

Aufgaben

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **3 (1948)**

Heft 5

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Jetzt ist man in der Lage, die geometrische Bedeutung der Multiplikation mit $\text{cis } \varphi$ zu untersuchen. Zunächst stellt man fest:

$$|X \text{ cis } \varphi - Y \text{ cis } \varphi| = |(X - Y) \text{ cis } \varphi| = |X - Y| \cdot |\text{cis } \varphi| = |X - Y|,$$

d. h. bei Multiplikation mit $\text{cis } \varphi$ bleiben sämtliche Abstände unverändert.

Und nun kommen die entscheidenden Überlegungen. Zuerst spezialisiert man φ auf $\pi/2$, untersucht also die Multiplikation mit i und stellt fest: $0 \cdot i = 0$, $1 \cdot i = i$ und $i \cdot i = -1$. Die Multiplikation mit i führt also das Dreieck $0, 1, i$ in das kongruente Dreieck $0, i, -1$ über, welches aus jenem durch eine Drehung im positiven Sinne um 90° um den Nullpunkt hervorgeht.

Da nun ein Punkt durch seine Abstände von drei gegebenen, nicht auf derselben Geraden liegenden Punkten eindeutig bestimmt ist und da diese Abstände unverändert bleiben, so ergibt sich, daß die ganze Ebene um einen rechten Winkel um den Nullpunkt gedreht wird.

Jetzt wählt man φ wieder allgemein und stellt fest, im letzten Teil mit Hilfe des eben gefundenen: $0 \cdot \text{cis } \varphi = 0$, $1 \cdot \text{cis } \varphi = \text{cis } \varphi$ und $i \text{ cis } \varphi = \text{cis} [\varphi + (\pi/2)]$. Das heißt das Dreieck $0, 1, i$, und mit ihm die ganze Ebene, wird um den Nullpunkt um den Polarkwinkel φ gedreht.

Damit ist das entscheidende Resultat gefunden, aus ihm ergibt sich die Cisgleichung. Der Baum der Erkenntnis ist gereift, man braucht nur leicht zu schütteln, und die schönsten Früchte fallen. Ich erwähne lediglich: Additionstheoreme, Potenzierung und Radizierung komplexer Zahlen, Einheitswurzeln.

Ich habe im Vorstehenden die wichtigsten Schritte angedeutet. Es ist Sache des erfahrenen Lehrers, in wohlbedachter Rücksicht auf den besonderen Charakter der Schule und der Klasse zu entscheiden, wie im einzelnen die notwendigen Schritte zu erarbeiten sind und wie weit Nebenwege beschränkt und Erweiterungen ausgebaut werden sollen.

Daß die Additionstheoreme so schön fix und fertig herauspringen, ist gewiß ein schätzenswerter Vorzug der geschilderten Methode. Noch bedeutsamer erscheint mir der Umstand, daß hier die geometrische Darstellung der komplexen Zahlen zum tragenden Element wird, während sie sonst ein zwar schönes, aber doch nur begleitendes Spiel bleibt.

A. STOLL, Zürich.

Aufgaben

Aufgabe 31. Um ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite s wird ein geschlossener Faden der Länge $L \geq 3s$ gelegt und durch einen sich bewegenden Stift gespannt. Man berechne die Fläche des vom Stifte beschriebenen Ovals. E. TROST.

Lösung. F bedeute nicht den Flächeninhalt des Ovals, sondern die Differenz zwischen der Ovalfläche und der Dreiecksfläche. Sind dann φ und ψ beide zwischen 0 und $\pi/2$ bestimmt durch

$$\sin \varphi = \frac{L - 3s}{2L - 3s} \quad \text{und} \quad \sin \psi = \frac{L}{2L - 3s},$$

dann ist

$$F = \frac{3}{4} \sqrt{(L - s)(L - 2s)} \left\{ \varphi \sqrt{L(L - s)} + \psi \sqrt{(L - 2s)(L - 3s)} \right\}.$$

Herleitung. A, B, C seien die Ecken des gleichseitigen Dreiecks mit der Seite s , und A' sei die Mitte von BC , B' diejenige von CA . Die Verlängerungen der Höhen AA' und BB' über A' bzw. B' hinaus schneiden aus der ringförmigen Fläche F genau $1/6$ heraus. Der krummlinige Teil der Berandung dieses Flächenstückes besteht aus zwei mit gleicher Tangente aneinanderstoßenden Ellipsenbögen RS und ST , wobei R, S, T bzw. auf den Verlängerungen von $A'A, BA$ und BB' liegen. Der Rest der Berandung besteht aus den Strecken RA, AB' und $B'T$.

Der Bogen RS gehört einer Ellipse mit den Brennpunkten B und C an, RA' ist die halbe Nebenachse. Ebenso gehört der Bogen ST einer Ellipse mit den Brennpunkten A und C und der halben Nebenachse TB' an. Da das Dreieck SAB' flächengleich ist mit dem Dreieck SAA' , so ist das obengenannte Flächenstück $RAB'TS$ gleich der Summe der Ellipsensektoren RSA' und STB' .

Ich beginne mit RSA' . Die Elemente a, b, c der Ellipse (halbe Haupt- und Nebenachse und lineare Exzentrizität) sind:

$$a = \frac{L-s}{2}, \quad c = \frac{s}{2}, \quad b = \sqrt{a^2 - c^2} = \frac{\sqrt{L(L-2s)}}{2}.$$

Die Sektorfläche ist dann gegeben durch $ab\varphi/2$, wo φ der Zentriwinkel des dem Ellipsensektor RSA' im affinen Hauptkreis entsprechenden Kreissektors ist. Bezeichnet man mit x den Abstand des Punktes S von RA' , so hat man auf Grund einer bekannten Ellipseeigenschaft: $s + 2x = BS = a + (cx/a)$, $x/a = (a-s)/(2a-c)$. Also ist

$$\sin \varphi = \frac{L-3s}{2L-3s} \quad \text{und} \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Somit hat man:

$$8F(RSA') = \varphi(L-s)\sqrt{L(L-2s)}.$$

In analoger Weise findet man für den andern Ellipsensektor:

$$8F(STB') = \psi(L-2s)\sqrt{(L-s)(L-3s)}$$

und damit nach leichter Umformung das oben angegebene Resultat.

Probe. Für $L = 3s$ wird $F = 0$, und wenn L gegen unendlich geht, dann werden φ und ψ je zu $\pi/6$, und der Quotient aus F und $\pi(L/2)^2$ geht gegen 1, wie es sein muß, da das Oval mehr und mehr zu einem Kreis mit dem Radius $L/2$ wird. A. STOLL, Zürich.

Weitere Lösungen sandten L. DESCLOUX (Fribourg), R. LITSCHI (Zürich), A. MARET (Biel), E. ROTHMUND (Zürich), A. SCHWARZ (Seuzach).

Neue Aufgaben

42. Man ziehe im Dreieck ABC zu BC die Parallele $B'C'$ so, daß sich die Umfänge der Dreiecke $AB'C'$ und ABC verhalten wie die Inhalte des Dreiecks $AB'C'$ und des Trapezes $B'BCC'$.

E. ROTHMUND.

43. Für die zu den Dreieckseiten a, b, c parallelen, durch die Seiten begrenzten Tangenten a', b', c' des einbeschriebenen Kreises gilt:

$$\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} = 1.$$

E. ROTHMUND.

44. Setzt man

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n}{2k} x^{2k}, \quad Q_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n}{2k+1} x^{2k+1},$$

so gilt für jedes x :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{P_n^2 + Q_n^2} = \frac{1}{x^2}.$$

E. TROST.

45. Ist n eine natürliche Zahl, so ist

$$\sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} 2^{2k} \cdot 3^{n-k}$$

die Summe von zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen. Beispiel:

$$n = 3, \quad 2521 = 35^2 + 36^2.$$

E. TROST.