

# Berichte

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **2 (1947)**

Heft 6

PDF erstellt am: **12.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Rechtecksdiagonale aus  $A$ . Ihr Schnittpunkt mit der Parabelnormalen in  $A$  ist das Krümmungszentrum für  $A$ .

Ferner zeige man: Die drei Parabeln, von denen jede zwei Seiten eines Dreiecks in der Mitte berührt, oskulieren sich paarweise, und die Krümmungsradien in den Oskulationspunkten verhalten sich wie die Kuben der Dreiecksseiten. A. STOLL.

*Aufgabe 29.* Einem Dreieck können Ovale umschrieben werden, indem man über den Seiten als Sehnen Parabelbogen zeichnet, die sich in den Ecken berühren. Man zeige, daß genau eines dieser Ovale stetig gekrümmt ist. Für welche möglichst umfassende Teilmenge der Ovale ist das Oval mit stetiger Krümmung durch minimalen Flächeninhalt ausgezeichnet? E. TROST.

*Aufgabe 30.* Einem Dreieck vom Flächeninhalt  $F$  sollen drei Parabelbogen so eingeschrieben werden, daß jeder zwei Dreiecksseiten in Eckpunkten berührt. Man berechne den Inhalt der sieben Flächenstücke, in die das Dreieck aufgeteilt wird. E. TROST.

## Berichte

Vortrag von Prof. Dr. H. HOPF im Mathematischen Kolloquium Winterthur (16.6.47) über  
*Einige geometrische Eigenschaften stetiger Funktionen.*

Den Ausgangspunkt zu den Ausführungen von Herrn Prof. Dr. HOPF bildete eine Verallgemeinerung des Theorems von ROLLE, die von P. LÉVY stammt und so lautet:

*Satz 1.* Jede Kurve, die für  $0 \leq x \leq 1$  durch eine stetige Funktion  $y = f(x)$  mit  $f(0) = f(1)$  dargestellt wird, besitzt für jede natürliche Zahl  $n$  wenigstens eine horizontale Sehne der Länge  $1/n$ .

Der Beweis ist ganz elementar. — Der Satz gewinnt dadurch an Interesse, daß andererseits folgendes gilt:

*Satz 1'.* Zu jeder reellen Zahl  $s$ ,  $0 < s < 1$ , welche nicht von der Form  $s = 1/n$  mit natürlichem  $n$  ist, gibt es eine Kurve von der im Satz 1 genannten Art, welche keine horizontale Sehne der Länge  $s$  besitzt.

Der Beweis erfolgte durch explizite Konstruktion eines Beispiels.

Der Satz 1 kann als Korollar eines allgemeineren Satzes aufgefaßt werden: Für eine stetige Funktion  $f(x)$ , die die Voraussetzung des Satzes 1 erfüllt, verstehen wir unter  $S_f$  die Menge der reellen Zahlen, welche als Längen der horizontalen Sehnen der durch  $y = f(x)$  gegebenen Kurve auftreten, und unter  $\bar{S}_f$  die Menge aller anderen nichtnegativen reellen Zahlen. Dann gilt:

*Satz 2.* Die Menge  $\bar{S}_f$  ist «additiv-abgeschlossen», das heißt aus  $a \in \bar{S}_f$ ,  $b \in \bar{S}_f$  folgt  $a + b \in \bar{S}_f$ . ( $a \in M$  soll heißen, daß  $a$  in  $M$  enthalten ist.)

Daß Satz 1 aus Satz 2 folgt, ist sehr leicht zu sehen. — Satz 2 läßt sich auch so formulieren: Ist  $c = a + b$ ,  $c \in S_f$ , so ist  $a \in S_f$  oder  $b \in S_f$ ; für den Beweis darf man  $c = 1$  annehmen, also:

*Satz 2'.*  $f$  erfülle die Voraussetzungen von Satz 1; dann gibt es für jedes  $a$  zwischen 0 und 1 entweder eine horizontale Sehne der Länge  $a$  oder eine horizontale Sehne der Länge  $1 - a$ .

Dieser Satz wiederum ist eine leichte Folgerung aus dem nachstehenden Satz A, der fast trivial ist:

*Satz A.* Auf einer Kreislinie  $K$  sei eine stetige Funktion  $f$  gegeben; dann existiert zu jeder positiven Zahl  $a$ , die kleiner ist als die Länge von  $K$ , ein solcher Teilbogen  $\widehat{pq}$  von  $K$ , daß  $f(p) = f(q)$  ist.

Es erhebt sich die Frage, ob sich der Satz A, der als die Quelle der Sätze 2', 2 und 1 gelten kann, auf mehr Dimensionen verallgemeinern läßt, also insbesondere, ob die Kugelfläche ähnliche Eigenschaften besitzt wie diejenige, die durch den Satz A von

der Kreislinie festgestellt wird. Es gibt zwei Möglichkeiten für solche Verallgemeinerungen.

Die erste Möglichkeit: Man gibt auf der Kugel zwei stetige Funktionen  $f_1, f_2$  und fragt nach der Existenz zweier Punkte  $p, q$ , die voneinander einen vorgegebenen sphärischen Abstand  $a$  haben und für welche  $f_i(p) = f_i(q)$  ist. Die Existenz solcher Punkte ist gesichert durch den folgenden allgemeineren Satz, den man nur auf die Kugel zu beziehen braucht:

**Satz B.**  $F$  sei eine geschlossene Fläche, die eine reguläre Differentialgeometrie besitzt; auf ihr seien  $f_1, f_2$  stetige Funktionen. Dann existiert für jedes positive  $a$  ein solcher geodätischer Bogen  $\widehat{pq}$  auf  $F$ , daß  $f_1(p) = f_1(q)$  und  $f_2(p) = f_2(q)$  ist.

Der Beweis wurde vollständig durchgeführt.

Ist in dem Satz *B* speziell  $F$  eine Kugel und  $a$  die Länge eines halben Großkreises (so daß also  $p$  und  $q$  antipodische Punkte werden), so erhält man den bekannten Satz von BORSUK-ULAM. Als Anwendung dieses Satzes wurde gezeigt: Drei Körper im Raum können durch eine Ebene gleichzeitig halbiert werden. Dies ist die Lösung einer der sogenannten «Sandwich-Aufgaben», deren einfachste so lautet: Man soll ein Schinkenbrot durch einen geradlinigen Schnitt so zerteilen, daß sowohl das Brot als auch der Schinken halbiert werden.

Die folgende Fragestellung führt zu einer zweiten Möglichkeit, den Satz A auf die Kugeloberfläche zu übertragen: Man gibt auf der Kugel nur eine Funktion  $f$ , aber man sucht drei Punkte  $p, q, r$ , die gegebene Abstände voneinander haben und in denen  $f(p) = f(q) = f(r)$  ist. Ob diese Aufgabe allgemein lösbar ist, ist nicht bekannt; jedoch gilt folgender Satz von DE MIRA FERNANDES (der gleichzeitig auch von KAKUTANI bewiesen worden ist):

**Satz C.** Wenn die drei gegebenen Abstände einander gleich sind, so ist die Aufgabe lösbar; mit anderen Worten: wenn man auf der Kugel ein sphärisches gleichseitiges Dreieck gibt, das man auf der Kugeloberfläche starr verschieben kann, so kann man ihm eine solche Lage  $pqr$  geben, daß  $f(p) = f(q) = f(r)$  wird.

Dieser Satz ist etwas schwerer zu beweisen als der Satz B. Es ist auch nicht bekannt, ob der Satz C sich auf Sphären höherer Dimension übertragen läßt, während eine solche Übertragung für den Satz B keine Schwierigkeiten macht.

J.-P. LAVANCHY, Winterthur.

#### Literatur

H. HOPF, *Comm. Math. Helv.* 9, 303–319; *Portugaliae Math.* 4, 129–139 (1944). – DE MIRA FERNANDES: *Portugaliae Math.* 4 (1944). – ALEXANDROFF-HOPF: *Topologie I*, 486 (Satz von BORSUK-ULAM).

## Mitteilung

Um den Lesern entgegenzukommen, die sich vor allem für elementare Aufgaben interessieren, werden vom nächsten Heft an einzelne *Gruppen von Prüfungsaufgaben* aus verschiedenen Gebieten mit den Lösungen veröffentlicht. Dies geschieht in der Hoffnung, den Kollegen damit Anregungen zu bieten.

Ferner sind mehrere *Beihefte* geplant, die kurze

#### *Biographien von Schweizer Mathematikern*

bringen. Umfang 24 Seiten, mit Illustrationen, Preis Fr. 3.50. Wir haben die Freude, zunächst die außerordentlich anregenden Biographien

*Jakob Steiner* von L. KOLLROS,

*Leonhard Euler* von R. FUETER

veröffentlichen zu können. In der Annahme, daß die meisten Leser der «Elemente» sich diese sehr preiswerten Hefte erwerben wollen, werden wir sie den inländischen Abonnenten zusenden.

L. LOCHER-ERNST.