Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 3 (1948)

Heft: 4

Rubrik: Aufgaben

Aufgaben

39. Die Seiten eines Dreiecks werden in je n gleiche Teile geteilt und die Teilpunkte mit den Gegenecken verbunden. In wie viele Teile wird die Fläche des Dreiecks zerlegt, wenn n Potenz einer ungeraden Primzahl ist? E. TROST.

40. Eine Parabel ist durch eine Sehne AB und deren Pol T eindeutig bestimmt. Wie konstruiert man ihren Scheitelpunkt, wenn außer T und der Mitte von AB nur fünf gerade Linien (Parallele, Normale, Verbindungsgerade) gezogen werden sollen? Weiß jemand eine noch einfachere Konstruktion? A. STOLL.

41. Man beweise: Die Koeffizienten $a_k^{(n)}$ in der Summenformel

$$1^n + 2^n + \cdots + m^n = \sum_{k=1}^{n} a_k^{(n)} \binom{m+1}{k+1} k!$$

bilden ein verallgemeinertes «Pascalsches» Dreieck mit den Beziehungen

$$a_{k-1}^{(n-1)} + k\, a_k^{(n-1)} = a_k^{(n)}, \qquad a_1^{(n)} = a_n^{(n)} = 1.$$

E. TROST.

Prüfungs- und Übungsaufgaben

Aufnahmeprüfungen der Eidgenössischen Technischen Hochschule
Mathematik (Herbst 1947).

1. Um die Seiten eines Buches zu numerieren, mußten 1752 Ziffern geschrieben werden. Wie viele numerierte Seiten hat das Buch?

2. Einer Kugel vom Radius r wird ein regelmäßiges dreiseitiges Prisma mit quadratischen Seitenflächen einbeschrieben. Wie groß sind Volumen und Oberfläche dieses Prismas?

3. Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Ellipsen, welche die y-Achse und die Gerade $y = x$ berühren und deren große Achsen horizontal und doppelt so lang sind wie die kleinen?

4. Gegeben ist die Funktion $y = x^3 - 5x^2 + 5x - 1$. Wo schneidet die entsprechende Kurve die x-Achse? Wo verläuft die Kurve oberhalb, wo unterhalb der x-Achse? Welche horizontale Gerade schneidet die Kurve in drei Punkten, deren Abszissen eine arithmetische Folge bilden?

5. Zehn Personen, nämlich 5 Damen und 5 Herren, sind zum Tee geladen und sollen an einem runden Tisch Platz nehmen. Auf wie viele Arten können sie die Plätze wählen, wenn zur Bedingung gemacht wird, daß zwischen zwei Herren je eine Dame zu sitzen kommt? (Man probiere zuerst mit 2, 4 und 6 Personen!).

Géométrie descriptive (1947):

Projection côtée

1° Deux cônes de révolution ont le même sommet, des génératrices de même longueur (10 cm) et des angles d'ouverture de 60° et 90°; ils se touchent le long d'une génératrice. De plus, les deux cônes touchent le plan de projection. Trouver la projection des deux cônes.

Méthode de Monge

2° Un plan est donné par ses traces $e_1 = S(0, 0, 0)$, $S_1(4, 10, 0)$ et $e_2 = S(0, 0, 0)$, $S_2(4, 0, 7)$. Dans ce plan se trouve un carré de côté 10 cm; les extrémités d'une diagonale sont sur e_1 et sur e_2 et à la même distance de S. Ce carré est la section diagonale d'un octaèdre régulier dont ont demande les projections. Déterminer en outre l'ombre propre de l'octaèdre et son ombre portée sur les deux plans de projection connaissant la direction lumineuse (les deux projections à 45°).

3° On fait tourner le plan horizontal de projection autour de la droite $V(0, 1, 0)$, $V(4, 7, 2)$ jusqu'à ce qu'il soit perpendiculaire au plan vertical. Déterminer la position que prend le point $A(7, 6, 0)$ après cette rotation.

4° On donne les droites $l = U(2, 0, 4)$, $V(4, 10, 0)$ et $m = W(10, 0, 0)$, $X(12, 0, 4)$, et les deux points $A(4, 3, 2)$ et $B(8, 3, 0)$. Les droites l et m se trouvent dans deux plans parallèles tangents à un cylindre de révolution qui passe par A et B. Construire l'axe d'un des cylindres possibles.

5° Répondre aux questions suivantes: a) Combien y a-t-il d'axes de symétrie dans un cube ? Quelle est leur position ? b) Combien y a-t-il d'axes de symétrie dans un octaèdre régulier ? Quelle est leur position ? c) Soit G un corps quelconque. G_1 est le symétrique de G par rapport à un plan E. G_2 est le symétrique de G_1 par rapport à un axe a. G_3 est le symétrique de G_2 par rapport à un point M. Quelle est la symétrie qui transforme directement G en G_3 si a est dans E et M sur a ?

L'axe Ox des coordonnées est dirigé à droite, Oy en avant et Oz en haut. Unité = 1 cm. Explications claires et concises des constructions effectuées.

Darstellende Geometrie (April 1948).

Wahl des Koordinatensystems: Nullpunkt in der Mitte des verfügbaren Platzes; x-Achse nach vorn, y-Achse nach rechts, z-Achse nach oben; Einheit = 1 cm. Die Lösung jeder Aufgabe ist kurz zu beschreiben.

Grund- und Aufrißverfahren

1. Der Punkt $S(4, -2, 10)$ ist Spitze eines geraden Kreiskegels, dessen Achse noch durch $A(9, 8, 0)$ geht. Sein Grundkreis läuft durch $P(5, 7, 6)$. Man stelle Grundkreis und Kegelumriß dar und bestimme den Öffnungswinkel des Kegels.

2. Gegeben ein Parallelflach durch die in der Grundrißebene liegende Seitenfläche $A(5, -3, 0)$, $B(7, -7, 0)$, $C(3, -6, 0)$, $D(1, -2, 0)$ und durch den Endpunkt $E(5, 6, 9)$ der dritten von A ausgehenden Kante. Auf der Seitenfläche mit der ersten Spur AB ist ein Punkt $F(6, -2\frac{1}{2}, ?)$ gegeben und auf der Seitenfläche mit der Spur AD ein Punkt $G(2, 2, ?)$. Lege durch FG die Ebenen, die ein Rechteck aus dem Parallelflach schneiden und stelle die möglichen Rechtecke dar.

3. Gegeben eine Ebene E durch die Punkte $P(0, -5, 0)$, $Q(10, 5, 0)$, $R(0, 5, 10)$ und eine Gerade $A(8, 4, 8)$, $B(1, 0, 2)$. Lege durch diese Gerade eine Ebene, die mit E und mit der Grundrißebene gleiche Winkel einschließt. (Beide Lösungen sind durch die Sperren anzugeben.)

Kotierte Normalprojektion

4. Der Leitkreis eines schiefen Kreiszylinders liegt in der Grundrißebene und hat den Mittelpunkt $M(-4, 4, 0)$, und den Radius 3. Die Zylinderachse geht durch $N(3, -3, 5)$. Man konstruiere den Schnitt des Zylinders mit der Ebene, die durch die y-Achse und durch N geht.

Literaturüberschau

JOHANN HEINRICH LAMBERT

Mathematische Werke, 2. Band

Arithmetik, Algebra und Analysis II. Herausgegeben von ANDREAS SPEISER.

Johannis Henrici Lamberti Opera mathematica. Vol. secundum. Commentationes arithmeticae, algebraicae et analyticae. Pars altera. Edidit Andreas Speiser. Orell Füßli Verlag, Zürich (324 S., 8°. In Leinen Fr. 25.–).

Dem Herausgeberfleiß des Professors Dr. ANDREAS SPEISER ist es gelungen, schon nach Jahresfrist den zweiten inhaltsreichen Band von LAMBERTS Werken den mathematischen Lesern vorzulegen, und sie werden ihm dafür Dank wissen.