

Über die Anzahl der stabilen Ruhelagen eines Würfels

Autor(en): **Tietze, Heinrich**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **3 (1948)**

Heft 5

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-13581>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ist t_k eine Wurzel dieser Gleichung, so sind

$$x'_k = a \sec t_k, \quad y'_k = b \operatorname{tg} t_k \quad \text{bzw.} \quad x_k^* = a \operatorname{tg} t_k, \quad y_k^* = b \sec t_k \quad (10)$$

die Koordinaten eines Schnittpunktes der Kurven H' und K' , bzw. H^* und K^* .

Damit ist der Satz auch für den Fall einer gezeichneten Hyperbel bewiesen.

5. Der Satz von SMITH und KORTUM läßt sich auf folgende Weise verallgemeinern:

Liegt ein von einem Kreis abweichender Kegelschnitt in der Ebene gezeichnet vor, so kann man die Wurzeln jeder Gleichung vierten oder dritten Grades mit Zirkel und Lineal konstruieren.

Die Berechnung der Wurzeln einer Gleichung vierten oder dritten Grades erfordert nämlich außer rationalen Operationen Berechnung von Quadratwurzeln und von Kubikwurzeln. Die Konstruktion der Quadratwurzel aus einer Zahl A erfordert die Konstruktion von $\sqrt{|A|}$ und die Halbierung des Winkels $\operatorname{Arg} A$. Beide Konstruktionen sind mit Zirkel und Lineal ausführbar. Die Konstruktion von $\sqrt[3]{A}$ erfordert die Konstruktion von $\sqrt[3]{|A|}$, das heißt ein Delisches Problem und die Dreiteilung des Winkels $\operatorname{Arg} A$. Beide Probleme lassen sich auf Gleichungen mit reellen Koeffizienten zurückführen. Sie sind also nach dem Satz von SMITH und KORTUM konstruierbar.

GYULA (JULIUS) v. SZ. NAGY, Szeged (Ungarn).

Über die Anzahl der stabilen Ruhelagen eines Würfels

Herrn GEORG FABER zum 70. Geburtstag gewidmet

1. Was im Lateinischen «cubus» heißt (englisch «cube», französisch «cube», italienisch «cubo», holländisch «kubus» usw.), dafür haben wir im Deutschen das vom Wort «werfen» kommende Wort «Würfel». Dieses Wort dient uns aber nicht nur zur Bezeichnung derjenigen geometrischen Figur, die man auch «Hexaeder» nennt, sondern ebenso zur Benennung jenes Körpers von dieser Gestalt, der zum «Würfelspiel» verwendet wird, mit dem also wirklich «geworfen» wird. Demgegenüber haben andere Sprachen für solche «Spielwürfel» besondere Namen (game at «dice»; jouer aux «dés», giocare ai «dadi»; dobbelen — «dobbelsteen, teerling»), so daß in ihnen die Ausdrucksweise der Geometer nicht zugleich jene der Glücksritter ist.

Nun ist ein Würfelspiel auch mit anderen geworfenen Körpern als solchen von kubischer (hexaedrischer) Gestalt möglich, und man könnte z. B. auch oktaedrische «Würfel» nehmen, wobei wir hier — wie im Titel — das Wort «Würfel» im allgemeinen Sinn eines Körpers verwenden, mit dem geworfen wird.

Es handelt sich dann um die Anzahl der Ruhelagen eines solchen geworfenen Körpers und um die Frage, welches die Chancen einer jeden dieser Ruhelagen sind¹⁾.

Dabei kann man die Betrachtung auf konvexe Körper beschränken, wenn man solche aus inhomogenem Material nicht ausschließt. Liegt nämlich ein nichtkonvexer Würfelkörper Ω vor, so kann man den kleinsten konvexen Körper \mathfrak{R} betrachten, der Ω umfaßt²⁾ und dabei \mathfrak{R} als inhomogen auffassen, insofern in dem zur Ergänzung

¹⁾ Auf die Beurteilung dieser Chancen, speziell wenn sie nicht für alle Ruhelagen gleich groß sind, komme ich in einem Aufsatz *Würfelspiel und Integralgeometrie* zu sprechen. (Sitz.-Ber. Bayr. Akad. Wiss., Math.-naturw. Kl., Sitzung 4. Oktober 1946, Jg. 1945/46, S. 131–158.)

²⁾ Bekanntlich heißt \mathfrak{R} nach CARATHÉODORY die «konvexe Hülle» von Ω .

hinzugenommenen Raumteil¹⁾ $\mathfrak{R} - \mathfrak{Q}$ im allgemeinen eine andere Dichte herrscht (nämlich die der Luft im Außenraum) als in \mathfrak{Q} .

2. Man kann die Fragestellung auch für andere Dimensionszahlen als 3, insbesondere für 2 Dimensionen behandeln, wobei ein langer Stab, dessen Querschnitt eine vorgegebene zweidimensionale konvexe Figur \mathfrak{R} ist, zur Realisierung des zugehörigen «Würfelspiels» dienen kann. (Man mag etwa an einen in üblicher Weise sechskantig geschnittenen Bleistift denken.) Der Schwerpunkt einer solchen konvexen Wurf-figur \mathfrak{R} sei S ; der Rand der Figur \mathfrak{R} sei in Polarkoordinaten ϱ, φ gegeben durch

$$\varrho = \varrho(\varphi) \quad (\text{mit } 0 \leq \varphi \leq 2\pi), \quad \varrho(0) = \varrho(2\pi). \quad (1)$$

Wir wollen dabei ausdrücklich noch die folgende einschränkende Voraussetzung (V) machen:

(V) Die in (1) auftretende Funktion $\varrho(\varphi)$ habe im Intervall $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ nur endlich viele Maxima und Minima²⁾.

3. Bei Betrachtung der möglichen Ruhelagen kann man von instabilen absehen (deren Chance gleich Null ist). Natürlich bietet auch der Fall der homogenen Kreisscheibe bzw. des homogenen zylindrischen Stabes, wo gar keine stabilen, sondern nur indifferente Gleichgewichtslagen auftreten, kein weiteres Interesse.

Bei inhomogener Massenverteilung kann aber auch der für ein «Würfelspiel» triviale Fall eintreten, daß nur eine einzige stabile Ruhelage vorhanden, jede andere Ruhelage dagegen labil ist. (Einfachstes Beispiel: die inhomogene Kreisscheibe mit exzentrischem Schwerpunkt bzw. der entsprechende inhomogene zylindrische Stab.)³⁾

Dagegen gilt für homogene zweidimensionale konvexe Wurf-figuren \mathfrak{R} der Satz:

Satz 1. Eine der Voraussetzung (V) genügende konvexe zweidimensionale Wurf-figur \mathfrak{R} , deren Rand keinen Kreisbogen mit dem Schwerpunkt als Mittelpunkt enthält, hat bei homogener Massenverteilung mindestens zwei stabile Ruhelagen.

4. Um Satz 1 zu beweisen, werden wir uns auf folgenden Satz stützen:

Satz 2. Sei in Polarkoordinaten eine konvexe Figur \mathfrak{R} durch $\varrho = \varrho(\varphi)$ gegeben, wobei $\varrho(\varphi)$ nur 1 Maximum und 1 Minimum habe⁴⁾, dann ist der Schwerpunkt der Figur \mathfrak{R} (von der homogene Flächendichte vorausgesetzt wird) notwendig verschieden vom Anfangspunkt O des Polarkoordinatensystems.

Beim Beweis von Satz 2 können wir annehmen, die durch $\varphi = 0$ (oder $= 2\pi$) gekennzeichnete Polarachse entspreche dem Minimalwert r von $\varrho(\varphi)$. Der Maximalwert sei R und gehöre zu $\varphi = \varphi_0$. Eine nicht durch den Schwerpunkt S von \mathfrak{R} gehende Gerade g heiße eine «Kipplinie» (Lapsionslinie); und sie heiße eine *spezielle Kipplinie*

¹⁾ Schon die üblichen – im wesentlichen kubisch gestalteten – Spielwürfel sind meist so hergestellt, daß die Nummern 1 bis 6 durch angebrachte Höhlungen (mit einer Kugelkalotte als Oberfläche) gekennzeichnet sind, so daß man es genau genommen mit einem nichtkonvexen Würfelkörper \mathfrak{Q} zu tun hat, wobei $\mathfrak{R} - \mathfrak{Q}$ von der Gesamtheit der $1 + \dots + 6 = 21$ Höhlungen gebildet wird.

²⁾ Durch (V) ist also z. B. bereits jene Figur \mathfrak{R} ausgeschlossen, deren Rand von den unendlich vielen geradlinigen Verbindungsstrecken $P_\nu, P_{\nu+1}$ gebildet wird, wenn für ein geeignetes Polarkoordinatensystem (nicht mit dem Schwerpunkt S als Mittelpunkt) P_ν die Koordinaten $\varrho = 1, \varphi = 2\pi/\nu$ hat ($\nu = 1, 2, 3, \dots$).

³⁾ Bekannte dreidimensionale Beispiele sind leichte Puppen (etwa aus Zelluloid) mit schwerem (etwa mit Blei ausgegossenem) halbkugelförmigem Fuß.

⁴⁾ Es ist das, wenn wir $\varrho(\varphi)$ als periodische Funktion mit der Periode 2π auffassen, so zu verstehen daß für eine beliebige Wahl von α im Intervall $\alpha \leq \varphi \leq \alpha + 2\pi$ ein etwaiges Maximum (bzw. Minimum), in $\varphi = \alpha$ und eines in $\varphi = \alpha + 2\pi$ zusammen nur einmal gezählt werden.

dann, wenn sie die Figur \mathfrak{R} derart in zwei Teile zerlegt, einen größeren und einen kleineren, daß dabei das an der Geraden g gespiegelte Bild des kleineren Teils ganz im größeren Teil enthalten ist.

Nun ist $\varrho(\varphi)$ im Intervall $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$ eine monoton vom Wert r zum Wert R zunehmende (oder doch niemals abnehmende) Funktion, während $\varrho(\varphi)$ im Intervall $\varphi_0 \leq \varphi \leq 2\pi$ monoton von R zu r abnimmt (oder doch niemals zunimmt). Außerdem ist $\varrho(\varphi)$, der Konvexität von \mathfrak{R} zufolge, stetig. Nehmen wir einmal den Fall, daß Teilintervalle φ , in denen $\varrho(\varphi)$ konstant ist (also kreisbogenförmige Stücke mit O als Mittelpunkt), nicht vorkommen, dann wird jeder dem Intervall $r < \varrho < R$ angehörende Wert ϱ genau einmal im Intervall $0 < \varphi < \varphi_0$ und einmal im Intervall $\varphi_0 < \varphi < 2\pi$ angenommen, etwa für $\varphi = \varphi_1$ und $\varphi = \varphi_2$. Dabei ist die Summe $\varphi_1 + (2\pi - \varphi_2)$ eine mit ϱ monoton wachsende stetige Funktion $f(\varrho)$, für welche $f(r) = 0$ und $f(R) = 2\pi$ ist. Es muß also einen Wert $\varrho = r^*$ zwischen r und R geben, für den $f(r^*) = \pi$ ist. Zu den zugehörigen Werten φ_1 und φ_2 gehören solche Halbgeraden, die sich zu einer einzigen Geraden ergänzen, die offenbar eine spezielle Kipplinie ist. Da diese durch O geht, kann O nicht der Schwerpunkt sein.

Auf den Fall, daß auch streckenweise Konstanz von $\varrho(\varphi)$ zugelassen wird, ist die Überlegung ohne Schwierigkeit übertragbar. Zu jedem Wert ϱ zwischen r und R gehört dann aus $0 < \varphi < \varphi_0$ entweder ein einzelner Wert $\varphi = \varphi_1$ oder ein ganzes Intervall $\varphi'_1 \leq \varphi \leq \varphi''_1$; desgleichen aus $\varphi_0 < \varphi < 2\pi$ ein Wert $\varphi = \varphi_2$ oder ein Intervall $\varphi'_2 \geq \varphi \geq \varphi''_2$. An Stelle der einen Summe $\varphi_1 + 2\pi - \varphi_2$ sind gegebenenfalls alle Zahlen des Intervalls von $\varphi'_1 + (2\pi - \varphi'_2)$ bis $\varphi''_1 + (2\pi - \varphi''_2)$ in Betracht zu ziehen. Enthält dieses Intervall den Wert π , dann erhält man eine einzige oder einen ganzen Winkelraum von speziellen Kipplinien.

Satz 2 ist damit bewiesen. Übrigens ist es im speziellen Fall $\varphi_0 = \pi$ leicht, noch einfacher zu einer speziellen Kipplinie durch O zu gelangen, da eine solche dann allemal durch die beiden Halbgeraden $\varphi = \pi/2$ und $\varphi = 3\pi/2$ gebildet wird.

5. Um von Satz 2 zu Satz 1 zu gelangen, betrachten wir zunächst die Kennzeichnung einer stabilen Ruhelage. Sei durch den Winkel φ , wie oben, die Richtung eines Halbstrahls durch den Koordinatenanfangspunkt O gekennzeichnet, wobei wir jetzt für O den Schwerpunkt S der Figur \mathfrak{R} nehmen. Unter den diesen Halbstrahl senkrecht schneidenden Geraden betrachten wir jene genügend weit von S entfernten, so daß auf der einen Seite einer solchen Geraden kein Punkt von \mathfrak{R} liegt. Unter diesen untereinander parallelen Geraden gibt es eine dem Punkt S nächstgelegene; es ist die auf der Richtung φ senkrechte «Stützgerade» von \mathfrak{R} , die kurz $\sigma(\varphi)$ genannt werde. Ihre Gleichung in kartesischen Koordinaten x, y sei

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - h(\varphi) = 0,$$

wobei für die in der Richtung φ wirkende Schwerkraft eine stabile Ruhelage von \mathfrak{R} durch ein eigentliches Minimum der «Stützfunktion» $h(\varphi)$ charakterisiert ist.

Wird nun \mathfrak{R} als konvexe, der Voraussetzung (V) genügende Wurffigur mit homogener Dichte angenommen, wobei $\varrho = \varrho(\varphi)$ die Gleichung des Randes von \mathfrak{R} in Polarkoordinaten mit dem Schwerpunkt S als Anfangspunkt sei, dann muß es nach Satz 2 mehr als ein Minimum der Funktion $\varrho(\varphi)$ geben. Und da einem solchen auch ein

Minimum von $h(\varphi)$ entspricht¹⁾, so muß es mehr als zwei stabile Ruhelagen geben. Damit ist Satz 1 bewiesen.

Ein einfaches Beispiel einer zweidimensionalen homogenen Wurf figur mit genau zwei stabilen Ruhelagen liefert eine Ellipse. Dasselbe gilt von Dreiecken, bei welchen eine der vom Schwerpunkt auf eine Dreiecksseite gefällten Normalen diese Seite nicht im Innern, sondern außerhalb oder in einem Eckpunkt trifft, so daß nur auf den beiden anderen Seiten ein stabiles Ruhen möglich ist.

Natürlich kann man fragen, inwieweit in Satz 1 die Voraussetzung (V) entbehrlich ist. Auch ist anzunehmen, daß ein zu Satz 1 analoger Satz auch für $n \geq 3$ Dimensionen gilt, wobei man in abgeplatteten Rotationsellipsoiden

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2 + \dots + x_n^2}{b^2} - 1 \leq 0 \quad (b > a)$$

Beispiele von «Würfeln» mit nur zwei stabilen Ruhelagen hat.

HEINRICH TIETZE, München.

Kleine Mitteilungen

I. Eine anschauliche Deutung des Vierscheitelsatzes

Die Randkurve eines ebenen konvexen Bereiches heißt Eilinie, wenn sie sowohl eine stetige Tangente als auch stetige und überall positive Krümmung besitzt. In der Differentialgeometrie der ebenen Kurven²⁾ wird durch Rechnung bewiesen, daß es bei jeder Eilinie mindestens vier Scheitel gibt, das heißt vier Punkte, in denen die Krümmung ein relatives Extremum erreicht. Die Begriffe, die HJELMSLEV³⁾ zur Untersuchung der ebenen Kurven einführt, gestatten eine geometrische Deutung des Vierscheitelsatzes.

Ein Bogen AB , bei dem die Richtung der Tangente sich von A bis B stetig und in gleichem Sinn um weniger als 180° ändert, heißt «einfacher Bogen». Das von den Halbtangenten in A und B und der Berührungssehne gebildete Dreieck umschließt somit den Bogen AB . Variiert zudem die Krümmung von A bis B stetig und monoton, sofern sie nicht konstant ist, so heißt der einfache Bogen AB «Normbogen». Durch die Scheitel wird die Eilinie in Normbögen geteilt. Man darf zum Beweis des Vierscheitelsatzes offenbar annehmen, daß keiner dieser Normbögen Kreisbögen enthält. Unter dieser Voraussetzung hat HJELMSLEV a. a. O. rein geometrisch gezeigt, daß die Evolute (Ort der Krümmungsmittelpunkte) eines Normbogens immer ein einfacher Bogen ist. Je zwei einfache Bögen der Evolute müssen sich infolge der Stetigkeitsvoraussetzungen so aneinanderschließen, daß zwei Halbtangenten aufeinanderfallen, das heißt, es entsteht eine Spitze «erster Art». Offenbar ist es unmöglich, auf diese Weise aus nur zwei einfachen Bögen eine geschlossene Evolute zusammenzusetzen. Da die Anzahl der Scheitel aber gerade sein muß, braucht es mindestens vier einfache Bögen, wie bei der Ellipse.

ERNST TROST.

¹⁾ Falls zum Wert $\varphi = \psi$ der Minimalwert $\rho(\varphi) = r$ gehört, dann gehört für ein passendes $\delta > 0$ der ganze Kreissektor $\varrho \leq r$, $\psi - \delta \leq \varphi \leq \psi + \delta$ zu \mathfrak{R} und für jedes φ aus $\psi - \delta \leq \varphi \leq \psi + \delta$ hat man an \mathfrak{R} eine Stützgerade $x \cos \varphi + y \sin \varphi - h(\varphi) = 0$ mit $h(\varphi) \geq r = h(\psi)$. Man hat überdies notwendig ein eigentliches Minimum, d. h. es ist $h(\varphi) > h(\psi)$ für $0 < |\varphi - \psi| \leq \delta$, da $\rho(\varphi)$ nach Voraussetzung in keinem Intervall konstant ist, somit für $\varphi = \psi$ ein eigentliches Minimum hat. [Auf indifferente Ruhelagen, wie sie bei Konstanzintervallen von $\rho(\varphi)$ auftreten, komme ich zurück in einer Note *Über stabile und indifferente Ruhelagen eines homogenen Zylinders*, Sitz.-Ber. Bayr. Akad. Wiss., Sitzung 2. Juli 1948 (Zusatz bei der Korrektur).]

²⁾ Vgl. W. BLASCHKE, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, 3. Auflage, Bd. I, S. 31.

³⁾ J. HJELMSLEV, *Darstellende Geometrie*, Kap. 7, Leipzig 1914.