

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 3 (1948)
Heft: 3

Artikel: Eine geometrische Anwendung der grundlegenden algebraischen Mittelwerte
Autor: Jecklin, H.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-13576>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 23.12.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Wenn demnach für jedes System A von n Zahlen die Ungleichungen

$$m_1(A) \geq m_2(A) \geq m_3(A) \geq \dots \geq m_n(A) \tag{1}$$

gelten, so gelten folgende Ungleichungen für das System B von $n + 1$ Zahlen:

$$m_1(B) \geq m_2(B) \geq m_3(B) \geq \dots \geq m_n(B). \tag{4}$$

Man kann schließlich noch beweisen, daß aus der Ungleichung

$$m_1^*(B) \geq m_n(B) \tag{5}$$

notwendig die Ungleichung folgt

$$m_n(B) \geq m_{n+1}(B). \tag{6}$$

Wendet man nämlich Ungleichung (5) auf das System der reziproken Werte $\frac{1}{b_1}; \frac{1}{b_2}; \dots; \frac{1}{b_{n+1}}$ an, so wird

$$\frac{m_n^n(B)}{m_{n+1}^{n+1}(B)} \geq \sqrt[n]{\frac{m_1(B)}{m_{n+1}^{n+1}(B)}},$$

was geschrieben werden kann

$$m_n^{n^2-1}(B) \geq \frac{m_1(B)}{m_n(B)} m_{n+1}^{n^2-1}(B),$$

oder wegen (5)

$$m_n^{n^2-1}(B) \geq m_{n+1}^{n^2-1}(B),$$

somit

$$m_n(B) \geq m_{n+1}(B). \tag{6}$$

Aus (4) und (6) folgen also die behaupteten Relationen

$$m_1(B) \geq m_2(B) \geq m_3(B) \geq \dots \geq m_{n+1}(B). \tag{2}$$

Die Ungleichungen (1) und (2) gelten aber für $n = 2$, somit gelten sie auch für $n = 3$, dann für $n = 4$ usw., das heißt, sie gelten *allgemein für jedes ganzzahlige n* .

H. KREIS, Winterthur.

Eine geometrische Anwendung der grundlegenden algebraischen Mittelwerte

Seien gegeben n positive Größen a_1, a_2, \dots, a_n , und bezeichne $\sum_k C_k a_i$ eine Kombination derselben zur Klasse k , so ergeben sich für jedes k im ganzen $\binom{n}{k}$ verschiedene solcher Kombinationen, und durch Summation derselben erhalten wir die den n Größen a_i zugeordneten n elementarsymmetrischen Funktionen $s_{n,k} = \sum_k C_k a_i$.

Mit $M_{n,k} = \sqrt[k]{\frac{s_{k,n}}{\binom{n}{k}}}$ definieren wir den grundlegenden algebraischen Mittelwert k -ter Ordnung der n Größen a_i (siehe «Elemente der Mathematik» III, Nr. 1). Es gilt, sofern nicht alle a_i einander gleich sind,

$$M_{n,1} > M_{n,2} > M_{n,3} > \dots > M_{n,n},$$

wobei $M_{n,1}$ das arithmetische und $M_{n,n}$ das geometrische Mittel ist. Einen Beweis hierfür gibt u. a. die Arbeit von H. KREIS in diesem Heft.

Wir betrachten vorerst ein Rechteck mit den Seitenlängen a_1 und a_2 . Der Umfang ist dann:

$$2(a_1 + a_2) = 2s_{2,1} = 4M_{2,1}$$

und die Fläche:

$$a_1 a_2 = s_{2,2} = M_{2,2}^2.$$

Offenbar ist $M_{2,1}$ die Seite des Quadrats mit gleichem Umfang und $M_{2,2}$ die Seite des Quadrats mit gleicher Fläche wie das Rechteck. Wegen $M_{2,1} > M_{2,2}$ folgt:

$$\text{a) } M_{2,1}^2 > M_{2,2}^2 = a_1 a_2,$$

das heißt: von allen Rechtecken gleichen Umfangs hat das Quadrat den größten Flächeninhalt;

$$\text{b) } 4M_{2,2} < 4M_{2,1} = 2(a_1 + a_2),$$

das heißt: von allen Rechtecken gleicher Fläche hat das Quadrat den kleinsten Umfang.

Sei nun gegeben ein rechtwinkliger Quader mit den respektiven Seitenlängen a_1 , a_2 und a_3 , so ist

$$\text{die gesamte Kantenlänge: } 4(a_1 + a_2 + a_3) = 4s_{3,1} = 12M_{3,1},$$

$$\text{die gesamte Oberfläche: } 2(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3) = 2s_{3,2} = 6M_{3,2}^2,$$

$$\text{und das Volumen: } a_1 a_2 a_3 = s_{3,3} = M_{3,3}^3.$$

Offenbar ist

$M_{3,1}$ die Länge der Kante des Würfels mit gleicher Kantenlängensumme,

$M_{3,2}$ die Länge der Kante des Würfels mit gleicher Oberfläche und

$M_{3,3}$ die Länge der Kante des Würfels mit gleichem Volumen wie der Quader.

Wegen $M_{3,1} > M_{3,2} > M_{3,3}$ folgt

$$\text{a) } 6M_{3,1}^2 > 6M_{3,2}^2 = 2(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3),$$

$$M_{3,1}^3 > M_{3,3}^3 = a_1 a_2 a_3,$$

das heißt von allen Quadern mit gleichem Kantenlängentotal hat der Würfel die größte Oberfläche und das größte Volumen;

$$\text{b) } 12M_{3,2} < 12M_{3,1} = 4(a_1 + a_2 + a_3),$$

$$M_{3,2}^3 > M_{3,3}^3 = a_1 a_2 a_3,$$

das heißt von allen Quadern mit gleicher Oberfläche hat der Würfel die kleinste gesamte Kantenlänge, aber das größte Volumen;

$$\text{c) } 6M_{3,3}^2 < 6M_{3,2}^2 = 2(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3),$$

$$12M_{3,3} < 12M_{3,1} = 4(a_1 + a_2 + a_3),$$

das heißt von allen Quadern mit gleichem Volumen hat der Würfel die kleinste Oberfläche und das kleinste Kantenlängentotal.

Wir bezeichnen jetzt mit $B_{n,k}$ die Summe der k -dimensionalen Begrenzungselemente eines n -dimensionalen rechtwinkligen Quaders. Nachdem $M_{n,k}$ offenbar die Länge einer Kante des Würfels mit gleichem $B_{n,k}$ wie der Quader ist, folgt

$$B_{n,k} = Z_{n,k} M_{n,k}^k = Z_{n,k} \frac{s_{n,k}}{\binom{n}{k}},$$

wenn $Z_{n,k}$ die Zahl der k -dimensionalen Begrenzungselemente des n -dimensionalen Quaders bedeutet. Es ist aber

$$Z_{n,k} = Z_{n,k-1} \frac{n-k+1}{2k} = \binom{n}{k} 2^{n-k},$$

woraus auch folgt:

$$\frac{Z_{n,k}}{\binom{n}{k}} = \frac{Z_{n+t,k+t}}{\binom{n+t}{k+t}} = 2^{n-k}.$$

Sinngemäß bedeutet $Z_{n,0}$ die Zahl der Ecken des n -dimensionalen Quaders und ist gleich 2^n . Es ist somit also:

$$B_{n,k} = \binom{n}{k} 2^{n-k} M_{n,k}^k = \binom{n}{k} 2^{n-k} \frac{S_{n,k}}{\binom{n}{k}} = 2^{n-k} S_{n,k}.$$

Folgender kleiner Tabellenausschnitt gibt eine ziffernmäßige Veranschaulichung der eben genannten Formeln:

n	$\binom{n}{0}$	$Z_{n,0}$	$\frac{Z_{n,0}}{\binom{n}{0}}$	$\binom{n}{1}$	$Z_{n,1}$	$\frac{Z_{n,1}}{\binom{n}{1}}$	$\binom{n}{2}$	$Z_{n,2}$	$\frac{Z_{n,2}}{\binom{n}{2}}$	$\binom{n}{3}$	$Z_{n,3}$	$\frac{Z_{n,3}}{\binom{n}{3}}$
0	1	1	1									
1	1	2	2	1	1	1						
2	1	4	4	2	4	2	1	1	1			
3	1	8	8	3	12	4	3	6	2	1	1	1
4	1	16	16	4	32	8	6	24	4	4	8	2
5	1	32	32	5	80	16	10	80	8	10	40	4
6	1	64	64	6	192	32	15	240	16	20	160	8

Es besteht also eine sehr einfache Beziehung zwischen der Summe der k -dimensionalen Begrenzungselemente einerseits und den elementarsymmetrischen Funktionen bzw. den grundlegenden algebraischen Mittelwerten andererseits, und es lassen sich die vorgängig für Ebene und euklidischen Raum genannten Sätze ohne weiteres auf n Dimensionen übertragen. Wegen

$$M_{n,1} > M_{n,2} > \dots > M_{n,k-1} > M_{n,k} > \dots > M_{n,n}$$

ist $Z_{n,k+t} M_{n,k}^{k+t} > Z_{n,k+t} M_{n,k+t}^{k+t} = B_{n,k+t}$ $k+t \leq n$
 und $Z_{n,k-t} M_{n,k}^{k-t} < Z_{n,k-t} M_{n,k-t}^{k-t} = B_{n,k-t}$, $k-t \geq 1$

das heißt: von allen n -dimensionalen Quadern mit $B_{n,k} =$ konstant hat der Würfel die größten $B_{n,k+t}$ und die kleinsten $B_{n,k-t}$, oder, mit anderen Worten: von allen n -dimensionalen Quadern mit gleicher Summe der k -dimensionalen Begrenzungselemente hat der Würfel die größten Summen der mehr als k -dimensionalen Begrenzungselemente und die kleinsten Summen der weniger als k -dimensionalen Begrenzungselemente.

H. JECKLIN, Zürich.