Aufgaben

Jetzt ist man in der Lage, die geometrische Bedeutung der Multiplikation mit cis φ zu untersuchen. Zunächst stellt man fest:

$$|X \operatorname{cis} \varphi - Y \operatorname{cis} \varphi| = |(X - Y) \operatorname{cis} \varphi| = |X - Y| \cdot |\operatorname{cis} \varphi| = |X - Y|,$$

d.h. bei Multiplikation mit cis φ bleiben sämtliche Abstände unverändert.

Und nun kommen die entscheidenden Überlegungen. Zuerst spezialisiert man φ auf $\pi/2$, untersucht also die Multiplikation mit i und stellt fest: $0 \cdot i = 0$, $1 \cdot i = i$ und $i\,i = -1$. Die Multiplikation mit i führt also das Dreieck 0, 1, i in das kongruente Dreieck 0, i, -1 über, welches aus jenem durch eine Drehung im positiven Sinne um 90° um den Nullpunkt hervorgeht.

Da nun ein Punkt durch seine Abstände von drei gegebenen, nicht auf derselben Geraden liegenden Punkten eindeutig bestimmt ist und da diese Abstände unverändert bleiben, so ergibt sich, daß die ganze Ebene um einen rechten Winkel um den Nullpunkt gedreht wird.

Jetzt wählt man φ wieder allgemein und stellt fest, im letzten Teil mit Hilfe des eben gefundenen: $0 \cdot \operatorname{cis} \varphi = 0$, $1 \cdot \operatorname{cis} \varphi = \operatorname{cis} \varphi$ und $i \operatorname{cis} \varphi = \operatorname{cis} [\varphi + (\pi/2)]$. Das heißt das Dreieck 0, 1, i, und mit ihm die ganze Ebene, wird um den Nullpunkt um den Polarwinkel φ gedreht.

Damit ist das entscheidende Resultat gefunden, aus ihm ergibt sich die Cisgleichung. Der Baum der Erkenntnis ist gereift, man braucht nur leicht zu schütteln, und die schönsten Früchte fallen. Ich erwähne lediglich: Additionstheoreme, Potenzierung und Radizierung komplexer Zahlen, Einheitswurzeln.

Ich habe im Vorstehenden die wichtigsten Schritte angedeutet. Es ist Sache des erfahrenen Lehrers, in wohlbedachter Rücksicht auf den besonderen Charakter der Schule und der Klasse zu entscheiden, wie im einzelnen die notwendigen Schritte zu erarbeiten sind und wie weit Nebenwege beschritten und Erweiterungen ausgebaut werden sollen.

Daß die Additionstheoreme so schön fix und fertig herausspringen, ist gewiß ein schätzenswerter Vorzug der geschilderten Methode. Noch bedeutsamer erscheint mir der Umstand, daß hier die geometrische Darstellung der komplexen Zahlen zum tragenden Element wird, während sie sonst ein zwar schönes, aber doch nur begleitendes Spiel bleibt. A. Stoll, Zürich.

Aufgaben

Aufgabe 31. Um ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite s wird ein geschlossener Faden der Länge $L \geqq 3\,s$ gelegt und durch einen sich bewegenden Stift gespannt. Man berechne die Fläche des vom Stifte beschriebenen Ovals. E. Trost.

Lösung. F bedeute nicht den Flächeninhalt des Ovals, sondern die Differenz zwischen der Ovalfläche und der Dreiecksfläche. Sind dann φ und ψ beide zwischen 0 und $\pi/2$ bestimmt durch

$$\sin \varphi = \frac{L - 3\,s}{2\,L - 3\,s} \quad \text{und} \quad \sin \psi = \frac{L}{2\,L - 3\,s},$$

dann ist

$$F = \frac{3}{4} \sqrt{(L - s)\,(L - 2\,s)} \left\{ \varphi \sqrt{L\,(L - s)} + \psi \sqrt{(L - 2\,s)\,(L - 3\,s)} \right\}.$$

Herleitung. A, B, C seien die Ecken des gleichseitigen Dreiecks mit der Seite s, und A' sei die Mitte von BC, B' diejenige von CA. Die Verlängerungen der Höhen AA' und BB' über A' bzw. B' hinaus schneiden aus der ringförmigen Fläche F genau 1/6 heraus. Der krummlinige Teil der Berandung dieses Flächenstückes besteht aus zwei mit gleicher Tangente aneinanderstoßenden Ellipsenbögen RS und ST, wobei R, S, T bzw. auf den Verlängerungen von $A'A$, BA und BB' liegen. Der Rest der Berandung besteht aus den Strecken RA, AB' und $B'T$.

Der Bogen RS gehört einer Ellipse mit den Brennpunkten B und C an, RA' ist die halbe Nebenachse. Ebenso gehört der Bogen ST einer Ellipse mit den Brennpunkten A und C und der halben Nebenachse TB' an. Da das Dreieck SAB' flächengleich ist mit dem Dreieck SAA', so ist das obengenannte Flächenstück $RAB'TS$ gleich der Summe der Ellipsensektoren RSA' und STB'.

Ich beginne mit RSA'. Die Elemente a, b, c der Ellipse (halbe Haupt- und Nebenachse und lineare Exzentrizität) sind:

$$a = \frac{L-s}{2}, \quad c = \frac{s}{2}, \quad b = \sqrt{a^2 - c^2} = \frac{\sqrt{L(L-2s)}}{2}.$$

Die Sektorfläche ist dann gegeben durch $a\,b\,\varphi/2$, wo φ der Zentriwinkel des dem Ellipsensektor RSA' im affinen Hauptkreis entsprechenden Kreissektors ist. Bezeichnet man mit x den Abstand des Punktes S von RA', so hat man auf Grund einer bekannten Ellipseneigenschaft: $s + 2x = BS = a + (c\,x/a)$, $x/a = (a - s)/(2a - c)$. Also ist

$$\sin\varphi = \frac{L - 3s}{2L - 3s} \quad \text{und} \quad 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Somit hat man:

$$8\,F(RSA') = \varphi(L - s)\sqrt{L(L - 2s)}.$$

In analoger Weise findet man für den andern Ellipsensektor:

$$8\,F(STB') = \psi(L - 2s)\sqrt{(L - s)(L - 3s)}$$

und damit nach leichter Umformung das oben angegebene Resultat.

Probe. Für $L = 3s$ wird $F = 0$, und wenn L gegen unendlich geht, dann werden φ und ψ je zu $\pi/6$, und der Quotient aus F und $\pi(L/2)^2$ geht gegen 1, wie es sein muß, da das Oval mehr und mehr zu einem Kreis mit dem Radius $L/2$ wird. A. STOLL, Zürich.

Weitere Lösungen sandten L. DESCLOUX (Fribourg), R. LITSCHI (Zürich), A. MARET (Biel), E. ROTHMUND (Zürich), A. SCHWARZ (Seuzach).

Neue Aufgaben

42. Man ziehe im Dreieck ABC zu BC die Parallele $B'C'$ so, daß sich die Umfänge der Dreiecke $AB'C'$ und ABC verhalten wie die Inhalte des Dreiecks $AB'C'$ und des Trapezes $B'BCC'$. E. ROTHMUND.

43. Für die zu den Dreieckseiten a, b, c parallelen, durch die Seiten begrenzten Tangenten a', b', c' des einbeschriebenen Kreises gilt:

$$\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} = 1.$$

E. ROTHMUND.

44. Setzt man

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n}{2k} x^{2k}, \quad Q_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n}{2k+1} x^{2k+1},$$

so gilt für jedes x:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{P_n^2 + Q_n^2} = \frac{1}{x^2}.$$

E. TROST.

45. Ist n eine natürliche Zahl, so ist

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} 2^{2k} \cdot 3^{n-k}$$

die Summe von zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen. Beispiel:

$$n = 3, \quad 2521 = 35^2 + 36^2.$$

E. TROST.