mit der Grundlinie UV gibt, das mit dem ΔABC Um- und Inkreis gemeinsam hat. Das Zentrum seines Inkreises liegt auf dem Kreis um Z durch U und V.

Hieraus ergibt sich die folgende einfache Konstruktion:

Zeichne den Umkreis und wähle darauf A. Bestimme die Punkte U und V. Das Zentrum des Inkreises liegt im Schnitt des Kreises um Z durch U und V mit der Parallelen zu UV im Abstand ϱ nach der Seite, auf der A liegt. Schluß der Konstruktion und Diskussion sind selbstverständlich. WILLI LÜSSY, Winterthur.

Rechnerische Lösungen, die einen leicht konstruierbaren Ausdruck für eine Seite oder eine andere geeignete Größe im Dreieck liefern, teilten L. KIEFFER (Luxembourg) und A. AESCHLIMANN (Burgdorf) mit.

Literaturüberschau

J. G. VAN DER CORPUT:

On sets of integers, I. Indagationes Mathematicae *9*, 159–168 (1947).

In unserem Bericht über den Begriff der Dichte einer Folge natürlicher Zahlen[1]) wurde darauf hingewiesen, daß für die Dichte γ der Summenfolge $A + B$ der Folgen A, B mit den Dichten α, β vermutlich gilt $\gamma \geqq \alpha + \beta$. Inzwischen ist bekannt geworden, daß ein erster Beweis dieser berühmten Hypothese schon 1942 in Amerika von H. B. MANN[2]) gefunden wurde. Verbesserte Beweisanordnungen gaben E. ARTIN und P. SCHERK sowie F. J. DYSON. Aber erst die Darstellung VAN DER CORPUTS gestattet einen Überblick über den Beweis.

Zu $A\{a_i\}$ und $B\{b_i\}$ werde $a_0 = 0$ resp. $b_0 = 0$ hinzugefügt, so daß $A + B$ aus allen $a_i + b_k$ besteht. $A(m)$, $B(m)$, $(A + B)(m)$ bedeute hingegen nur die Anzahl der positiven $x \leqq m$ in A, B, $A + B$. Die Hypothese folgt dann sofort aus dem schärferen *Satz:*

Gibt es ein natürliches g (Länge der Folge), so daß für jedes natürliche $m \leqq g$ $A(m) + B(m) \geqq \gamma m$ ($\gamma \leqq 1$), so gilt auch

$$(A + B)(m) \geqq \gamma m.$$

1) El. math. *1* (1946), S. 57–60.

2) Vgl. die Literaturangaben in der referierten Arbeit.