Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 3 (1948)

Heft: 4

Artikel: Ähnliche Abbildungen ebener Figuren mit Nebenbedingungen

Autor: Schüepp, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-13578

ELEMENTE DER MATHEMATIK
Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare
Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer

El. Math. Band III Nr. 4 Seiten 73–88 Basel, 15. Juli 1948

Ähnliche Abbildungen ebener Figuren mit Nebenbedingungen

In den «*Elementen der Mathematik*», Bd. I, Seite 1, behandelt P. BUCHNER die Aufgabe, ein Quadrat zu zeichnen, dessen Seiten durch vier gegebene Punkte gehen. Die dabei benutzte Konstruktionsmethode läßt sich auch zur Lösung allgemeinerer Probleme benutzen. Es sollen im folgenden zu gegebenen Figuren ähnliche Figuren gesucht werden, derart, daß bestimmte Geraden dieser Figuren durch gegebene Punkte laufen oder auch bestimmte Punkte dieser Figuren auf gegebene Geraden zu liegen kommen.

Wir gehen von einer Verallgemeinerung der Quadrataufgabe aus:

I. In einer Ebene seien ein Vierseit $g_1 g_2 g_3 g_4$ (Fig. 1) und vier Punkte P_1^*, P_2^*, P_3^*, P_4^* gegeben. Es sollen die gleichsinnigen und die ungleichsinnigen ähnlichen Abbildungen der Ebene auf sich selbst bestimmt werden, für welche die entsprechenden

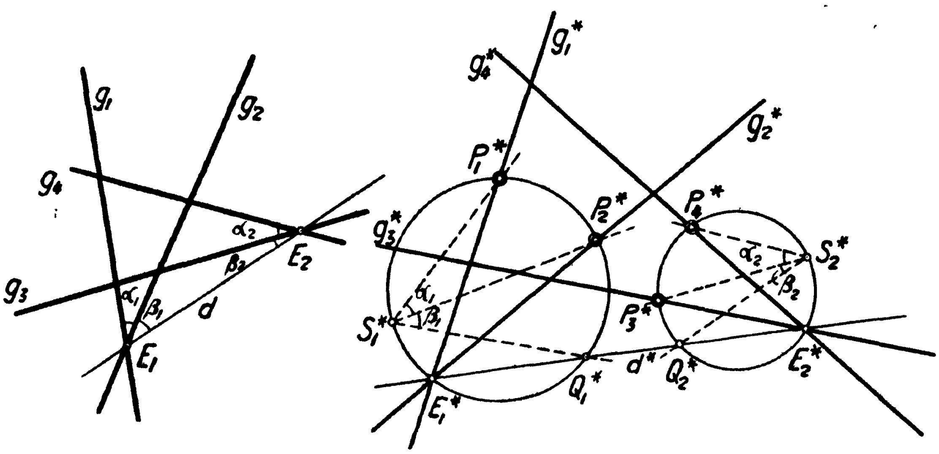

Fig. 1

Geraden $g_1^*, g_2^*, g_3^*, g_4^*$ zu den Geraden g_1, g_2, g_3, g_4 der Reihe nach durch die vier Punkte P_1^*, P_2^*, P_3^*, P_4^* laufen.

Die vier gegebenen Geraden seien eigentliche Geraden, von den vier gegebenen Punkten höchstens einer ein uneigentlicher, ein unendlich ferner Punkt. $E_1 E_2$ sei ein (stets vorhandenes) Gegeneckenpaar aus eigentlichen Punkten im Vierseit $g_1 \ldots g_4$, d die zugehörige Diagonale. Wir betrachten die zu $g_1 g_2 d$ gleichsinnig kongruenten Büschel, für welche die Geraden g_1^* und g_2^* durch P_1^* und P_2^* laufen. Der Ort ihrer Scheitel S_1^* ist nach dem Peripheriewinkelsatz ein Kreis durch P_1^* und P_2^*. Die entsprechenden Geraden zu d gehen dabei durch einen festen Punkt Q_1^* des Kreises. In gleicher Weise ergibt sich für die gleichsinnig kongruenten Büschel zu $g_3\, g_4\, d$ als Ort der Scheitel S_2^* ein Kreis durch $P_3^*\, P_4^*$ mit dem festen Punkt Q_2^* für d^*. Für ein zu $g_1 \ldots g_4$ gleichsinnig ähnliches Vierseit, dessen Seiten durch $P_1^* \ldots P_4^*$ laufen, muß also notwendig $Q_1^*\, Q_2^*$ Diagonale d^* sein. Damit sind die Ecken $E_1^*\, E_2^*$ und die Seiten $g_1^* \ldots g_4^*$ eindeutig festgelegt. Mehr als eine, und zwar unendlich viele Lösungen treten nur in dem speziellen Falle auf, wo Q_1^* und Q_2^* zusammenfallen. Soll das neue Vierseit zum gegebenen ungleichsinnig ähnlich sein. so treten an Stelle der beiden gezeichneten Kreise die in bezug auf $P_1^*\, P_2^*$ und $P_3^*\, P_4^*$ symmetrischen Kreise.

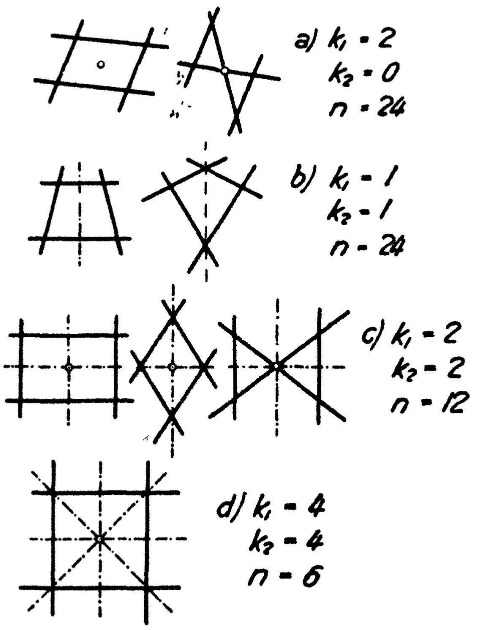

Fig. 2

Wird die Zuordnung der Geraden g zu den Punkten P^* nicht vorgeschrieben, so sind für gleichsinnige und ungleichsinnige Ähnlichkeit je $4! = 24$, im ganzen also 48 Lösungen möglich. Diese Zahl verringert sich durch Zusammenfallen von Lösungen, wenn das gegebene Vierseit kongruente Abbildungen auf sich selbst zuläßt. In der folgenden Zusammenstellung bedeutet k_1 die Zahl der gleichsinnigen derartigen Kongruenzen einschließlich der Identität (also $k_1 \geqq 1$), k_2 die Zahl der ungleichsinnigen Kongruenzen, $n = \dfrac{48}{k_1 + k_2}$ die Zahl der unter sich verschiedenen Lösungen. Die Figuren geben die zugehörigen Typen der Vierseite an (Fig. 2).

Spezialfälle dieser Art treten häufig auf, wenn als $g_1 \ldots g_4$ vier Seiten eines regulären n-Ecks gewählt werden. Als Anzahl aller regulären n-Ecke, von denen irgend vier Seiten durch vier gegebene Punkte laufen, findet man unter Benutzung der Angaben in Fig. 2:

n	4	5	6	7	8	...
Anzahl der Lösungen	6	24	48	144	198	...

Mit unserer Konstruktion nach Fig. 1 ist auch das zu I. duale Problem gelöst:

II. In einer Ebene seien ein Viereck $P_1\, P_2\, P_3\, P_4$ und vier Gerade $g_1^*, g_2^*, g_3^*, g_4^*$ gegeben. Es sollen die gleichsinnig und die ungleichsinnig ähnlichen Abbildungen der Ebene auf sich selbst bestimmt werden, für welche die entsprechenden Punkte $P_1^*, P_2^*, P_3^*, P_4^*$ zu den Punkten P_1, P_2, P_3, P_4 der Reihe nach auf den vier Geraden $g_1^*, g_2^*, g_3^*, g_4^*$ liegen.

Wir bestimmen zum Vierseit $g_1^*\, g_2^*\, g_3^*\, g_4^*$ das gleichsinnig oder ungleichsinnig ähnliche $g_1\, g_2\, g_3\, g_4$ derart, daß diese vier Geraden durch P_1, P_2, P_3, P_4 laufen. Durch die beiden Vierseite ist dann die gesuchte ähnliche Abbildung definiert.

Wir kehren zurück zu unserer Grundaufgabe I. Es ist bereits auf den singulären Fall hingewiesen worden, daß Q_1^* und Q_2^* (Fig. 1) zusammenfallen und daß unendlich viele ähnliche Abbildungen existieren, welche den gestellten Forderungen genügen.

Für ein gegebenes Vierseit sind, wenn dieser Fall eintreten soll, nur noch drei Punkte P^*, zum Beispiel P_1^*, P_2^*, P_3^* willkürlich wählbar; denn durch P_1^*, P_2^*, α_1, β_1 ist sowohl im Falle der gleichsinnigen als auch der ungleichsinnigen Ähnlichkeit Q_1^* festgelegt, damit auch $Q_2^* = Q_1^*$ und durch Q_2^*, P_3^*, α_2, β_2 auch P_4^*. Der Zusammenhang aller Lösungen ließe sich an Hand von Fig. 1 weiter verfolgen. Doch ist eine symmetrische Behandlung der Elemente g_1, g_2, g_3 und P_1^*, P_2^*, P_3^* vorzuziehen.

Durch drei Punkte P_1^*, P_2^*, P_3^* (Fig. 3) lassen sich, wie leicht ersichtlich, unendlich viele Gruppen g_1^*, g_2^*, g_3^* von Geraden legen, welche ein zu g_1, g_2, g_3 gleichsinnig oder ungleichsinnig ähnliches Dreiseit bilden. Da beide Fälle analoge Zusammenhänge liefern, beschränken wir uns auf die Betrachtung der gleichsinnigen Ähnlichkeit. Aus dem Peripheriewinkelsatz folgt sofort, daß die Ecken E_1^*, E_2^*, E_3^* aller dieser Dreiseite auf drei Kreisen liegen und daß sich diese Kreise in einem festen Punkte S^* schneiden[1]).

Da ferner die Geraden $S^*E_1^*$, $S^*E_2^*$, $S^*E_3^*$ mit g_1^* g_2^* g_3^* konstante Winkel bilden, ist S^* stets entsprechender Punkt zu einem festen Punkt S im gegebenen Dreiseit $g_1\, g_2\, g_3$. Unsere ähnlichen Abbildungen sind vollständig definiert durch zwei entsprechende Strecken, zum Beispiel SE_1 und $S^*E_1^*$. Für alle Lösungen bleibt S^* fest, während E_1^* einen Kreis durch S^* durchläuft. Eine Gerade durch E_1^* wird sich dabei nach dem Peripheriewinkelsatz um einen festen Punkt dieses Kreises drehen. Da irgendeine andere Strecke S^*P^* mit $S^*E_1^*$ einen konstanten Winkel bildet und ihr proportional ist, gilt das gleiche für alle Punkte und alle Geraden unserer Figur[2]).

Ein anschauliches Bild von der Gesamtheit dieser ähnlichen Systeme erhält man, wenn man die Veränderungen der Lage und Größe einer einfachen Figur, etwa eines Dreiecks, verfolgt (Fig. 4). In S^* schrumpft diese Figur auf einen Punkt zusammen.

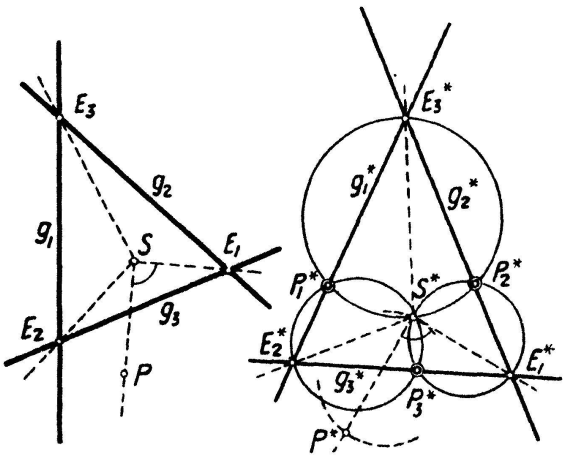

Fig. 3

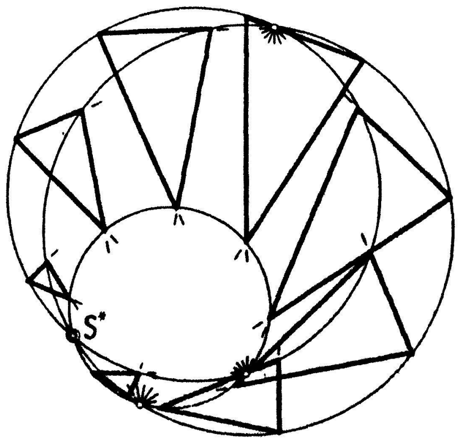

Fig. 4

Unsere Ergebnisse enthalten die Lösung eines weiteren Abbildungsproblems, nämlich:

III. In einer Ebene sei eine Figur, bestehend aus einem Dreiseit $g_1\, g_2\, g_3$ und einem Punkt P, ferner drei Punkte P_1^*, P_2^*, P_3^* und eine Gerade g^* gegeben. Es sollen die

---

[1]) Vgl. G. BALASTER, Lösung von Aufgabe 1, Elemente der Mathematik, Bd. I, Seite 111, Hilfssatz 1.

[2]) Vgl. die Bemerkung von P. FINSLER zur Lösung von Aufgabe 1, Elemente der Mathematik, Bd. I, Seite 112.

gleichsinnigen und die ungleichsinnigen ähnlichen Abbildungen der Ebene auf sich selbst bestimmt werden, für welche die entsprechenden Geraden g_1^*, g_2^*, g_3^* zu den Geraden g_1, g_2, g_3 der Reihe nach durch die gegebenen Punkte P_1^*, P_2^*, P_3^* laufen und für welche gleichzeitig der entsprechende Punkt P^* zu P auf der gegebenen Geraden g^* liegt.

Wir bestimmen das System der ähnlichen Abbildungen, für welche g_1^*, g_2^*, g_3^* durch P_1^*, P_2^*, P_3^* gehen. Es genügt dazu die Konstruktion des Punktepaares S, S^* (Fig. 3) und des Bahnkreises von E_1^*. In diesem System durchläuft der entsprechende Punkt P^* zu P einen Kreis durch S^*. Die Schnittpunkte dieses Kreises mit g^* definieren die ähnlichen Abbildungen, welche alle gestellten Forderungen erfüllen. Für die gleichsinnige und für die ungleichsinnige Ähnlichkeit sind also 2, 1 oder 0 Lösungen vorhanden.

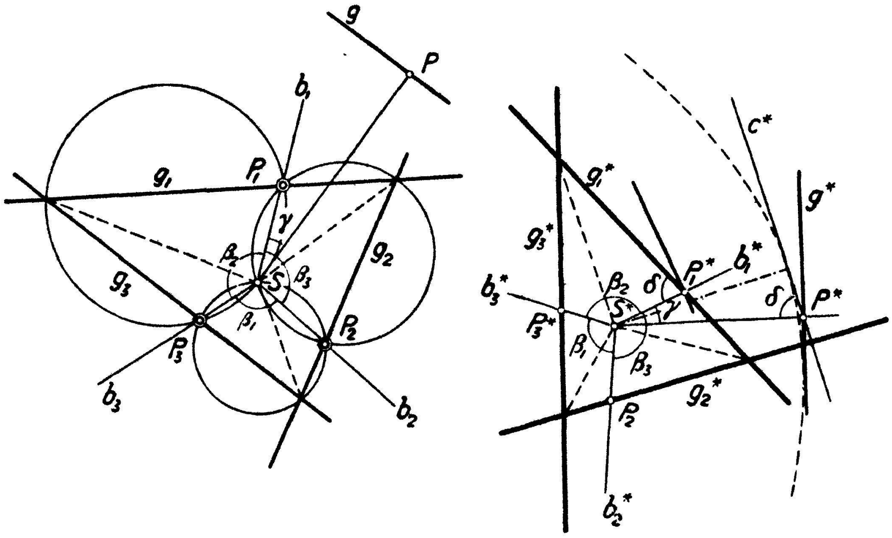

Fig. 5

Wir wenden uns der dualen Aufgabe zu. Gegeben seien das Dreieck $P_1P_2P_3$ (Fig. 5) und die drei Geraden g_1^*, g_2^*, g_3^*; gesucht die zu $P_1P_2P_3$ ähnlichen Dreiecke $P_1^*\,P_2^*\,P_3^*$, deren Ecken auf den gegebenen Geraden liegen. Um die Figuren übersichtlich zu halten, beschränken wir uns wieder auf die gleichsinnige Ähnlichkeit. Wir konstruieren analog wie beim Übergang von Aufgabe I. zu Aufgabe II. die zum Dreiseit $g_1^*\,g_2^*\,g_3^*$ ähnlichen Dreiseite $g_1\,g_2\,g_3$, deren Seiten durch P_1, P_2, P_3 laufen. Jedes solche Dreiseit definiert zusammen mit g_1^*, g_2^*, g_3^* eine ähnliche Abbildung derart, daß P_1^*, P_2^*, P_3^* auf den gegebenen Geraden g_1^*, g_2^*, g_3^* liegen. Wiederum sind S, S^* entsprechende feste Punkte. Wir erhalten also alle Lösungen, indem wir das Strahlbüschel $b_1^*\,b_2^*\,b_3^*$ um S^* drehen und diese Strahlen mit g_1^*, g_2^*, g_3^* schneiden. Jede unserer ähnlichen Abbildungen ist wieder definiert durch ein entsprechendes Streckenpaar, zum Beispiel SP_1 und $S^*P_1^*$. Für alle Lösungen bleibt S^* fest, während P_1^* eine Gerade g_1^* durchläuft. Eine normale Gerade zu $S^*P_1^*$ durch P_1^* umhüllt dabei eine Parabel mit dem Brennpunkt S^* und der Scheiteltangente g_1^*. Aus den schon beim dualen Problem angegebenen Gründen überträgt sich diese Eigenschaft auf alle Punkte P^* mit den zugehörigen zu S^*P^* normalen Geraden g^*. Fig. 5 zeigt die Lage der Bahngeraden c^* des Punktes P^*; c^* ist die Scheiteltangente der von g^* umhüllten Parabel. Man erhält wieder ein anschauliches Bild für die Gesamtheit der ähnlichen Systeme mit einer Serie entsprechender Dreiecke (Fig. 6).

Mit unseren Ergebnissen erhalten wir die Lösung der Aufgabe:

IV. In einer Ebene seien eine Figur, bestehend aus einem Dreieck $P_1P_2P_3$ und einer Geraden g, gegeben, ferner drei Geraden g_1^*, g_2^*, g_3^* und ein Punkt P^*. Es sollen die gleichsinnigen und die ungleichsinnigen ähnlichen Abbildungen der Ebene auf sich selbst bestimmt werden, für welche die entsprechenden Punkte P_1^*, P_2^*, P_3^* zu P_1, P_2, P_3 der Reihe nach auf den Geraden g_1^*, g_2^*, g_3^* liegen und für welche gleichzeitig die entsprechende Gerade g^* zu g durch den Punkt P^* läuft.

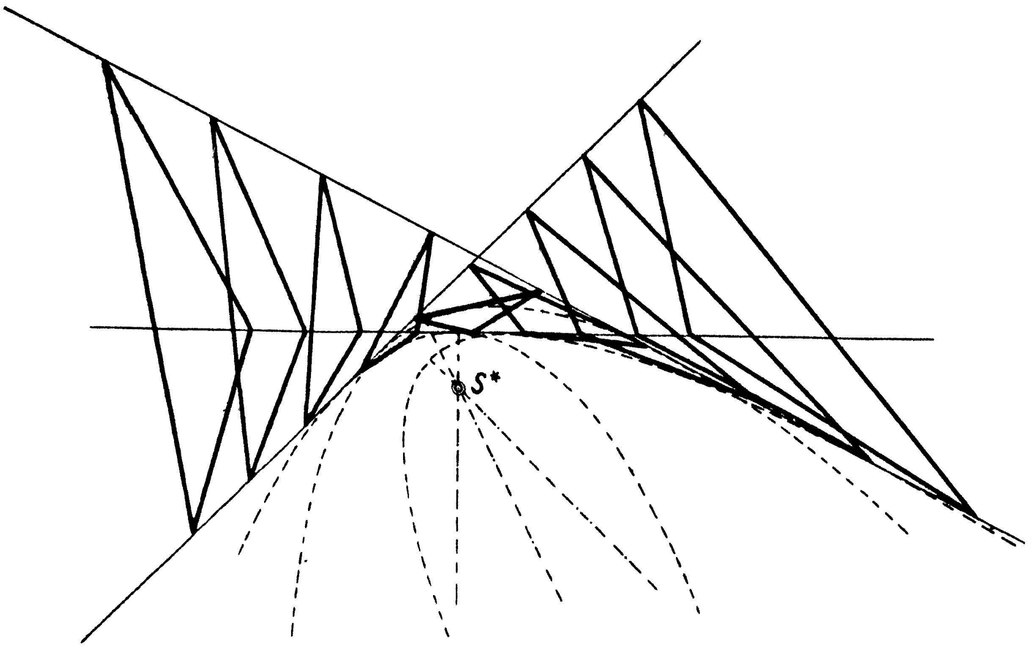

Fig. 6

Wir bestimmen analog wie bei III. das Punktepaar SS^* und die Parabel, welche von den entsprechenden Geraden zu g umhüllt wird. An diese Parabel legen wir vom gegebenen Punkte P^* aus die Tangenten g^*. Die Geraden g und g^* und das Punktepaar S, S^* definieren die gesuchten ähnlichen Abbildungen.

Es bleibt uns noch eine in sich selbst duale Aufgabe vom Typus der Aufgaben I.–IV. zu lösen, nämlich:

V. In einer Ebene seien eine Figur, bestehend aus zwei Geraden g_1, g_2 und zwei Punkten P_3, P_4, gegeben, ferner zwei Punkte P_1^*, P_2^* und zwei Geraden g_3^*, g_4^*. Es sollen die gleichsinnig und die ungleichsinnig ähnlichen Abbildungen der Ebene auf sich selbst bestimmt werden, für welche die entsprechenden Geraden g_1^*, g_2^* zu g_1, g_2 durch die Punkte P_1^*, P_2^* laufen und zugleich die entsprechenden Punkte P_3^*, P_4^* zu P_3, P_4 auf g_3^* und g_4^* liegen.

Wir gehen (Fig. 7) aus von dem Strahlenbüschel der Geraden g_1, g_2, p_3 ($= SP_3$) und p_4 ($= SP_4$) in der gegebenen Figur. Ihm entspricht in der gesuchten Figur, wenn wir gleichsinnige Ähnlichkeit voraussetzen, ein gleichsinnig kongruentes Büschel. Zwei Strahlen desselben müssen durch die gegebenen Punkte P_1^*, P_2^* laufen; Ort des Scheitels S' ist also ein Kreis durch $P_1^*P_2^*$. Nach dem Peripheriewinkelsatz drehen sich die entsprechenden Strahlen zu p_3 und p_4 um zwei feste Kreispunkte

Q_3^*, Q_4^*. Wir schneiden diese Strahlen p_3', p_4' mit den gegebenen Geraden g_3^*, g_4^*. Durch Abtragen der Winkel α_3, α_4 in P_3', P_4' bekommen wir zwei parallele Gerade l_3', l_4'. Können wir den Scheitel S' so wählen, daß diese zwei Geraden zusammenfallen, so haben wir die zur gegebenen ähnliche Figur gefunden, welche alle Forderungen der Aufgabe erfüllt. Wir legen noch durch einen festen Punkt O^* die parallele Gerade zu l_3', l_4'; P_∞' sei ihr unendlich ferner Punkt. Lassen wir S' den Kreis durchlaufen, so

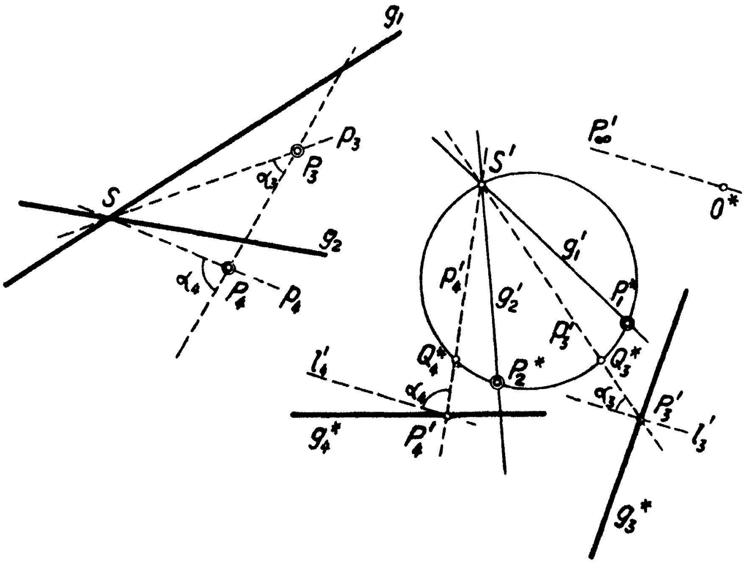

Fig. 7

erhalten wir in Q_3^*, Q_4^*, O^* drei kongruente Strahlbüschel. Ihre Schnittpunkte P_3', P_4' und P_∞' mit den Geraden g_3^*, g_4^* und der unendlich fernen Geraden liefern drei projektive Punktreihen. Infolgedessen umhüllen l_3' ($= P_3' P_\infty'$) und l_4' ($= P_4' P_\infty'$) zwei Parabeln. Die im Endlichen liegenden gemeinsamen Tangenten derselben liefern die gewünschten zusammenfallenden Geraden l_3', l_4' und damit die Lösung der Aufgabe. Für gleichsinnige und analog für ungleichsinnige Ähnlichkeit mit dem in bezug auf $P_1^* P_2^*$ symmetrischen Kreis ergeben sich also 3, 2 oder 1 Lösungen. Mit Zirkel und Lineal allein ist deren Konstruktion nicht möglich.

Entsprechende Aufgaben lassen sich auch für kongruente Abbildungen stellen. Es sei zum Beispiel ein zu g_1, g_2, g_3 gleichsinnig oder ungleichsinnig kongruentes Dreiseit zu zeichnen, dessen Seiten durch die gegebenen Punkte P_1^*, P_2^*, P_3^* laufen. Die Lösung für die gleichsinnige Kongruenz ergibt sich sofort aus Fig. 3. $S^*E_1^*$ ist gleich SE_1 zu wählen. Fig. 5 liefert die Lösung der dualen Aufgabe. $S^*P_1^*$ muß in diesem Falle gleich SP_1 sein. Die Bestimmung einer kongruenten Abbildung, bei der zwei Gerade durch gegebene Punkte gehen und gleichzeitig ein Punkt auf einer gegebenen Geraden liegen soll und auch die duale Aufgabe führen auf die Konstruktion der Schnittpunkte einer Pascalschen Schneckenlinie mit einer Geraden.

H. SCHÜEPP, Zürich.