# Über die Grundfunktionen positiver Zahlen

Autor(en): **Kreis, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **3 (1948)**

Heft 3

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-13575

Rechnungen zugrunde gelegt wurde und wie er sich aus direkteren Beobachtungen ergibt.

Der eigentliche Zweck der vorliegenden Rechnungen war aber weniger das Gewinnen numerischer Resultate als das genäherte Darstellen der Erdachsenbewegung und das Erläutern der Begriffe Präzession und Nutation in der Astronomie.

M. Schürer, Bern.

---

# Über die Grundfunktionen positiver Zahlen

Für das System $A$ der $n$ positiven Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ bilden wir die symmetrischen Grundfunktionen

$$
\begin{aligned}
S_1(A) &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n &&= \binom{n}{1} m_1(A)\\
S_2(A) &= a_1 a_2 + a_1 a_3 + \cdots &&= \binom{n}{2} m_2^2(A)\\
S_3(A) &= a_1 a_2 a_3 = a_1 a_2 a + \cdots &&= \binom{n}{3} m_3^3(A)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
S_n(A) &= a_1 a_2 a_3 \ldots a_n &&= \binom{n}{n} m_n^n(A),
\end{aligned}
$$

wo $m_1$ das arithmetische, $m_n$ das geometrische Mittel und $m_2^2, m_3^3, \ldots, m_{n-1}^{n-1}$ die Mittel aller Produkte von je zwei, drei, ..., $(n-1)$ Zahlen des Systems $A$ bedeuten.

Die bekannte Tatsache, daß die Folge der absoluten Grundwerte $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ *monoton abnehmend*, das heißt, daß

$$m_1(A) \geqq m_2(A) \geqq \cdots \geqq m_n(A) \tag{1}$$

ist, soll in der vorliegenden Arbeit auf elementare Art bewiesen werden.

Für $n = 2$ geht die zu beweisende Behauptung

$$m_1 \geqq m_2$$

oder

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geqq \sqrt[2]{a_1 a_2}$$

unmittelbar aus der selbstverständlichen Ungleichung

$$(a_1 - a_2)^2 \geqq 0$$

hervor.

Angenommen, die Beziehungen (1) gelten für jedes beliebige System $A$ von $n$ positiven Zahlen, so soll gezeigt werden, daß sie ebenfalls für jedes beliebige System $B$ von $n + 1$ positiven Zahlen gelten.

Es bedeute $B$ das System von $n + 1$ positiven beliebigen Zahlen

$$b_1 \geqq b_2 \geqq b_3 \geqq \cdots \geqq b_{n+1} > 0$$

und

$B_1$ das Teilsystem der $n$ Zahlen $b_2, b_3, \ldots, b_{n+1}$ ($B$ ohne $b_1$)

$B_2$ das Teilsystem der $n$ Zahlen $b_1, b_3, \ldots, b_{n+1}$ ($B$ ohne $b_2$)

.........................................................

$B_{n+1}$ das Teilsystem der $n$ Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ($B$ ohne $b_{n+1}$).

Zu beweisen ist nun, daß, falls die Ungleichungen (1) gelten, stets sein wird:

$$m_1(B) \geqq m_2(B) \geqq m_3(B) \geqq \cdots \geqq m_{n+1}(B). \tag{2}$$

Zu diesem Zwecke betrachten wir die Summe der $n+1$ Partialbrüche

$$y = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{x+b_1} + \frac{1}{x+b_1} + \cdots + \frac{1}{x+b_{n+1}}\right), \tag{3}$$

deren Bild die $n+1$ parallelen Asymptoten

$$x = -b_1; \quad x = -b_2; \quad \ldots; \quad x = -b_{n+1}$$

aufweist.

Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Unendlichkeitsstellen $-b_i$ und $-b_{i+1}$ fällt die Kurve (3) beständig von $+\infty$ bis $-\infty$, so daß in einem solchen Intervall notwendigerweise ein Schnittpunkt der Kurve mit der $x$-Achse, etwa an der Stelle $x = -a_i$, vorhanden sein muß. Die Funktion (3) besitzt infolgedessen $n$ negative Nullstellen $-a_1, -a_2, \ldots, -a_n$ im Endlichen.

Zieht man die Partialbrüche der Funktion (3) zusammen, so erscheint $y$ als Quotient zweier Polynome $F_n(x) : G_{n+1}(x)$. Der Zähler $F_n(x)$ ist vom $n$-ten Grade und hat dieselben Nullstellen $-a_1, -a_2, \ldots, -a_n$ wie $y$. Seine Koeffizienten lassen sich leicht auf zwei verschiedene Arten darstellen: einerseits durch die symmetrischen Grundfunktionen des Systems $A$ der $n$ Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$, anderseits durch die symmetrischen Grundfunktionen des Systems $B$ der $n+1$ Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}$.

Indem man die Koeffizienten der nämlichen Potenzen von $x$ einander gleichsetzt, ergeben sich allgemeine Beziehungen zwischen den erwähnten Grundfunktionen.

Beispielsweise hat man:

1. für die Koeffizienten von $x^{n-1}$:

$$S_1(A) = \frac{1}{n+1}\left(S_1(B_1) + S_1(B_2) + \cdots + S_1(B_{n+1})\right) = \frac{n}{n+1} S_1(B)$$

oder
$$\binom{n}{1} m_1(A) = \frac{n}{n+1}\binom{n+1}{1} m_1(B) = \binom{n}{1} m_1(B)$$

also
$$m_1(A) = m_1(B);$$

2. für die Koeffizienten von $x^{n-2}$:

$$S_2(A) = \frac{1}{n+1}\left(S_2(B_1) + S_2(B_2) + \cdots + S_2(B_{n+1})\right) = \frac{n-1}{n+1} S_2(B)$$

oder
$$\binom{n}{2} m_2^2(A) = \frac{n-1}{n+1}\binom{n+1}{2} m_2^2(B) = \binom{n}{2} m_2^2(B),$$

also
$$m_2(A) = m_2(B);$$

3. allgemein für die beiden Koeffizienten von $x^{n-k}$:

$$S_k(A) = \frac{1}{n+1}\left(S_k(B_1) + S_k(B_2) + \cdots + S_k(B_{n+1})\right) = \frac{n-k+1}{n+1} S_k(B)$$

oder
$$\binom{n}{k} m_k^k(A) = \frac{n-k+1}{n+1}\binom{n+1}{k} m_k^k(B) = \binom{n}{k} m_k^k(B),$$

also
$$m_k(A) = m_k(B). \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

Wenn demnach für jedes System $A$ von $n$ Zahlen die Ungleichungen

$$m_1(A) \geqq m_2(A) \geqq m_3(A) \geqq \cdots \geqq m_n(A) \tag{1}$$

gelten, so gelten folgende Ungleichungen für das System $B$ von $n+1$ Zahlen:

$$m_1(B) \geqq m_2(B) \geqq m_3(B) \geqq \cdots \geqq m_n(B). \tag{4}$$

Man kann schließlich noch beweisen, daß aus der Ungleichung

$$m_1^*(B) \geqq m_n(B) \tag{5}$$

notwendig die Ungleichung folgt

$$m_n(B) \geqq m_{n+1}(B). \tag{6}$$

Wendet man nämlich Ungleichung (5) auf das System der reziproken Werte $\frac{1}{b_1}; \frac{1}{b_2}; \ldots; \frac{1}{b_{n+1}}$ an, so wird

$$\frac{m_n^n(B)}{m_{n+1}^{n+1}(B)} \geqq \sqrt[n]{\frac{m_1(B)}{m_{n+1}^{n+1}(B)}},$$

was geschrieben werden kann

$$m_n^{n^2-1}(B) \geqq \frac{m_1(B)}{m_n(B)}\, m_{n+1}^{n^2-1}(B),$$

oder wegen (5)

$$m_n^{n^2-1}(B) \geqq m_{n+1}^{n^2-1}(B),$$

somit

$$m_n(B) \geqq m_{n+1}(B). \tag{6}$$

Aus (4) und (6) folgen also die behaupteten Relationen

$$m_1(B) \geqq m_2(B) \geqq m_3(B) \geqq \cdots \geqq m_{n+1}(B). \tag{2}$$

Die Ungleichungen (1) und (2) gelten aber für $n = 2$, somit gelten sie auch für $n = 3$, dann für $n = 4$ usw., das heißt, sie gelten *allgemein für jedes ganzzahlige $n$*.

H. KREIS, Winterthur.

---

# Eine geometrische Anwendung der grundlegenden algebraischen Mittelwerte

Seien gegeben $n$ positive Größen $a_1, a_2, \ldots, a_n$, und bezeichne $\underset{k}{C}\, a_i$ eine Kombination derselben zur Klasse $k$, so ergeben sich für jedes $k$ im ganzen $\binom{n}{k}$ verschiedene solcher Kombinationen, und durch Summation derselben erhalten wir die den $n$ Größen $a_i$ zugeordneten $n$ elementarsymmetrischen Funktionen $s_{n,k} = \Sigma \underset{k}{C}\, a_i$.

Mit $M_{n,k} = \sqrt[k]{\frac{s_{k,n}}{\binom{n}{k}}}$ definieren wir den grundlegenden algebraischen Mittelwert $k$-ter Ordnung der $n$ Größen $a_i$ (siehe «Elemente der Mathematik» III, Nr. 1). Es gilt, sofern nicht alle $a_i$ einander gleich sind,

$$M_{n,1} > M_{n,2} > M_{n,3} > \cdots > M_{n,n},$$