haben paarweise keine inneren Punkte gemeinsam und liegen alle in T. Aus (3) folgt nunmehr

$$(1 + 4 + 9 + \cdots + n^2)\, J\left(\frac{1}{n}\, T\right) \leqq J(T). \tag{14}$$

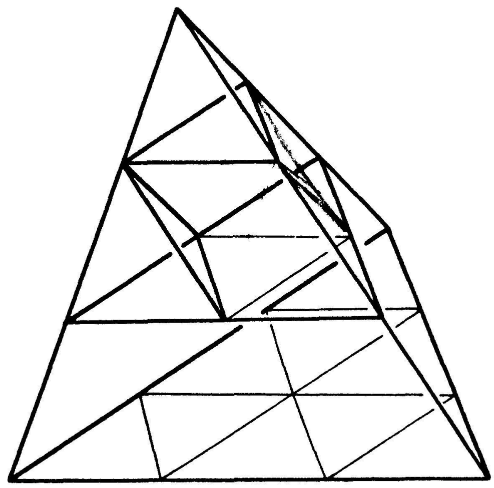

Fig. 2

Der Einsatz von (12) ergibt mit der Schätzung[1])

$$1 + 4 + 9 + \cdots + n^2 > \frac{n^3}{4} \tag{15}$$

und Berücksichtigung von (12) die Beziehung

$$(n^2 - 4)\, p < F\, h, \tag{16}$$

und hieraus folgt in Verbindung mit (13) offenbar

$$p = 0. \tag{17}$$

Lesen wir rückwärts, von (17) zu (11) zu (9) zu (5), so ergibt sich

$$J(T) = f(1) = \frac{F\, h}{3}\,. \tag{18}$$

Damit ist unser Ziel erreicht. H. HADWIGER, Bern.

Konstruktion zweier gleich großer regulärer Tetraeder, die einander zugleich ein- und umgeschrieben sind

1. *Ziel der Arbeit*

Liegen die Ecken eines Tetraeders der Reihe nach in den Begrenzungsebenen eines anderen Tetraeders, so ist das erste Tetraeder dem zweiten eingeschrieben und das zweite Tetraeder dem ersten umgeschrieben.

Wenn nun zwei Tetraeder so liegen, daß jedes dem anderen eingeschrieben ist, so ist zugleich auch jedes von ihnen dem anderen umgeschrieben. Daß solche einander

[1]) Die Summe der ersten n Quadratzahlen beträgt bekanntlich $[n\,(n + 1)\,(2\,n + 1)]/6$.

gegenseitig ein- und umgeschriebene Tetraeder wirklich existieren, ist jedenfalls eine recht bemerkenswerte Tatsache. Sie wurde zuerst von A. F. MÖBIUS behauptet und bewiesen[1]). Aus diesem Grunde werden zwei einander ein- und umgeschriebene Tetraeder auch Möbiussche Tetraeder genannt.

Daß es darüber hinaus sogar zwei gleich große reguläre Tetraeder gibt, die einander zugleich ein- und umgeschrieben sind, wird im folgenden in ganz elementarer Weise gezeigt.

Weiterhin wird nachgewiesen, daß sich die hier angeführten kongruenten regulären Möbiusschen Tetraeder in neunfacher hyperboloidischer Lage befinden; das heißt, es gibt unter den Verbindungsgeraden der Tetraederecken neun Quadrupel von untereinander windschiefen Geraden, die jedesmal einer Erzeugendenschar einer Regelfläche zweiten Grades angehören. Da zwei allgemeine Möbiussche Tetraeder bloß in dreifacher Weise hyperboloidisch liegen, so ist das in Rede stehende Paar kongruenter regulärer Möbiusscher Tetraeder nicht nur metrisch, sondern auch projektiv ausgezeichnet.

2. Herleitung von zwei gleich großen regulären Möbiusschen Tetraedern

Wir gehen von einem regulären Tetraeder $A_1B_1C_1D_1$ aus, das mit dem gleichseitigen Begrenzungsdreieck $A_1B_1C_1$ auf der waagrecht gedachten Zeichenebene aufruhen möge (Abb. 1). Diese Begrenzungsebene wollen wir Grundfläche, die übrigen drei Begrenzungsebenen dagegen Seitenflächen des Tetraeders $A_1B_1C_1D_1$ nennen.

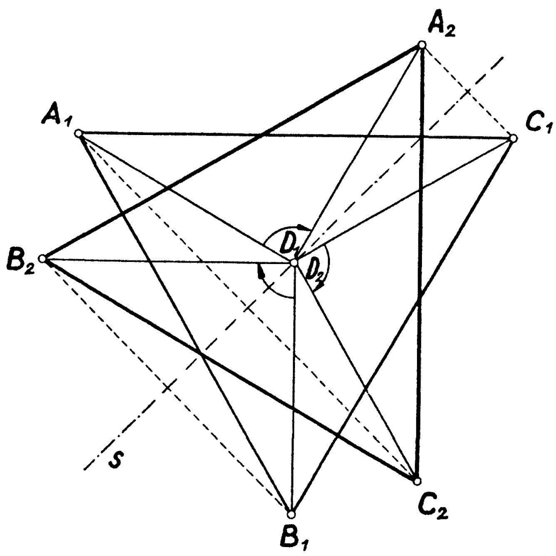

Abb. 1. Normalriß zweier gleich großer regulärer Möbiusscher Tetraeder auf eine Parallelebene zu den Grundflächen.

Wir lassen nun das gleichseitige Dreieck $A_1B_1C_1$ um seinen Mittelpunkt D_2 eine Viertelumdrehung in dem einen oder anderen Drehsinn ausführen und heben es zugleich in lotrechter Richtung in die waagrechte Ebene durch den Eckpunkt D_1. Die Endlage $A_2B_2C_2$ des bewegten gleichseitigen Dreiecks hat dann den Punkt D_1 zum Mittelpunkt. Die beiden in parallelen Ebenen liegenden Dreiecke $A_1B_1C_1$ und

[1]) A. F. MÖBIUS, Kann von zwei dreiseitigen Pyramiden eine jede in bezug auf die andere um- und eingeschrieben zugleich heißen? J. Math. *3*, 273–278 (1828) = Gesammelte Werke, Bd. 1, S. 439–446 (Leipzig 1885). (Beweis mittels baryzentrischer Koordinaten.)

$A_2B_2C_2$ haben wegen der ausgeführten Viertelumdrehung eine solche Lage zueinander, daß die Seiten eines jeden von ihnen parallel sind zu den Höhen des anderen.

Das Tetraeder $A_2B_2C_2D_2$ ist gleichfalls regulär und ebenso groß wie $A_1B_1C_1D_1$. Die waagrechte Begrenzungswand $A_2B_2C_2$ wollen wir wieder Grundfläche und die übrigen Begrenzungsebenen wiederum Seitenflächen des Tetraeders $A_2B_2C_2D_2$ nennen.

Schneiden wir nun die Seitenflächen des Tetraeders $A_2B_2C_2D_2$ mit der Grundebene des anderen Tetraeders, so decken sich diese Schnittgeraden mit den Höhen des Dreiecks $A_1B_1C_1$. Es gehen daher die Seitenflächen $B_2C_2D_2$, $A_2C_2D_2$ und $A_2B_2D_2$ des zweiten Tetraeders der Reihe nach durch die Eckpunkte A_1, B_1, C_1 des ersten Tetraeders. Da auch die Grundfläche $A_2B_2C_2$ des zweiten Tetraeders die Ecke D_1 des ersten Tetraeders enthält, so ist das zweite Tetraeder dem ersten umgeschrieben und das erste Tetraeder dem zweiten eingeschrieben.

Umgekehrt läßt sich ebenso zeigen, daß auch das zweite Tetraeder dem ersten eingeschrieben und dieses somit dem zweiten umgeschrieben ist. Die beiden regulären Tetraeder $A_1B_1C_1D_1$ und $A_2B_2C_2D_2$ sind also zwei Möbiussche Tetraeder.

Durch die Konstruktion dieses besonderen Tetraederpaares ist zugleich auf völlig elementarem Wege gezeigt, daß es überhaupt einander gegenseitig ein- und umgeschriebene Tetraeder gibt[1]). Die bekannten allgemeinen Existenzbeweise für zwei beliebige Möbiussche Tetraeder stützen sich hingegen entweder auf Sätze der ebenen projektiven Geometrie[2]) oder auf die Lehre vom linearen Nullsystem[3]) oder auf andere Teilgebiete der höheren Geometrie[4]).

3. *Die gegenseitige Verschneidung der beiden gleich großen regulären Möbiusschen Tetraeder*

Die Seitenkante A_1D_1 des ersten Tetraeders möge die Seitenfläche $A_2B_2D_2$ des zweiten Tetraeders im Punkte T_1 treffen (Abb. 2). Übt man auf das Dreieck $A_2B_2D_2$ sowie auf die Kante A_1D_1 und den auf ihr gelegenen Punkt T_1 eine Drittelumdrehung um die Drehachse D_1D_2 in jedem der beiden möglichen Drehsinne aus, so erhält man das eine Mal das Dreieck $B_2C_2D_2$, die Kante B_1D_1 und ihren Schnittpunkt U_1 mit diesem Dreieck. Bei der Drehung im entgegengesetzten Drehsinn dagegen entsteht das Dreieck $C_2A_2D_2$ und die Kante C_1D_1 samt ihrem Schnittpunkt V_1 mit dem Dreieck. Daraus ergibt sich, daß die Punkte T_1, U_1, V_1 von D_1 gleich weit entfernt sind.

Da das erste Tetraeder aus dem zweiten auf die gleiche Weise hervorgeht wie das zweite Tetraeder aus dem ersten, so müssen auch die Schnittpunkte T_2, U_2, V_2 der Seitenkanten A_2D_2, B_2D_2 und C_2D_2 des zweiten Tetraeders mit den Seitenflächen $C_1A_1D_1$, $A_1B_1D_1$ bzw. $B_1C_1D_1$ des ersten Tetraeders von D_2 ebensoweit entfernt sein wie die Punkte T_1, U_1, V_1 von D_1.

---

[1]) Ein einfaches Beispiel von zwei kongruenten nichtregulären Möbiusschen Tetraedern erwähnt SCHÖNHARDT, Jber. Dtsch. Math.-Ver. *40*, 50 (1931). Dabei bilden die Tetraederecken die Eckpunkte eines Würfels, und jedes Tetraeder geht aus dem andern durch eine halbe Umdrehung um die Verbindungsgerade der Mitten von zwei gegenüberliegenden Würfelflächen hervor.

[2]) E. MÜLLER, Über einen Steinerschen Satz und dessen Beziehung zur Konfiguration zweier einander ein- und umbeschriebenen Tetraeder, Arch. Math. Phys. (3) *2*, 130 (1902).

[3]) F. KLEIN, Vorlesungen über höhere Geometrie, 3. Aufl., S. 69/70 (Berlin 1926).

[4]) E. MÜLLER und J. L. KRAMES, Vorlesungen über darstellende Geometrie, 2. Bd.: Die Zyklographie, S. 194/95 (Leipzig und Wien 1929), folgern die Existenz Möbiusscher Tetraeder aus der Tatsache, daß zu sieben Grundpunkten eines Bündels von Flächen zweiter Ordnung stets noch ein achter, assoziierter Grundpunkt gehört.

Um die Schnittpunkte T_1, U_1, V_1 und T_2, U_2, V_2 zu erhalten, suchen wir von jeder Seitenwand der beiden Tetraeder die Schnittgeraden mit den beiden parallelen Grundebenen auf. So wird beispielsweise das Dreieck $B_1C_1D_1$ mit den Grundspuren

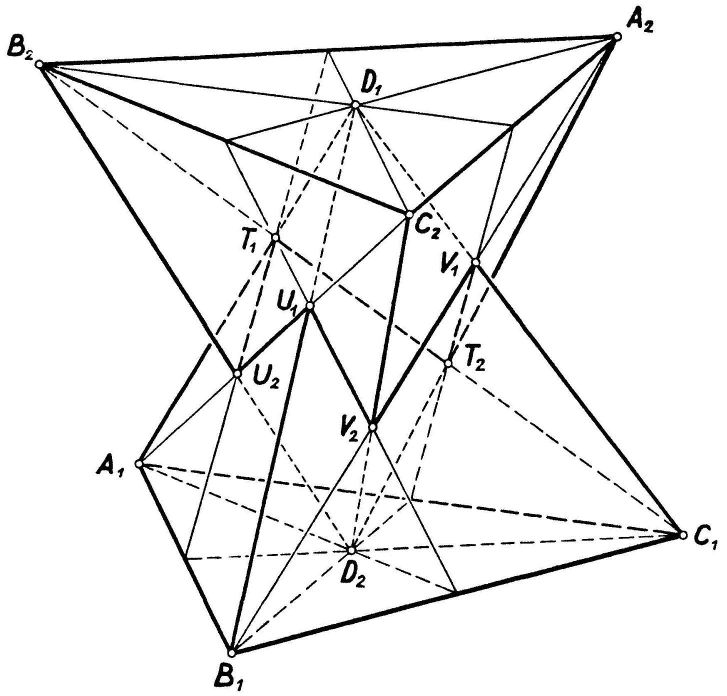

Abb. 2. Zwei kongruente reguläre Möbiussche Tetraeder und ihre gegenseitige Verschneidung, dargestellt in einem beliebigen Normalriß.

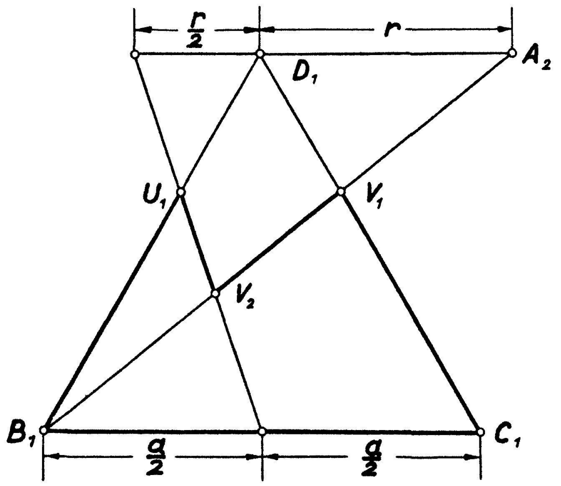

Abb. 3

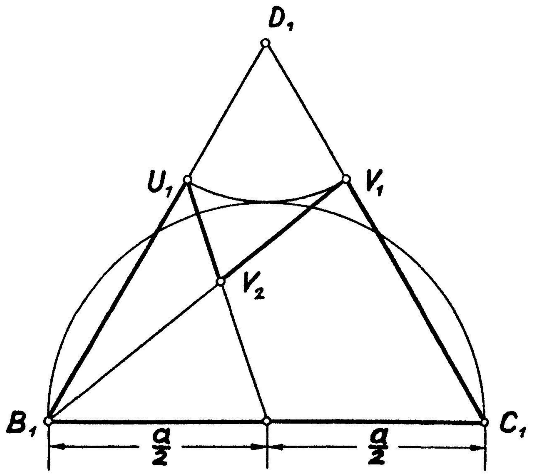

Abb. 4

Abb. 3. Außenansicht einer Seitenfläche zweier gleich großer regularer Möbiusscher Tetraeder. – Konstruktion der Verschneidung dieser Seitenfläche mit dem anderen Tetraeder.

Abb. 4. Einfache Konstruktion der Verschneidung einer Seitenfläche eines regulären Tetraeders mit dem ihm ein- und umgeschriebenen gleich großen Tetraeder.

B_1C_1 und D_1A_2 vom Dreieck $A_2C_2D_2$ geschnitten, zu dem die Grundspuren B_1D_2 und A_2C_2 gehören. Die auf der unteren Grundebene gelegenen Spuren schneiden einander in B_1 und die Spuren auf der oberen Grundebene in A_2. Die Punkte B_1 und A_2 gehören demnach der Schnittgeraden der beiden Dreiecksebenen an, von der nur das innerhalb der beiden Dreiecke gelegene Stück V_1V_2 bei der Verschneidung der beiden Tetraeder tatsächlich auftritt.

In das Dreieck $B_1C_1D_1$ schneidet auch noch das Dreieck $B_2C_2D_2$ ein, dessen Grundspuren A_1D_2 und B_2C_2 sind. Die gleichartigen Spuren schneiden sich in den Mittelpunkten der Kanten B_1C_1 und B_2C_2. Verbindet man diese beiden Mittelpunkte, so erhält man die Trägergerade der tatsächlich auftretenden Verschneidung U_1V_2 der beiden jetzt betrachteten Dreiecke.

Die Abb. 3 zeigt die Außenansicht der Seitenwand $B_1C_1D_1$ mit den beiden an ihr auftretenden Verschneidungslinien V_1V_2 und U_1V_2. Den in der Ebene des gleichseitigen Dreiecks $B_1C_1D_1$ gelegenen Punkt A_2 erhält man, wenn man den Umkreishalbmesser r dieses Dreiecks, vom Punkt D_1 aus, auf der durch ihn gezogenen Parallelen zu B_1C_1 nach rechts abträgt. Trägt man auf dieser Parallelen von D_1 aus in entgegengesetzter Richtung die Strecke $r/2$ ab, so erhält man den Mittelpunkt der Kante B_2C_2.

Aus den in Abb. 3 gezogenen Linien ersieht man, daß U_1 die Strecke $B_1D_1 = a$ im Verhältnis $a:r = \sqrt{3}:1$ teilt. Daher ist

$$D_1U_1 = \frac{a}{\sqrt{3}+1} = \frac{a}{2}(\sqrt{3}-1) = h - \frac{a}{2},$$

worin h die Längenmaßzahl der Höhe des gleichseitigen Dreiecks $B_1C_1D_1$ angibt. Auf Grund dieser Formel liegt der Punkt U_1, und demnach auch der Punkt V_1, auf demjenigen Kreis mit dem Mittelpunkt D_1, der jenen Halbkreis berührt, den man über B_1C_1 als Durchmesser zeichnen kann und der auf derselben Seite von B_1C_1 liegt wie D_1 (Abb. 4).

Da die Außenansicht jeder der sechs Seitenflächen der beiden Tetraeder mit Abb. 3 bzw. 4 übereinstimmt, so läßt sich von den in Abb. 2 dargestellten und sich gegenseitig durchdringenden speziellen Möbiusschen Tetraedern auch leicht ein Modell anfertigen. (Schluß folgt im nächsten Heft.) ARNULF REUSCHEL, Wien.

Kleine Mitteilungen

I. *Zur Schätzung des Ellipsenumfangs*

Es sei E eine Ellipse mit den Halbachsen a und b, $a \neq b$. Der Flächeninhalt von E ist

$$F = \pi a b \tag{1}$$

und für den Umfang L von E gilt die bekannte Relation

$$L > \pi (a + b). \tag{2}$$

Für diese Ungleichung wollen wir einen kurzen Beweis skizzieren, der sich beispielsweise auf der Mittelschulstufe ohne Mühe durchführen läßt.

Es bezeichne $\bar{E}$ die Ellipse mit den Halbachsen $a + \varrho$, $b + \varrho$ die mit E konzentrisch und achsenparallel in normaler Lage in einem Koordinatensystem liegen soll. Betrachten wir nun zwei parallele Tangenten an E und an $\bar{E}$ mit dem Richtungskoeffizienten m, wobei $0 < |m| < \infty$ gelten soll, so ergibt sich für den Abstand Δ dieser Tangenten die